流動粉粒体（粗大粒子）の応力と歪み速度の関係

—離散要素法と実験による導出—

The Stress-strain Rate Relationship for Flowing Coarse Particle Powder Beds Obtained by the 3-Dimensional Distinct Element Method and Experiments

湯 晋一*, 林 昭久*, 脇 昌裕*, 梅 景俊彦*

Shinichi YUU*, Akihisa HAYASHI*, Masahiro WAKI*, Toshihiko UMEKAGE*

The relationship between stresses and rates of the strains of flowing coarse particle powder beds (ceramic particles diameter $D_p=5\text{mm}$) were calculated by the 3-dimensional Distinct Element Method (D.E.M.). The experimental relationships were also obtained under the same conditions. The comparison of calculated and experimental stress-strain rate relationships shows that both the dynamic shear and the dynamic normal stresses, which are the values of the differences between measured and static stresses divided by the static normal stress, are expressed by the linear relationships of the strain rates of the flowing particulate beds over a fairly broad strain rate. The following equations show the stress-strain rate relationships in the results of the present investigation.

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2} A_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left| \sigma_{y0} \right| + \tau_{xy0}$$

$$\sigma_y = -A_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left| \sigma_{y0} \right| + \sigma_{y0}$$

, where τ_{xy} and σ_y are the stresses of the flowing powder beds, τ_{xy0} and σ_{y0} are the static stresses, and u and v are the strain rates. These equations show that the product of the strain rate and the static stress indicates the importance of the constitution relationships in the particulate matter.

Coefficient A_1 and A_2 in these equations in the present investigation show that A_2 of the particulate matter is much larger than A_1 . This means that shear deformation occurs more easily than normal deformation in the particulate matter.

Key Words : Constitutive Equation, Distinct Element Method, Powder Bed, Stress, Strain Rate

1. 緒 言

粉粒体の貯蔵や供給等、粉粒体を取り扱う操作には粉粒体の流動が関与し、各種装置の設計には粉粒体の基本的な流動特性を知る必要がある。しかしながら粉粒体は水や空気のような連続体と異なり、個々の要素が不連続なため不均質性が強く、また摩擦のような非

線形の性質が加わるので、水や空気に比べ複雑な挙動を示す。また、粉粒体層の充填状態、摩擦、付着性といった諸因子が複雑に相互影響し、その力学機構は十分には明らかにされていない。特に流動の力学的メカニズムは未解決の部分が多く、満足のいく構成関係が明らかにされていないのが現状である。近年になり、粉粒体の挙動を簡単にシミュレートする離散要素法 (Distinct Element Method 略して D. E. M.) が提案された。離散要素法は、粗大粒子の運動を定性的のみならず、定量的にもほぼ正しく表わすことが明らかになってきた。D. E. M. の本質的な欠陥としては、粉粒体が移動する時の粒子同士の擦れ合いや衝突による

1996年7月29日受付

*九州工業大学工学部機械知能工学科機械工学教室

(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1) TEL. 093-884-3174

Dept. of Mech. Eng., Kyusyu Inst. of Technol.

(1-1 Sensuicho, Tobata-ku, Kitakyusyu-shi 804)

Fig. 1 Computational domain
(Unit mm)

相互作用を厳密に考慮していない点である。すなわち、現実の粉粒体層では、ある粒子に接している他の粒子は、また別の粒子と接しているので、その粒子に影響を及ぼし、次々に相互作用が伝わり、粉粒体層全体について方程式を連立して解く必要があるが、D. E. M. では、着目粒子に接している粒子だけに相互作用を限定している。これらの仮定が原因してD. E. M. では、計算に用いる粒子の物性値と実際の粒子の物性値のあいだには明瞭な関係が得られていない。本研究の目的では、このように本質的な欠陥を有するものの、粉粒体運動をよく表わす三次元離散要素法を用いて粉粒体層の挙動を数値解析し、粉粒体の構成関係を求め、実験によって検証し、妥当な粉粒体の構成式を得ることである。

