情報通信理論によるふるい分けモデルの検討

—三輪の確率モデルの検証と展開—

The Investigation of a Screening Model by the Information Theory
—Verification and Development of Miwa's Probability Model—

尾崎 都司正*, 三輪 茂雄**, 原 敬**

Toshimasa OZAKI*, Shigeo MIWA**, Kei HARA**

Powder technology requires fusion with other technologies in order to reduce environmental impacts. There is no definitive screening model, even in the screening process, in powder technology. In this paper, the modeling of a screening process is tried by using information theory. The obtained equation is identical to Miwa's probability model, which includes previous research on the screening process introduced into screening time. In addition, the relationship between the residue probability and the screening time can be derived by information theory. It is shown that the separation of screening is not so complete in limited screening time, and the way of obtaining the particle distribution is proposed. This research shows that the screening process is the same as the transmission of information and that the conception of other engineering is useful to systematize existing knowledge and promote the fusion of technologies.

Key Words: Screening, Information Theory, Probability Model, Particle Size Distribution, Particle Size Analysis

1. 緒言

地球環境問題への対応が世界的に喫急の課題であり、エネルギーのみならず素材開発の分野においてもライフサイクルアセスメントへの対応が求められている。このため、環境負荷の軽減を目指した高機能材料の開発にあたっては、多くの素材が粉体形態であるところから、粉体分野は領域を超えた技術の融合が必要とされている。最近、計算科学の分野でも粉体の現象を扱う試みがなされ、粉体に関する研究はサイエンスの様相を呈している。

基礎的な粉体の分離操作である粉体のふるい分けは、三輪の確率モデル¹⁾により工学の領域として扱われ、ふるい分け機械の設計・操作に格段の進歩をもたらしている。しかし、三輪以後、ふるい分けに関する研究は進展していない状況である。

本稿は、ふるい分けの過程の体系化を目的として、情報通信という他の工学の視点からふるい分け過程のモデル化を行い、従来のふるい分けに関する速度論的研究との比較を試みた。さらに、一定時間のふるい分けによる不完全な粒度測定に関して、粒度分布を推算する方法についても検討した。

2. 従来のふるい分けモデル

2.1 三輪の確率モデル^{1~3)}

目開きに対して網線の太さが非常に小さいとき、Gaudinは目開き a の正方形の網目に直径 x の球状粒子が、まったく網のどこにもぶつからずに通過する粒子の通過確率を、網目の全面積 a^2 に対する通過可能面積 $(a-x)^2$ の比によって定義した。

1997年2月12日受付

* (関西新技術研究所 情報通信研究センター

(〒600 京都市下京区中堂寺南町17 京都リサーチパーク内)
TEL 075-322-6826

Information Communication Res. Center, Kansai Res. Inst.
(Kyoto Res. Park 17, Chudoji Minami-machi, Shimogyo-ku
Kyoto 600)

** 同志社大学工学部

(〒600-03 京都府京田辺市多々羅谷) TEL 0774-65-6596
Fac. of Eng. Doshisha Univ.
(Tataradani Kyotanabe-shi, Kyoto 610-03)

Table 1. Previous studies of screening^{2,4)}

Warner	1924	Qualitative explanation concerning a particle passing
Stepheson	1926	Irregular description of a passing speed through a net
Andreassen	1927	$\frac{dR}{dt} = -q \cdot R$ or $R = R_0 \exp(-q \cdot t)$
Yamaguchi	1927	$\log y = a + n \cdot \log t$
Heywood	1938	$\frac{dR}{dt} = -C \frac{1}{t}$ or $R = C^1 - C \ln t$
Gaudin	1939	$P = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2$
АбраМоВи ч	1940	$R = \exp(-kt^n)$
Gulink	1943	Empirical formula of a change of time to the cumulative passing
Fagerholt	1945	$R_1 = R_\infty + \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}}$
Kammholz	1953	$\frac{dy}{dt} = -y \cdot C(t)$ or $R = \exp(-K \cdot t^m)$
Ide	1954	$1 - \frac{w_1}{w_\infty} = \exp\left(-\frac{t}{t}\right)$
Whitby	1958	$y = a \cdot t^\beta$
Непомняший	1960	$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ $W = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z_0}{\sqrt{2bt}}} \exp(-x^2) dx$
Bodziony	1961	$V(x \cdot t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} C(x \cdot t) dx$
Mizutani	1963	$\frac{dR}{dt} = -K \cdot R$ or $R = R_0 \exp(-K \cdot t)$

Note 1. Research of Yamaguchi includes an error in the treatment of feed weight.

