フラクタル次元と粉体工学への応用

Fractal Dimension and its Application for Powder Technology

鈴木 道 隆*
Michitaka SUZUKI

Key Words : Fractal Dimension, Powder Technology, Particle Shape, Packing Structure

1. はじめに

最近、工学、理学、医学などのいろいろな分野でフラクタルとかフラクタル次元とかいう言葉を目にすることが多くなってきている。このフラクタル次元は、本解説の引用文献が1980年以降のものしかないことから分かるように、たいへん新しい概念である。そのためか、このフラクタル次元とは何を意味し、どのようにして測定し、さらに粉体工学にどのように応用できるのかについての分かりやすい解説はあまり見あたらない。

以前、粉体工学会誌の「新しい言葉、古い言葉」にフラクタル関係の言葉の説明をいくつか書いたのがきっかけで、このような解説を書く機会に恵まれたので、私なりにフラクタル次元の概念と粉体工学への応用についてまとめてみた。もちろん充分なものではないが、この解説が皆様にとってなんらかのお役に立てば幸いである。

2. 次元とは何か

まず、1, 2, 3次元のように、これまで一般的に広く用いられている次元は、どのようにして求められるのかを考えてみよう。一般に点は0次元、直線や線分は

1次元、正方形や長方形は2次元、立方体や直方体は3次元と言われている。これはそれぞれの自由度の数で直線は長さだけだから1つ、平面は縦と横の2つ、立体は縦、横、高さの3つであるためと考えられ、この定義で別に問題は生じなかった。ところが1890年に数学者のPeanoが、図1に示すようなPeano曲線と呼ばれる不思議な一筆書きの折れ線を考えた。この図形は単位図形の数を増やせば正方形内のすべての点をもれなく通るので平面とも考えられるが、それ自身は1本の折れ線にすぎない。このPeano曲線の次元は1本の折れ線だから1なのか、それとも単位図形の数を増やしてゆけば正方形全体をもれなく通るのだから平面の2なのか数学上の問題となった¹⁾。

HausdorffとBesicovitchは1937年に、自由度の数から離れ、対象の図形を構成する単位図形の個数と単位長さの逆数の D 乗との間に比例関係が成り立てば、

図1 Peano曲線

平成2年5月15日受付

* 姫路工業大学工学部産業機械工学教室

(〒671-22 姫路市書写 2167)

TEL 0792-66-1661 内線 249

その指数 D がその図形の次元であるという新しい次元の定義を考案した。そこでこの定義による次元をハウスドルフ次元あるいはハウスドルフ・ベシコビッチ次元と呼ぶ¹⁾。この新しい次元の定義は次のようなものである。

簡単な例として、図2のように直線、正方形、立方体を2等分する場合を考える。すると等分して得られた図形の大きさは元の図形の2分の1であるが、形はまったく同じで元の図形の小型模型となっている。このような全体と部分が相似であるという性質を自己相似性と呼ぶ。これらの図形を2等分したときの単位図形の数、図2から分かるように直線では2、正方形では4、立方体では8となる。単位図形の個数 N と単位長さ r との一般的関係を求めるとそれぞれ次の式(1)、(2)、(3)のようになる。

a) 直線の場合には

$$N = (1/r)^1 \quad (1)$$

b) 正方形の場合には

$$N = (1/r)^2 \quad (2)$$

c) 立方体の場合には

$$N = (1/r)^3 \quad (3)$$

これらの式の指数を見ると、直線で1、正方形2、立方体で3となり、一般的に知られている整数値の次元と一致する。さて、この定義に基づいて図1のPeano曲線の次元を求めると、単位長さを半分にすれば単位図形の数2倍になるので2次元であることが分かる。

図3にKoch曲線と呼ばれる特殊な図形を示す。これは直線を3等分し、その中央部分を消して長さが初めの1/3の直線を2本書き込む操作を無限に繰り返し

図2 直線、正方形、立方体の次元の求め方

図3 Koch曲線($D=1.2618594\cdots$)

図4 Sierpinskiのgasket($D=1.5849626\cdots$)