2. 計算方法

2.1 離散要素法について

粉粒体中において粒子は互いに押し合い、極めて僅かであるが変形している。その変形量に応じた復元力は、スプリングを用いて表わすことができる。また接触によるエネルギーの消耗として、粘性減衰に相当するダッシュポットを考える。さらに接線方向に関しては、スリップを生じることが考えられるため摩擦スライダーを考える。接触モデル図や計算式の導出は、Cundall and Strack¹⁾、木山ら²⁾、日高ら³⁾の報告に詳しいのでここでは省略する。このように、個々の粒子に働く上述の力を考慮し、粒子のLagrangian型運動方程式を解くと、粒子の位置、速度、加速度、回転角、角速度、角加速度及び粒子間の作用力など様々な物理量が得られる。

2.2 剪断応力と歪み速度の計算

本研究で行った二種類の計算のうち、粉粒体の剪断応力と歪み速度の関係を求める計算は次のようである。樋状容器に粉粒体を充填し、その上から押え板を

載せ所要応力をかけ、容器を一定速度で動かすことで粉粒体に剪断流れを与え、その際生じる剪断応力及び歪み速度を求める。実際には押え板は粒子から反力を受けて運動をするため、Fig. 1に示すように計算でも、押え板を自由に動き得るようにした。本計算では押え板の並進運動については、計算空間に固定された絶対座標系、すなわち (x, y, z) 座標系で行なうが、押え板の回転運動については板の重心を原点とした、板と共に並進はするが回転はしない (X, Y, Z) 座標系で行う。 (x, y, z) 座標系と (X, Y, Z) 座標系では軸の方向は平行である。また (x, y, z) 座標系における (X, Y, Z) 座標系の原点の位置はEq.(1)で求められる並進運動より求まる。

運動方程式は、押え板の並進運動については左右に容器壁があることから y 方向のみに運動が可能で、次のようになる。

$$m_w \ddot{y}_w = \Sigma F_{wyi} \quad (1)$$

ここで、 m_w は押え板の質量、 $\ddot{y}_w$ は押え板の加速度、 F_{wyi} は押え板粒子（後述するように押え板は単なる板ではなく粒子の集合体と考えている）に働く y 方向の力で、変形量に応じた復元力と粘性減衰に相当する減衰力の和で表わされる。また押え板の回転運動は押え板の重心回りの運動で、容器壁があるため y 軸回りには回転しない。したがって次の二式となる。

$$I_{wX} \ddot{\theta}_{wX} = \Sigma M_{wXi} \quad (2)$$

$$I_{wZ} \ddot{\theta}_{wZ} = \Sigma M_{wZi} \quad (3)$$

ここで、 (X, Y, Z) 座標系における押え板の慣性モーメントを I_{wX} 、 I_{wZ} 、角加速度を $\ddot{\theta}_{wX}$ 、 $\ddot{\theta}_{wZ}$ 、押え板に働くモーメントの和を ΣM_{wXi} 、 ΣM_{wZi} とする。

実際にはFig. 1に示す押え板上に固定された (x', y', z') 、原点は板の重心であり、板の並進、回転と共に移動する座標系における慣性モーメント $I_{wx'}$ 、 $I_{wy'}$ 、 $I_{wz'}$ 及び慣性乗積 $I_{wy'z'}$ 、 $I_{wz'x'}$ 、 $I_{wx'y'}$ を求め (X, Y, Z) 座標系に変換する必要がある。 (x', y', z') 座標系での慣性モーメント及び慣性乗積は次のようになる。

$$I_{wx'} = \frac{m_w}{12} (b^2 + c^2)$$

$$I_{wy'} = \frac{m_w}{12} (c^2 + a^2)$$

$$I_{wz'} = \frac{m_w}{12} (a^2 + b^2)$$

Fig. 2 Moment of attached particles in a board

$$I_{wy'z} = -\frac{m_w}{16}bc$$

$$I_{wz'x} = -\frac{m_w}{16}ca$$

$$I_{wx'y'} = -\frac{m_w}{16}ab$$

座標間の方向余弦 (l_i , m_i , n_i) を用いれば (X , Y , Z) 座標系に変換した慣性モーメント I_{wX} , I_{wZ} は次のようになる。

$$I_{wX} = l_1^2 I_{wx'} + l_2^2 I_{wy'} + l_3^2 I_{wz'} + 2l_2 l_3 I_{wy'z'} + 2l_3 l_1 I_{wz'x'} + 2l_1 l_2 I_{wx'y'} \quad (4)$$

$$I_{wZ} = n_1^2 I_{wx'} + n_2^2 I_{wy'} + n_3^2 I_{wz'} + 2n_2 n_3 I_{wy'z'} + 2n_3 n_1 I_{wz'x'} + 2n_1 n_2 I_{wx'y'} \quad (5)$$