Note 2. Research of Heywood contains an assumption that the passing quantity in unit time does not depend on an opening of net.

Note 3. Character R shows a residual rate on a net of particles.

$$P = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \quad (x < a) \quad (1)$$

しかし、実際のふるい分け操作では網目は歪んで正方形ではなく、粒子形状も複雑であるところから、個々の粒子の通過過程に対してEq.(1)が適用しうるものとは考えられない。著者の一人は、ふるい分け過程はきわめて多数の粒子と網目とが関与する統計的な現象であり、Gaudinの粒子通過確率をもとに粒子が網と衝突する回数を試行数と定義して、試行数*i*における網上残留確率 r_i を次式で示した。^{2, 3)}

$$r_i = \left\{1 - \left(\frac{a-x}{a}\right)^2\right\}^i \quad (x < a) \quad (2)$$

Taylor展開による第1項でEq.(2)を近似することにより、次のようなふるい分け過程における粒子と網目の関係式を提案している。

$$r_i \cong \exp\left\{-i\left(\frac{a-x}{a}\right)^2\right\} \quad (3)$$

Eq.(2)あるいはEq.(3)における網上残留率 r_i が試行数*i*の関数になり、*i*が20以上になれば両式の差は小さく、実用上Eq.(3)が利用できる。

さらに、 $(i/a^2) = (1/2\sigma^2)$ とすると、このEq.(3)から

$$r_i = \sqrt{2\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (x < a) \quad (4)$$

が得られる。ふるい分けにおいては、網上残留率 r_i は部分分離効率曲線となり、正規分布の山形の半分で表示できる¹⁻³⁾。

しかし、Eq.(3)は式の変形に依存するきらいがあり、また、ふるい分け時間をパラメータとした従来のふるい分け過程に関する研究との関係が明示的でないという欠点がある。

2. 2 三輪以外のふるい分けの研究^{2, 4)}

時間経過に関するふるい分けの研究は、ふるい分けの速度的な基礎づけとして重要であり、Table 1に示したように種々の研究が行われている。研究の特徴

は、網目よりはるかに小さい粒子と比較的大きい粒子の通過する、2つの過程に分けられる点にある。前者は、Andreasen, АбраМоВич, 水谷らのモデルであり、後者は、Heywood, Fagerholt, 井出, Kammholz, Whitbyらのモデルである。山口やHeywoodの研究は、供給量や仮定に問題がある。また、Непомнящийは網と粒子の視点ではなく、Bodzionyのモデルは数学的に緻密であるが、明確な結論に達していない。ふるい分けは古くから知られている操作であるが、このように法則性が体系化されていない状況である。

3. 情報理論によるふるい分けモデル

3.1 情報エントロピーによる均一粒子のふるい分け過程

(1) ふるい分け過程と情報エントロピー

ふるいの網上に供給された粒子は、網を通過するかそれとも網上に残留するか2つの事象が生起する。粒子を供給する前では、粒子径 x が網の目開き a よりも大きいのか、小さいかについての情報がないため不確実性が高い。

このように、一枚のふるいの網に供給される粒度を情報源と考えると、情報量の授受によって不確実性の解消が可能であるところから、情報理論を利用したふるい分け過程のアプローチが可能と考えられる⁵⁾。

いま、2枚のふるいの網を用い、一枚目のふるいを通過した粒子は、2枚目の網には残留すると考える。粒子が各網上に残留する生起確率、すなわち網上残留率をそれぞれ P_1 、 P_2 とすると、シャノンの情報理論⁵⁾から不確実性が解消できるとされる情報量 H (エントロピー) は次式で表される。

$$H = -(P_1 \log P_1 + P_2 \log P_2) \quad (5)$$

但し、 $P_1 + P_2 = 1$ である。ふるい分けが完了した時点では微小変化における δH に変化がなく、Eq.(5)の変分はゼロとなる。

$$\delta H = -\sum_{j=1}^2 (\log P_j + 1) \delta P_j = 0 \quad (6)$$

Eq.(5)の条件から、次式を得る。

$$\sum_{j=1}^2 \delta P_j = 0 \quad (7)$$

目開きや粒子径の情報がなければ、不確実性が最大と

なり、このときエントロピー最大化原理から $P_1 = P_2 = 1/2$ が得られ、ふるい分けは2分割されることが示される。従って、情報エントロピーの最大化がふるい分けの一つの式となる。