て得られる自己相似性のある図形である。前述の方法でこのKoch曲線の次元を求めてみよう。この場合、単位長さ r を1/3にすると単位図形の個数 N は4倍になる。したがってこの図形の次元 D は先ほどと同様にして次式の関係から求められる。

$$4 = 3^D \quad (4)$$

すると次元は $D = \log 4 / \log 3 = 1.2618594\cdots$ と実数になってしまう²⁾。確かに図3を見るとこのKoch曲線は直線と同じ1次元というには複雑に曲がりくねっているが、平面というほど前後左右に広がっているわけではなく、1次元と2次元の中間の性質を持っていることが分かる。

図4にSierpinskiのgasketと呼ばれる自己相似図形を示した。この図形の場合は長さを1/2にすると単位図形の数3倍になるので、次元 D は $\log 3 / \log 2 = 1.5849626\cdots$ ²⁾ となる。直感的にも図3より図4の図形の方が2次元の平面により近く、このような図形の複雑さの違いが実数値のフラクタル次元で定量的に表わることが分かる。

3. フラクタル次元と自然界への応用

1970年代に入ってMandelbrotが、このような特殊な幾何学的図形に対するハウスドルフ次元の定義を、雲、山、樹木、川、海岸線、稲妻などの自然界に見られる複雑な形に拡張して使用し、これをフラクタル次元あるいは相似次元と名づけた^{3,4)}。

これらの自然界に見られる大小様々な凹凸をもつ複雑な形は、それまでその複雑さのために定量的な検討がほとんどなされていなかった。しかしこれらの複雑

な形も、その長さ、周長、表面積などは、測定の基準単位(測定)を小さくすれば、どんどん大きくなり、また、あるスケールの範囲内で、これらの形はその一部分を拡大すれば統計的に元と相似な構造が得られるなど、の性質、すなわち自己相似性があることが明らかとなり、これらの構造をフラクタル次元を使って表す研究が進められ始めた。もちろん自然界に見られる自己相似性は、先に述べたKoch曲線などの幾何学的図形のように0から無限大のスケールで完全に成立するのではなく、ある範囲で近似的に自己相似性が成り立つので、これを統計的自己相似性と呼ぶ。

一例として河川のフラクタル次元を求めた場合を示す⁴⁾。図5に示すアマゾン川のフラクタル次元をスケール変換法⁵⁾で求める。これは図6のように対象の河川を一辺の長さが r の正方形で覆い、河川が含まれる正方形の数 $N(r)$ を求める。 r を変化させて同様な操作を繰り返し $N(r)$ を求める。

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (5)$$

得られた $N(r)$ と r を図7のように両対数プロットし、直線関係が得られれば、その直線の勾配に -1 を乗じたものが求める河川のフラクタル次元となる。アマゾ

図5 アマゾン川の形($D=1.85$)⁴⁾

図6 スケール変換法によるフラクタル次元測定原理⁵⁾

図7 正方形辺長 r と河川を含む正方形数 $N(r)$ の関係⁴⁾

ン川のフラクタル次元は図7の直線の傾きから1.85と大きな値を示した。同様な方法で砂漠の中を流れるナイル川の次元を求めると1.1(乾期)から1.4(雨期)となった。一般に降水量の少ない地域の河川のフラクタル次元は1に近く、降水量の増加とともに地表全体が水に被われていくために次元が大きくなり平面の次元2に近づく⁴⁾。

同様な方法で自然界に存在する種々の分岐構造を持つもののフラクタル次元が求められている。たとえば、人間の肺の気管は2.17次元、コウモリの翼の血管は2.3次元と2次元に近いのに対して、人間の脳表面のしわは2.73~2.79次元と3次元に近いのは興味深い。一方、木や草の茎や枝は、蔦の1.28次元からシャリントウ(バラ科の低木)の1.79次元までいろいろな値を取るが、平均1.5次元程度、雷の稲妻は1.7次元程度である⁴⁾。

自然界に見られる複雑に入り組んだ境界線もフラクタル次元を用いて研究されている。たとえば、縮尺の違う地図から求めた海岸のフラクタル次元は、1(滑らかな砂浜)から1.3(入り組んだリアス式海岸)の範囲に入る⁵⁾。また、気象衛星から撮影された雲の投影像の輪郭は自己相似性を示し、そのフラクタル次元は雲の種類にかかわらずほぼ1.35次元になることが明らかとなった^{4), 6)}。この値は水面に墨を落として作った墨絵(あるいはコーヒーにミルクを落としたときに見られる模様でも同様)の次元1.3に近いことから、大気の大きな流れと容器中の小さな流れとがよく似た性質を持ち、乱流の普遍性がフラクタル次元から明らかになるのではないかという期待も持たれている⁴⁾。