粉粒体の内部での応力を求めるためには、粒子間の力のやりとりを計算しなければならないので、Fig. 1 に示すように押え板は単なる板ではなく粒子の集合体とする。計算では、Fig. 2 のように押え板粒子 i に作用力 F_{wyi} が作用する場合を考える。ここで、(x , y , z) 座標系と (X , Y , Z) 座標系では軸の方向が平行であるため F_{wyi} と F_{wyi} は同一となる。まず板の重心を基点とした Z 方向のモーメント (右ねじの方向を正とする) は次式で与えられる。

$$M_{wZi} = F_{wyi}(x_{wG} - x_{wi}) \quad (6)$$

この式により $x_{wi} < x_{wG}$ のときは正、 $x_{wi} > x_{wG}$ のときは負となる。同様にして、板の重心を基点とした X 方向のモーメントは

$$M_{wXi} = F_{wyi}(z_{wi} - z_{wG}) \quad (7)$$

で与えられる。押え板のモーメント M_{wX} , M_{wZ} はこれら各押え板粒子のモーメントの総和となる。

$$M_{wX} = \sum M_{wXi} \quad (8)$$

Table 1 Conditions of the calculations

Particle diameter	D_p	0.5×10^{-2} (m)
Particle density	ρ_p	2.5×10^3 (kg/m ³)
Stiffness		
(normal)	k_n	3.0×10^3 (N/m)
(shear)	k_t	6.2×10^2 (N/m)
Damping coefficient		
(normal)	η_n	3.96 (kg/s)
(shear)	η_t	1.77 (kg/s)
Friction coefficient		
(Particle-particle)	μ_p	0.25, 0.35 (—)
(particle-wall)	μ_w	0.3, 0.4 (—)
Time step	Δt	1.0×10^{-4} (s)

$$M_{wZ} = \sum M_{wZi} \quad (9)$$

次に各押え板粒子の持つ速度 $\dot{y}_{wi}$ は Eqs. (1), (2) 及び (3) を時間積分して求まる。

$$\dot{y}_{wi} = \dot{y}_w + \dot{\theta}_{wX}(z_{wi} - z_{wG}) + \dot{\theta}_{wZ}(x_{wG} - x_{wi}) \quad (10)$$

更に各押え板粒子の変位 y_{wi} は次式で与えられる。

$$y_{wi} = \dot{y}_{wi} \Delta t \quad (11)$$

Fig. 1 に示す計算空間は、長さ 480mm、幅 80mm、高さ 60mm で、これは長さ以外は後述する実験装置と同じ寸法である。容器底には実験と同様に粒子をはりつけて設置した。また、容器の x 方向の両端面は周期境界条件とした。これに直径 5 mm の粒子を粒子 6 個分の高さまで最密充填で並べた後ランダムに 2 割を抜き取り、層全体を底から粒子半径分浮かせた状態で配置した。そして粒子に重力を与え沈降させ、粒子がランダムに配置された状態を作り、そこから剪断流れを与える計算を行なった。粒子の沈降速度が、 1.0×10^{-3} cm/s 以下になったときに近似的に静止状態とし、充填粉粒体層の初期状態とした。剪断流れは押え板を固定し、容器を一定速度で動かすことによって与えた。このとき計算空間における x 方向の端面には、粒子数の軽減のために周期境界条件を用いた。粒子数は 10992 個 (押え板用粒子、底部固定粒子を含む) である。

計算で用いた物性値及び計算条件を Table 1 に示す。縦及び横方向の減衰係数 η_n , η_t は、通常行なわれているように $\eta_i = 2\sqrt{mk_i}$ で計算した値を用いた。ただし、本計算では、 k_n と k_t の関係は $k_t = k_n/5$ を用いている。計算は押え板にかかる垂直方向応力 σ_{y0} , 容器速度 u_0 , 及び粒子間、粒子—壁間摩擦係数 μ , μ_w をパラメータとして変化させ、応力については $\sigma_{y0} =$