(2) ふるい分け過程

網の目開き a より小さい粒子は一回の衝突で、一義的に網を通過するのではなく、通過しにくさに難易度がある。いま、直径 x の球状粒子1個が1回の衝突で j なる網の通過のしにくさを尺度 V_j で表すことにする。この尺度は、網の目開きと粒子径のみに依存し、衝突の回数に関わらず一定である。

$$V_j = 1 - \left(\frac{a_j - x}{a_j} \right)^2, \quad (j=1,2) \quad (8)$$

網上残留率 P_j とEq.(8)の尺度との積 E は通過しにくさの期待値となり、ふるい分けが完了した時点では微小変化における δE に変化がなく、Eq.(9)の変分もゼロとなる。

$$\delta E = \sum_{j=1}^2 \delta (V_j P_j) = \sum_{j=1}^2 V_j \delta P_j = 0 \quad (9)$$

Eqs.(7), (9)に未定の定数 α^* 、 β を乗じ、Eq.(6)に加えると

$$\sum_{j=1}^2 (-\log P_j + \alpha + \beta V_j) \delta P_j = 0, \quad (\alpha = \alpha^* - 1) \quad (10)$$

が得られる。任意の δP_j に対して上式が成り立つためには括弧内が0でなければならない。

$$\log P_j = \alpha + \beta V_j, \quad (j=1,2) \quad (11)$$

α については不定であり、 $\alpha = -\beta$ とすると、 j なる網の網上残留率 P_j はEq.(3)と同型となる。

$$P_j = \exp \left\{ -\beta \left(\frac{a_j - x}{a_j} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

なお、粒子が目開き a のふるいから得られる情報量 $-\log P$ は、粒子の通過しやすさに比例する。この係数 β は粒子の通過のし易さを情報量に換算するものである。 a 、 x を一定とすると、ふるいから得られる網目に関する情報量が大きくなれば、網上残留率が小さくなり、 β は粒子が網を選好する機会の増大を表し、三輪の試行数と同じであると考えられる。従って、 $\beta > 0$ でなければならない。本情報エントロピー法は、粒子がGaudinの条件を満足するような挙動を示

Fig. 1 Batch Screening

す分布状態の中から最も生起確率の高い分布を誘導するものであり、ふるい分けでは正規分布となっている。

ふるい分けの基本的関係は、Eq.(3) となり、著者の一人は帰納的にEq.(3) を誘導したが、演繹的にも誘導が可能であることが明らかにされた。

3. 2 情報理論による動的ふるい分け過程

粒子径 x の粒子が目開き a_j の網に供給されたときの、網上残留率の動的変化を検討する。最上段に供給された粒子が m 段目の目開きよりも小さいものとし、かつ上段の粒子数あるいは粒子重量を 1 としても他に影響を与えないことから、時間 t における網上残留率を y_t とすると、初期の投入量は $y_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)^T$ で表すことができる。

最上段に供給された粒子は、次の試行で最上段に滞留するものと、2 段目に落下するものとに分かれる。粒子は、試行数が増加すると、もともと網上に滞留したところに上の段から落下量が加わって滞留するものと落下するものとに分かれてゆく。(Fig. 1 参照)

試行数 $\beta = \beta = \xi_a t$ 、時間 t における j 段の網上残留率を $y_{t,j}$ で表し、 $m+1$ 段の多段回分ふるい分けを再び情報理論から考える。時間 $t-1$ での情報源の i 段から情報 c_i が伝送されて時間 t での情報源の j 段の情報 d_j となったとき、次の通信路方程式⁶⁾が成立する。

$$\sum_{i=1}^{m+1} A(d_j | c_i) \cdot P(c_i) = P(d_j), \quad (j=1, 2, \dots, m+1) \quad (13)$$

j 段のふるいの単位時間当たり通過しにくさ V_j を用いると、情報源 i 段の網上残留率 $y_{t-1,i}$ をもつ情報が送信されたとき、受信側における j 段の網上残留率 $y_{t,j}$ との関係は、Eq.(13) から次式が誘導できる。

$$\begin{pmatrix} y_{t,1} \\ y_{t,2} \\ y_{t,3} \\ \vdots \\ y_{t,m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-V_1 & V_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1-V_2 & V_3 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-V_m & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_{t-1,1} \\ y_{t-1,2} \\ y_{t-1,3} \\ \vdots \\ y_{t-1,m+1} \end{pmatrix}$$

$$= A^{t*} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$V_j = 1 - \xi_j \left(\frac{a_j - x}{a_j} \right)^2$$