このように、フラクタル次元という新しい概念は数学の分野にとどまらず、物理学、地学、生物学、気象学、流体力学などの幅広い分野で、これまでの幾何学では取り扱えなかった自然界の複雑な形を定量化し、自然現象の解明に用いられるようになってきている。

4. フラクタル次元の粉体工学への応用

我々が対象とする粉体工学の分野でも、いろいろな所でフラクタル次元が用いられるようになってきた。それらのうち粒子の形状や粒子堆積構造の定量化にフラクタル次元を用いた例を中心に、フラクタル次元の粉体工学への応用について説明する。

4.1 粒子投影像のフラクタル次元

粉粒体の粒子を走査電子顕微鏡や拡大投影器で写真撮影し、この粒子投影像写真を基にデジタイザーを用いて粒子の輪郭線上のX、Y座標をパソコンに入力する。このようにして得られた輪郭線を図8のように長さ r の直線で折れ線近似し、その本数 $N(r)$ を求める。直線の長さ r を短くすると本数 $N(r)$ は増加するが、その増加割合は輪郭線の凹凸が激しいほど大きい。これは輪郭線の凹凸が激しいほど、 r を小さくすると大きな場合には表れなかった小さな凹凸が折れ線近似に表れて、折れ線の本数 $N(r)$ が増加するためである。輪郭線のフラクタル次元は、図10のように r と $N(r)$ を両対数プロット(Richardsonプロット)して得られる直線の傾きに -1 を掛けて得られる⁴⁻⁸⁾。

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (6)$$

なお、粒子投影像をテレビカメラなどで直接入力する場合には、河川のフラクタル次元を求める際に用いたスケール変換法⁹⁾が便利である。

一例として、炭酸カルシウム粒子投影像の輪郭線とそれについてのRichardsonプロットを図9, 10に示した。図10から最小自乗法で求めたフラクタル次元 D は炭酸カルシウムで1.134あったが、ガラスビーズではほぼ

図8 粒子投影像のフラクタル次元測定原理⁶⁾

図9 炭酸カルシウム粒子投影像の一例⁶⁾

図10 図9の粒子投影像についてのRichardsonプロット⁶⁾

図11 円形度 ψ_c とフラクタル次元 D との関係⁶⁾

1 となり、表面の滑らかな粒子の投影像のフラクタル次元は1に近く、粒子表面の凹凸が激しくなるにつれて大きくなり、2に近づくことが分かる。

これら以外にガラス破砕片、アルミナ、塩、小麦粉など合計28種類の粉粒体粒子の写真撮影し、それぞれについて約100個の投影像輪郭線のフラクタル次元を求め、その平均値と従来用いられている代表的な形状指数である円形度 ψ_c (=粒子投影面積と同じ面積の円の周長/粒子投影像の輪郭の長さ)とを比較した。その結果、図11に示すように、フラクタル次元 D が増加するほど円形度 ψ_c が直線的に減少するという良い相関関係が得られた⁶⁾。したがって粒子投影像のフラクタル次元は、その表現方法が従来の形状指数と異なるにしても、円形度と同様に粒子表面の凹凸状態を表わすものがあることが明かとなった。

4.2 分子吸着を用いた粒子表面のフラクタル次元測定

このように粒子表面のフラクタル次元は、円形度と一定の関係を持ち、粒子形状を定量的に表していることが確かめられたので、粒子投影像輪郭線の折れ線近

図 12 分子占有面積 σ (nm²) と吸着分子モデル数 n (μmol/g)¹⁰⁾

似の場合に用いた長さの異なる直線の代わりに分子径の異なる分子を用い、これを粒子表面に吸着することにより粒子表面の立体的な形状を表現できる。

吸着した 1 分子が粒子表面上で占める占有面積を σ とすれば、これは分子径 r の 2 乗に比例するから式 (6) より次式が成立する^{9,10)}。

$$n \propto \sigma^{-D/2} \quad (7)$$

ここで n は粒子単位質量あたりに単分子層吸着した分子数あるいはモル数である。分子径あるいは分子吸着面積 σ の異なる数種類のガスをを用い、それぞれが粒子表面に単分子層を形成するのに必要な試料粒子単位質量あたりの分子数あるいはモル数 n をガス吸着実験によって求め、式 (6) の関係から粒子表面のフラクタル次元 D を求めた例を図 12 に示した。