Fig. 3 Computational domain

Fig. 4 Experimental apparatus for shear stress

-0.695, -1.062kPaの二種類, 容器速度については $\mu_0 = 3, 10, 18, 24, 30 \text{ cm/s}$ の五種類, 摩擦係数については $\mu = 0.25$ と $\mu_w = 0.3$, $\mu = 0.35$ と $\mu_w = 0.4$ の二種類について計算を行なった。

2. 3 垂直応力と歪み速度の計算

ホッパー状の計算空間に粉粒体を充填し, ホッパーの底を開くことで粉粒体に垂流れを与え, その際に生じる垂直と歪み速度の関係を求める。

Fig. 3 に計算空間を示す。横幅 190mm, 奥行 20mm, 高さ 420mm で, これは高さのみが, 後述する実験装置と違う寸法である。容器底から 100mm の高さに垂直応力を検出する板を設け, その上面には実験と同様に粒子を設置した。これに直径 5mm の粒子を容器最上部まで最密充填で並べた後ランダムに 2 割を抜き取り, 粒子全体を底から粒子半径分浮かせた状態で配置した。そして粒子に重力を与えて沈降させ, 粒子がランダムに配置させた状態を作り, その状態から底を開いて粒子を流出させた。粒子の沈降速度が $1.0 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$ 以下になったときに静止状態とし, 充填粉粒体層の初期状態とした。粒子数は 10511 個 (測定板上設置粒子を含む) である。

Fig. 5 Motor stability

Fig. 6 Velocity of colored particles in a vessel

諸物性値及び計算条件は, 前節の粉粒体の剪断応力の計算と同じ値を用いた。計算のパラメータとしては底の開口幅 S を $S = 11, 13, 15, 17, 19 \text{ cm}$ に変化させ応力及び歪み速度を計算した。

3. 応力と歪み速度の測定

3. 1 剪断応力と歪み速度の測定

樋状の亚克力容器に粉粒体を充填して剪断流れを与え, そのときの剪断応力, 歪み速度を測定してそれらの関係を求めた。

粉粒体の剪断流れを与えて剪断応力と歪み速度を測定する実験装置図を Fig. 4 に示す。粉粒体を充填する容器は長さ 3000mm, 高さ 60mm, 幅 80mm で容器の下にはスライダが取り付けられ長手方向に自由に動く。この容器を, ワイヤでモーターと連結させ, モーターで巻き取り牽引する。試料粉粒体は直径 5mm のセラミック球 ($D_p = 5 \text{ mm}$, $\rho_p = 2500 \text{ kg/m}^3$ で計算で設定した粒子と同一粒子) を使用した。粉粒体を容器に Fig. 4 に示すように充填し, 上部押え板及びおもり (垂直荷重) をのせる。上部押え板は長さ 1800mm, 厚さ 10mm, 幅 78mm で, そのうえに押

Fig. 7 Experimental apparatus for normal stress

Fig. 8 Measurement system

え板のたわみを防ぐため支持板をつけている。粉粒体の内部における応力と歪み速度の関係を測定するため、容器底を押え板の粉粒体が接触する上下の面に試料と同じ粉粒体をほぼ同一充填率で張り付けている。また押え板が幅方向に動くのを防ぐため、粒子が接触しない高さにベアリングを取り付けて押え板の動きを抑制している。さらに、容器が移動しても上部の押え板がその移動方向に動かないようにロードセルで固定し、そのロードセルで剪断力を測定し剪断応力を求めた。

モータの安定性を Fig. 5 に示す。容器の移動速度が 0 から定常に近い値に達する時間は、移動時間全体と比較して非常に小さいことがわかる。また定常に達した後の速度の変動は 10 % 以下であった。

実験パラメータは、容器速度 u_0 と垂直方向応力 σ_{y0} で、垂直方向応力 σ_{y0} は計算と同じく -0.695kPa と -1.062kPa の 2 種類、容器速度 u_0 はモーターに接続されたインバーターの周波数値を 5Hz から 40Hz まで

5Hz 毎に変化させて実験を行なった。実験の容器速度は $3.5 \times 10^{-2}\text{m/s}$ から 0.28m/s まで約 $3.5 \times 10^{-2}\text{m/s}$ おきに変化させた。