すなわち、多段回分式ふるい分け操作は通信路行列 A をもちいて $y_t = A y_{t-1}$ となり、ふるい分けが進行するに伴って、不確実性が減少していく状況を表している。この行列の解は帰納法⁷⁾によって求めることができる (Appendix 1)。

(I) 最上段のふるい $j=1$

$$\begin{aligned} y_{t,1} &= V_1 y_{t-1,1} = \cdots = V_1^t y_{0,1} = V_1^t \\ &= \exp \left[-\xi_1 \left(1 - \frac{x}{a_1} \right)^2 t \right] \end{aligned} \quad (15)$$

これは、Eq.(3) と同じである。

(II) 2 段目のふるい

$$y_{t,2} = (1-V_1) \left(\frac{V_2^t}{V_2 - V_1} + \frac{V_1^t}{V_1 - V_2} \right) \quad (16)$$

(III) j 段目のふるい

$$y_{t,j} = \prod_{i=1}^{j-1} (1-V_i) \sum_{k=1}^j \frac{V_k^t}{\prod_{i=1, i \neq k}^j (V_k - V_i)} \quad (17)$$

(IV) 受皿

$$\begin{aligned} y_{t,m+1} &= 1 - \prod_{i=1}^m (1-V_i) \cdot \left\{ \frac{V_1^t}{(V_1 - V_2) \cdots (V_1 - V_m)(1 - V_1)} + \right. \\ &\quad \cdots + \\ &\quad \left. \frac{V_m^t}{(V_m - V_1) \cdots (V_m - V_{m-1})(1 - V_m)} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ところで、従来のふるい分けによる粒度測定では、設定時間の根拠が曖昧であり、分離が不完全な場合についての対応策もないようである。しかし、Eqs. (15)~(18) から、任意のふるい段における網上残留率を解析的に求めることができ、その結果はふるい

Table 2. Calculation result based on the Miwa's model

Opening (μm)	Feed Size (%)	Screening time (s)						
		0	60	180	300	900	3600	7200
420	2.2	100.00	4.16	3.10	2.86	2.56	2.37	2.32
350	5.0		12.08	7.91	7.02	6.07	5.56	5.39
297	12.8		29.08	18.14	15.91	13.80	13.07	12.95
250	27.7		51.36	40.67	37.54	33.18	30.36	29.57
210	49.4		67.99	57.82	55.66	52.94	51.19	50.67
177	62.1		82.52	72.12	69.12	65.60	63.72	63.22
149	76.7		90.88	85.25	83.65	80.96	78.84	78.21
125	86.2		95.44	91.29	90.03	88.36	87.29	86.99
—	100.0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

Fig. 2 Trials number in unit time

分けの精度に関する知見や、粒度分布を求める方法も示唆できると考えられる。

4. 数値解

4.1 単位時間あたりの試行数ξの決定

Eqs. (15)～(18) を用いて網上残留率の時間依存性を解析的に求めるには、単位時間あたりの試行数ξを決定する必要がある。試行数ξは粒子形状や網の形状に依存する量である。

$\sqrt{2}$ シリーズの連続する2つのふるいで整粒された分布をもつ粒子の残留率 R_{t,a_i} は、ふるい分け時間が大きいところで直線性の成立が著者の一人によって確認されている³⁾。

$$\ln R_{t,a_i} = A'_{a_i} - B'_{a_i} \ln \xi_{a_i} t \quad (19)$$

A'_{a_i} , B'_{a_i} , ξ_{a_i} は時間に依存しない定数であるから、ふるい分け時間 t と網上残留率の測定をもとにして、非線型パラメータ決定法により各係数を求めることができる。本研究では、比較的簡単なマルカート法を採用した。目開き 88, 210, 350, 1410 μm の GC 絹ふるいを用い、熔融アルミナ系研磨材での実験