図 12 に示した Avnir らの実験結果¹⁰⁾ は、実験試料にグラファイト、吸着媒は窒素、C₂₂H₄₆、C₂₈H₅₈、C₃₂H₆₆ の 4 種類を用いたもので、これより求められた表面のフラクタル次元は 2.07 と滑らかな表面の次元 2 に近い。それに対してシリカゲルや活性炭などの多孔質試料表面のフラクタル次元は 3 に近いことが報告され、表面の立体的な凹凸状態がフラクタル次元で表わせることがわかる¹¹⁾。測定精度などにまだ問題は残るが、分子吸着を用いた微粒子のフラクタル次元測定は、比表面積の大きな微粒子ほど測定精度が上がるので、電子顕微鏡による形状測定が難しい超微粒子表面の凹凸状態の定量化などに今後利用できる可能性があると期待される。

4.3 均一径球形粒子ランダム充填層のフラクタル次元

粒子層内の粒子の詰まり方(充填構造)の違いを表わすのに、これまでは空間率 ϵ や平均配位数(粒子 1 個あたりの接触点数) $\bar{N}_c$ などが用いられてきたが、これらでは充分表わせない充填構造の違いも存在する¹²⁾。そこでフラクタル次元を用いて他の方法では表わせなかった充填構造の違いを表現できた例¹³⁾について説明する。

図 13 立方体辺長 r と粒子中心を含む立方体数 $N(r)$ の関係¹³⁾

図 14 配位数 $\bar{N}_c$ とフラクタル次元 D の関係¹³⁾

図 15 空間率 ϵ と配位数 $\bar{N}_c$ の関係¹³⁾

電算機シミュレーションで作った粒子層について河川の場合と同様にスケール変換法でフラクタル次元を求めた。1 辺の長さが r の立方体で粒子層を分割し、粒子の中心が含まれる立方体の数 $N(r)$ とする。 r を変化させ、 r と $N(r)$ を両対数プロットした例を図 13 に示した。この直線の傾きに -1 を掛けて粒子層のフラクタル次元 D を求めた。

図 14 に 4 種類の異なるプログラムで作成した粒子層について求めたフラクタル次元 D と平均配位数 $\bar{N}_c$ 。

の関係を示した。これらのうち3種類のプログラムによる充填構造の違いが、図15の配位数 $\bar{N}_c$ と空間率 ϵ の関係では明瞭ではなかったが、図14の配位数とフラクタル次元の関係からは明らかに区別できた。これらの結果より、これまでの方法では表せない粒子充填層の粒子配列構造の違いがフラクタル次元によって表せることが分かった。

4.4 粉体工学に対するフラクタル次元のその他の応用例

このようにフラクタル次元は、粒子充填層内の粒子配列状態を定量化できるばかりでなく、同様な方法で微小な粒子の凝集物の構造、たとえば凝集フロック形状¹⁴⁾、図16のような2次元拡散律速ランダムウォークによって作成した凝集モデル^{15,16)}、エアロゾル粒子の凝集構造¹⁷⁾、さらには集塵に関係して1本の繊維上への粒子の付着状態¹⁸⁾などを定量的に表現するのにも用いることができる。

これらの他、粉砕産物のフラクタル次元より粉砕機構¹⁹⁾や粉砕エネルギー則²⁰⁾を検討する研究など粉砕関係でも使われはじめており、粉粒体工学の分野でフラクタル次元は幅広く用いられるようになってきている。

図16 2次元拡散律速でつくられたランダム凝集体¹⁵⁾
($D=1.55$)

5. おわりに

工学全体に目を広げれば、さらに広い分野でフラクタル次元が用いられている。たとえば乱流構造の表現にフラクタル次元が用いられ、境界層流の境界面は2.38~2.40次元、軸対称噴流では2.32~2.33次元になると報告されている²¹⁾。また強磁性イジングモデルでの二次相転移をフラクタル次元を用いて検討した研究²²⁾や、図17のような住宅地の地下に埋設されたガスパ管網をフラクタル次元で表わし、これが地震により切断された場合どのような順番で復旧してゆけばよいかを、フラクタル次元の値を用いて検討する試みなども行なわれている²³⁾。