をもとに算出した単位時間当たり試行数ξを Fig. 2 に示す。

4.2 数値シミュレーション

粒度分布が既知の熔融アルミナ系研磨材を用い、目開き 125, 149, 177, 210, 250, 297, 350, 420 μm の GC 絹ふるいによる網上残留率を Eq. (19) によって求めた。なお、重量基準の粒度分布を個数基準に変換するにあたり、125～420 μm の個数はラグランジュの補間法で求め、両端は対数正規分布を仮定して個数基準頻度分布関数を求めた。また、単位時間の試行数は、先のグラフから得た回帰式から算出した。各網上残留率の時間的変化を Table 2 に示す。

網目より比較的小さい粒子が60秒ぐらいのふるい分け時間でほぼ落下していることが伺える。しかし、粒度分布が Feed Size に収斂するには、ふるい分け時間を大きくすることが必要であるところから、前者とのふるい分け機構の違いが示唆される。実際のふるい分け機構では、ふるいの網上で粒子が偏析し、大きい粒子の上に積層した小さい粒子は、ふるい分けが容易でないために、二つのふるい分け機構を持つと考えられる。本シミュレーションモデルは、同一網の残留確率は時間の経過とともに幾何級数的に小さくなる Eq. (3) がベースである。

Table 2 は、この幾何級数の特性を利用することにより、実際のふるい分け機構の違いを表すと考える。

5. ふるい分けモデルの考察

5.1 三輪の確率モデルと従来の研究との比較

(1) 整粒された粒子のふるい分け

Eq. (3) に、試行数として $i = \xi_{a_i} t$ を用いて、微小時間における網上残留率 $y_{t,i}$ をとると Eq. (15) から Andreassen²⁾ や水谷と同型の式⁴⁾ が得られる。

$$\frac{dy_{t,1}}{dt} = \xi_{a_1} \left(\frac{a_1 - x}{a_1} \right)^2 y_{t,1} = -K_1 y_{t,1} \quad (20)$$

Andreasen や水谷のモデルに比べ、三輪の確率モデルでは比例定数 K_1 が目開きや粒子径の関数として明確な形で表わされている。また、粒度分布の狭い領域のふるい分け過程では、粒径の小さい粒子と粒径の大きい粒子がランダムにふるい分けられるが、粒径の小さい粒子の通過が比較的多くなることから、 $K_1 = \xi_{a_1} \{1 - (x/a_1)^2\}$ の値は漸減して一定と考えることはできない。もし、Andreasen や水谷のように比例定数を一定とすると、初期の細かい粒子の通過には適合するけれども大きい粒子の通過には適合しなくなる。Kammholz, АбраМoВич らのモデルに示された t^n の指数部分が $n \leq 1$ となるのは、細かい粒子の通過に対する粒子径の影響を時間の項で補正したためと考えられる。しかし、三輪の確率モデルは、粒子径の影響を含み、網目よりはるかに小さい粒子が通過する過程の網上残留率を数理的に説明でき、その合理性に秀でていると考えられる。

(2) 粒度分布をもつ粒子のふるい分け

広い粒度分布 $f(x)$ をもつ粒子の網上残留率については、次式が成立する²⁾。

$$R_i = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^3 f(x) \exp \left\{ -i \left(\frac{a-x}{a} \right)^2 \right\} dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^3 f(x) dx} \quad (21)$$

(但し、 $i = \xi t$)

この式は時間との関係が明示的でないが、粒子径の個数基準頻度分布関数 $f(x)$ を個数基準矩形分布とし、 $x/a = \varepsilon_{\max}$ 、 $\varepsilon_{\max} = 1$ 、 $\varepsilon_{\min} = 0$ を境界条件とすると、網上粒子群の網上残留率は、ふるい分け時間の指数関数となることが示される。(Appendix 2 参照)

$$R_i = 4 \int_0^1 \varepsilon^3 \exp \left\{ -i(1-\varepsilon)^2 \right\} d\varepsilon$$

$$\cong \exp \left(-\frac{i = \xi t}{15} \right) \quad (22)$$

この式が成立するのは、厳密には試行数 i がきわめて小さい場合であり、試行数 i が大きくなる場合には、指数関数を級数展開し項別積分によって網上残留率を求めることができる。

Fig. 3 は、試行数と網上残留率の関係を示したものであり、試行数 i が増えるに従い直線に近づき、決定

Fig. 3 Relationship between trials number and residual rate

係数 $R.R.$ が 0.999 以上の精度で次のような指数関数で表すことができる。

$$R = 245.8 i^{-0.45407} \quad (100 \leq i \leq 1000)$$

$$R.R. = 0.999697$$

$$R = 308.1 i^{-0.48697} \quad (1000 \leq i \leq 10000)$$

$$R.R. = 0.999967$$

$$R = 398.2 i^{-0.51232} \quad (10000 \leq i)$$

$$R.R. = 0.999917 \quad (23)$$

試行数がきわめて大きくなると、網上残留率は試行数のほぼ $1/\sqrt{t}$ に比例するとした Fagerholt の研究結果が誘導でき、ふるい分け過程の二段階説の一つである大きい粒子の通過過程にも三輪のモデルの適用が可能となる。

5. 2 粒度測定モデル

(1) 水谷のモデル⁴⁾ との関係

通常、粉体の粒度分布はプロセスや製品の品質に大きく影響するが、粒度測定の精度に関する検定方法が確立していない中で、ふるい分けの精度に関する水谷の研究は先駆的である。

水谷のモデルは、 m 個の網目の異なるふるいの網上残留率が連立線形微分方程式となる、とするものである。なお、サンプル重量を 1 とする。

$$\frac{dy_{t,1}}{dt} = -K_1 y_{t,1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_{t,j}}{dt} = K_{j-1} y_{t,j-1} - K_j y_{t,j} \quad (24)$$

比例定数 K_j はふるい分け継続時間 τ における網上残留率 $y_{\tau,j}$ から $K_j = \ln y_{\tau,j} / \tau$ で定義されている。受皿に蓄積する量も $t=0$ で $y_{0,m+1} = 0$ の初期条件のもとで次式を解くと得られる。

$$\frac{dy_{t,m+1}}{dt} = -K_m y_{t,m} \quad (25)$$

このモデルは、数理的表記に優れているもののふるい分けに関する現象論的な扱いがなされていないなどの欠点がある。

三輪の確率モデルを拡張した本方法による基礎式は、Eq.(14) より次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} y_{t,j} &= (1-V_{j-1}) \cdot 1 \cdot y_{t-1,j-1} + V_j \cdot 1 \cdot y_{t-1,j} \\ &= (1-V_{j-1})y_{t-1,j-1} + V_j y_{t-1,j} \quad (j=1,2,\dots,m) \end{aligned} \quad (26)$$

時刻 t から $t+\Delta t$ となったときを考えると、 $1-V_j$ は単位時間あたりの網を通過する量であるから、 Δt における j 段のふるいの網に残留率の変化は、次式で表される。

$$y_{t+\Delta t,j} - y_{t,j} = (1-V_{j-1})\Delta t y_{t,j-1} - (1-V_j)\Delta t y_{t-1,j} \quad (27)$$

$$\frac{\Delta y_{t,j}}{\Delta t} = \frac{y_{t+\Delta t,j} - y_{t,j}}{\Delta t} = (1-V_{j-1})y_{t,j-1} - (1-V_j)y_{t,j} \quad (28)$$

ところで、Eq.(20) の検討から $V_j = 1 - \xi_{a_j} \{(a_j - x)/a_j\}^2$ であり、 $K_j = \xi_{a_j} \{(a_j - x)/a_j\}^2$ とすると

$$dy_{t,j}/dt = K_{j-1} y_{t,j-1} - K_j y_{t,j} \quad (29)$$

となり、水谷の式が得られる。本方法は、網の目開きや粒子径が変化した場合の一般的手法へと拡張できる。

(2) ふるい分け完了時間

粒度測定をふるい分け操作で行う場合には、最下段のふるい分けが分離の目安になり、受皿の残量変化によってふるい分けの精度を知ることができる。

本研究による誘導式に基づいてふるい分けの精度を検討する。Table 2 に示すように、本サンプルの粒度測定では、ふるい分けの進行にともなって受皿に蓄積する量が $125 \mu\text{m}$ ふるい下全量に近づく。この相対比が分離度を表す指標とし、完全に分離が完了した場合を分離度 100 とする。

水谷の実験に従って、8 段のふるいによる粒度測定での受皿の蓄積量を数値計算によって求めた。(Fig.