これらのようにフラクタル次元は誕生してまだ10年余りの新しい概念であるが、理学、工学、医学を含めたいろいろな分野で、複雑な形や構造を簡単に定量化するために広く使われ始めている。これまでの方法でうまく表現できなかった何かがフラクタル次元を用いて定量的に、しかも簡単に表せる例も多く、今後粉体工学のいろいろな分野でフラクタル次元が幅広く応用されることが期待される。

図17 住宅地のガスパ管網($D=1.79$)²²⁾

使用記号

D : フラクタル次元	[—]	ϵ : 空間率	[—]
N : 単位図形の数	[—]	σ : 分子占有面積	[nm ²]
$\bar{N}_c$: 平均配位数	[—]	ϕ_c : 粒子充填シミュレーションの粒子間摩擦角	[rad]
n : 粉体単位質量あたりの吸着分子数あるいはモル数	[g ⁻¹ または μ mol/g]	ϕ_c : 円形度	[—]
r : 代表長さ	[kmまたは—]		

引用文献

- 1) 山口昌哉：“カオスとフラクタル”，p. 183，講談社（1986）
- 2) 木上淳：数理学，No. 302，18（1988）
- 3) Mandelbrot, B. B., 広中平祐監訳：“フラクタル幾何

- 学”, p. 84~279, 日経サイエンス社(1984)
- 4) 高安秀樹: “フラクタル”, p. 32~69, 朝倉書店(1986)
- 5) 松下貢ほか: “かたちの科学”, p. 90~110, 朝倉書店(1987)
- 6) 鈴木道隆, 六車嘉貢, 廣田満昭, 大島敏男: 粉体工学会誌, **25**, 287 (1988)
- 7) Schwarz, H. and H. E. Exner: *Powder Technol.*, **27**, 207 (1980)
- 8) Clark, N. N.: *Powder Technol.*, **46**, 45 (1986)
- 9) 六車嘉貢, 廣田満昭, 鈴木道隆, 大島敏男: 昭和63年度粉体工学会春期研究発表会講演要旨集, p. 68 (1988)
- 10) Avnir, D. and D. Farin: *J. Chem. Phys.*, **79**, 3566 (1983)
- 11) Avnir, D.: “The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry”, p. 273~293, John Wiley & Sons (1989)
- 12) 鈴木道隆, 大島敏男: 粉体工学会誌, **25**, 204 (1988)
- 13) 鈴木道隆, 大島敏男: 粉体工学会誌, **26**, 250 (1989)
- 14) 荒谷敏朗, 藤井達也, 森川利哉, 宮南啓: 化学工学論文集, **14**, 395 (1988)
- 15) Witten, T. A. and L. M. Sander: *Physical Review Letters*, **47**, 1400 (1981)
- 16) 早川尚男: 数理科学, No. 291, 42 (1987)
- 17) 東野達, 高橋幹二: エアロゾル研究, **2**, 117 (1987)
- 18) 金岡千嘉男, 平木外二: 化学工学協会第21回秋季大会講演要旨集, p. 478 (1988)
- 19) 遠藤茂寿, 空閑良寿, 武内一夫: 化学工学協会第53年会講演要旨集, p. 111 (1988)
- 20) 鈴木徹, 矢野俊正: 粉体工学会誌, **26**, 99 (1989)
- 21) 山田道夫: 数理科学, No. 291, 30 (1987)
- 22) 伊藤伸泰: 数理科学, No. 301, 62 (1988)
- 23) 佐竹正雄, 中川昌美: 形の科学会報, **13**, 7, (1988)

粉 体 風 物 誌

(30)

サンホセ修道院の鞍石

1492年コロンブスのアメリカ発見の航海より数えて1992年は500年になるが、米国では1992年には国を挙げてのお祭りをする由である。それはさて置き、海外志向のスペインは中南米および北米にも植民地化政策を進めて行った。また植民地化の先鋒をつとめたのが宗教であり、17世紀頃になると各地に修道院が建てられ現地人(インディアン)の教化にあたった。テキサス州サンアントニオの郊外にあるサンホセの修道院もその一つで、写真の僧院を中心にインディアンの住む住居が城砦の壁に沿ってあり、中の広場では様々な教化が行われた由である。もう一つの写真はインディアンの使っていた鞍石で、広場にあるパン焼窯でパンを焼いていたという。

(奥田 聡)

(San Jose 修道院)

(鞍 石)