Fig. 4 Efficiency curve of screening

4 参照

通常用いられる 5 分間のふるい分け時間では、73.1% にしか達していない。また、15 分でも 85.4% である。ふるい分け機においては、50% ふるい分けが基本原理であるが、粒度測定は粉体プロセスの最適性や製品の品質に影響を及ぼすところから、正確性が要求されるため、 ξ の測定結果を用いて粒度分布の推定が可能である。

粒度分布式がほぼ既知である場合には、二つの異なったふるい分け精度、一定時間でふるい分けられた各ふるいの粒度測定結果に基づき、各段の分離度を仮定して粒度分布による分離度が一致するまで繰り返し計算を行い、一致点の粒度分布が最終的な粒度分布として求めることができる。

6. 結 言

基礎的な粉体の分離操作である粉体のふるい分けを情報理論によってモデル化したところ、三輪が提案した関係式が誘導され、この式はふるい分けの速度論的研究を包含することも明らかにした。

さらに、多段ふるい分けに拡張することにより、従来明らかでなかった単位時間試行数 ξ の物理的意味と、測定法に対する理論を提案し、これに基づき粒度測定の精度の検証方法を示した。

本研究はシャノンの情報理論によるところが大きく、この概念で他の分野が捉えられることを確認した。確率のみで物理現象を捉えることは危険であるが、新しい概念で既存の知見を整理することは、工学の分野において極めて重要であり、この手法は、粉体と他の工学の知見の融合に有益だと思われる。

Nomenclature

A : channel matrix	(-)	$R.R.$: coefficient of determination	(-)
A_s' : coefficient depend on the characteristics of the screening size a and particle size	(-)	r_i : residual rate at trial number i	(-)
a : opening size	(μm)	V_j : index that will show hardness degree of passing through the j th screening in unit trial	(1/trial)
B_s' : coefficient depend on the characteristics of the screening size a and particle size	(-)	V_j : index that will show hardness degree of passing through the j th screening in unit time	(1/s)
E : expected value	(1/trial)	x : particle size	(μm)
H : entropy	(-)	y : probability that will remain in batch screening	(-)
i : trials number	(-)	α, α^* : undetermined coefficient	(-)
K : coefficient defined by Andreasen and Mizutani	(-)	β : trials number	(-)
P_j : probability that will remain on the j th screening	(-)	ε : ratio of particle size by opening size	(-)
R : residual rate	(%)	ξ : trials number in unit time	(1/s)
		τ : screening time	(s)

Appendix 1

時間 t における $j=1$ の網上残留率は、Eq.(15) で誘導されている。 $j \geq 2$ のときの $j-1$ 段目の網上残留率を次のように仮定する。

$$y_{t,j-1} = \prod_{i=1}^{j-2} (1-V_i) \sum_{k=1}^{j-1} \frac{V_k^t}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l)} \quad (A-1)$$

j 段での網上残留率は、Eq.(26) の第 2 項を展開すると得られる。

$$\begin{aligned} y_{t,j} &= (1-V_{j-1})y_{t-1,j-1} + V_j y_{t-1,j} \\ &= (1-V_{j-1})y_{t-1,j-1} + V_j \{(1-V_{j-1})y_{t-2,j-1} + V_j y_{t-2,j}\} \\ &= (1-V_{j-1}) V_j^{t-1} \left(\frac{y_{t-1,j-1}}{V_j^{t-1}} + \frac{y_{t-2,j-1}}{V_j^{t-2}} + \frac{y_{t-3,j-1}}{V_j^{t-3}} + \dots \right) \end{aligned} \quad (A-2)$$

Eq.(A-2) の括弧の中は、Eq.(A-1) から次式のように表せる。

$$\frac{y_{t-1,j-1}}{V_j^{t-1}} = \prod_{i=1}^{j-2} (1-V_i) \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l)} \left(\frac{V_k}{V_j} \right)^{t-1}$$

ところで、

$$\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{V_k}{V_j} \right)^{t-1} = \frac{V_k}{V_j} \frac{1 - \left(\frac{V_k}{V_j} \right)^{t-1}}{1 - \frac{V_k}{V_j}} = \frac{V_k}{V_j^{t-1}} \cdot \frac{V_j^{t-1} - V_k^{t-1}}{V_j - V_k}$$

となるから、整理すると次式を得る。

$$y_{t,j} = \prod_{i=1}^{j-1} (1-V_i) \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{-V_k V_j^{t-1}}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l) (V_k - V_j)} + \frac{V_k^t}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l) (V_k - V_j)} \right) \quad (A-3)$$

一方、

$$\sum_{k=1}^j \frac{V_k}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l)}$$

は $k=j$ の項とそれ以外の項に分けることができ、部分分数の性質を利用すると、次のように簡単化できる。

$$\sum_{k=1}^j \frac{V_k}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l)} = \frac{V_j}{\prod_{l=1}^{j-1} (V_j - V_l)} + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{V_k}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l)} = 0 \quad (A-4)$$

Eq.(A-3) における括弧の中の第 1 項に、Eq.(A-4) を代入する。

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{-V_k V_j^{t-1}}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l) (V_k - V_j)} = \frac{V_j^t}{\prod_{l=1, l \neq j}^{j-1} (V_j - V_l)} \quad (A-5)$$

また、Eq.(A-3) の第 2 項は $k=j-1$ までの値である。従って、第 1 項、第 2 項を合わせると

$$y_{t,j} = \prod_{i=1}^{j-1} (1-V_i) \sum_{k=1}^j \frac{V_k^t}{\prod_{l=1, l \neq k}^{j-1} (V_k - V_l)}$$

が誘導される。

最終段も、Eq.(26) から、

$$y_{t,m+1} = (1-V_m)y_{t-1,m} + y_{t-1,m+1} = (1-V_m) \sum_{\tau=0}^{t-1} y_{\tau,m}$$

となり、 m 段の $\tau=0$ から $\tau=t-1$ までの残留確率を求めることになる。

$$y_{t,m+1} = \prod_{i=1}^m (1-V_i) \cdot \left\{ \frac{\sum_{\tau=0}^{t-1} V_i^\tau}{(V_1 - V_2) \cdots (V_1 - V_m)} + \frac{\sum_{\tau=0}^{t-1} V_2^\tau}{(V_2 - V_1) \cdots (V_2 - V_m)} + \dots \right\}$$

$$+\frac{\sum_{r=0}^{i-1} V_m^r}{(V_m-V_1)\cdots(V_m-V_{m-1})}\Bigg\}$$

となる。部分分数を利用して整理すると次式を得る。

$$y_{i,m+1}=1-\prod_{i=1}^m(1-V_i)\cdot\left\{\frac{V_1^i}{(V_1-V_2)\cdots(V_1-V_m)(1-V_1)}\right. \\ +\cdots\cdots\cdots \\ \left.+\frac{V_m^1}{(V_m-V_1)\cdots(V_m-V_{m-1})(1-V_m)}\right\}$$

Appendix 2

Eq.(22) を Taylor 展開する。

$$R_i=4\int_0^1 3\left(1-i(1-\varepsilon)^2+\frac{i^2(1-\varepsilon)^4}{2!}-\frac{i^3(1-\varepsilon)^6}{3!}+\cdots\right)d\varepsilon$$

$$=1-\frac{i}{15}+\frac{i^2}{2!70}-\frac{i^3}{3!210}+\cdots \\ \cong \exp\left(-\frac{i}{15}\right)$$

References

- 1) Miwa, S.: "Evaluation of sieving efficiency", *Kagaku Kogaku*, **24**, 150~155 (1960)
- 2) Miwa, S.: "Funtaino Furuiwake", pp.170~206, Nikkan Kogyo (1969)
- 3) Miwa, S.: "Furuiwake Tokuhon", Sangyo Gijutsu Center (1974)
- 4) Mizutani, S.: "An experimental consideration of accuracy of sieving analysis", *Journal of Earth Science*, (Nagoya Univ.) **11**, 1~7 (1963)
- 5) Taki, Y.: "Jouhouron 1", pp.88~91, Iwanami Shoten (1995)
- 6) Ohishi, S.: "Reinimotozuku Jouhouriron Nyuumon", pp.70~72, Koudansha Science (1995)
- 7) Takekuma, R.: "Kakuritsu", pp.70~72, Baifuukan (1995)