実験方法は、実験容器に粉粒体を Fig. 6 に示すように層状に充填する。容器に充填された粉粒体層の最上面、すなわち押え板に固定された粒子と接触し剪断を起こす面に着色した粒子を幅方向に一列に並べる。実験装置と着色粒子の速度の関係を、Fig. 6 に示す。押え板をのせ所要応力 σ_{y0} になるように重りをのせる。モータ駆動により容器を動かし、ロードセルによって試料の剪断力を測定しペンレコーダーで記録する。またこの時容器の速度 u_0 は容器側面に張られたスケールをビデオカメラで撮影することにより計測する。容器停止後、マークを着けた試料の平均移動距離により剪断歪み速度を測定する。Fig. 6 に示した平均速度 u_p を着色粒子の移動速度としている。

3. 2 垂直応力と歪み速度の測定

この実験では粉粒体を入れたホッパー状の容器から粉粒体を流出させてそのときの垂直応力及び歪み速度を測定してそれらの関係を求めた。

粉粒体が流動するときの垂直応力と歪み速度を測定する実験装置及び測定系を、Figs. 7 及び 8 に示す。Fig. 7 に示す高さ 750mm、幅 190mm、奥行 20mm の透明アクリル容器に粉粒体（セラミックス球： $D_p = 5\text{mm}$ 、 $\rho_p = 2500\text{kg/m}^3$ ）を充填し、底部のスリット出口を開いて粉粒体を流動させる。出口は自由に開閉することが可能で、開口幅 S は容器の底板を動かすことによって無段階に変えることができる。また、底から 100mm の高さに圧力プローブの受圧面が取り付けられており、粉粒体の静止時の圧力ならびに流動中の垂直応力を測定する。この圧力プローブは、ロードセルに試料を張り付けた $25\text{mm} \times 20\text{mm}$ の長方形の板を取りつけたものを使用している。歪み速度は粒子の運動をビデオ撮影し、圧力プローブ上の歪み速度を求めた。これらの条件は前述の D. E. M. による計算と同一条件である。本実験に用いた機器は剪断応力と歪み速度の関係を求める実験に用いた機器と同じである。

実験方法は、Fig. 7 に示す実験装置に充填率が均一となるように粉粒体を充填する。粒子を若干流出させ内部の状態を整える。底を開放し、粒子を流出させる。圧力プローブで垂直応力を測定し、ペンレコーダに記録する。同時に流動の様子をビデオカメラで撮影し、後ほどモニタ上で粒子の速度を測定して歪み速度を求めた。

$|\sigma_{y0}| = 0.695 \text{ kPa}$, $u_0 = 8 \text{ cm/s}$,
 $\mu = 0.35$, $\mu_w = 0.4$

CalculatedI ($t = 0.0 \text{ s}$)

Experimental ($t = 0.0 \text{ s}$)

CalculatedI ($t = 0.2 \text{ s}$)

Experimental ($t = 0.2 \text{ s}$)

CalculatedI ($t = 0.4 \text{ s}$)

Experimental ($t = 0.4 \text{ s}$)

CalculatedI ($t = 0.6 \text{ s}$)

Experimental ($t = 0.6 \text{ s}$)

Fig. 9 Comparison of calculated and experimental particle shear flows

4. 計算結果と実験結果の比較及び検討

4.1 剪断を受ける粉粒体の計算結果と実験結果の比較

Fig. 9に、楕状容器内で粉粒体が剪断を受けている様子を示す。実験ではモータが定速に達するまでに0.2秒程度かかるため、計算においても0秒から0.2秒までは線形的に加速させた。Fig. 9中の黒い着色粒子は6cm間隔に設置した。この着色粒子はFig. 6に示した剪断歪み速度の実験値を求めるために用いた着色粒子とはまったく別の着色粒子である。

結果を比較してみると、実験における剪断流れの様子を、計算結果はほぼ表現しているのがわかる。またこれらの図は0秒から0.6秒までの0.1秒おきの様子を示したものであるため、静止状態にあった粒子が徐々に上層から下層へと剪断されていく様子がとらえられている。

Fig. 10に計算及び実験により得られた、剪断応力と歪み速度の関係をプロットしたものを示す。(計算、実験共に始動してから0.2秒以後のデータである) まず剪断応力—歪み速度線図は、ほぼ直線で表せることが分かる。押えの垂直応力 σ_{y0} の大きさが比較的小さい $\sigma_{y0} = -0.695 \text{ kPa}$ の場合は、計算値と実験値はほぼ一致しているが、 $\sigma_{y0} = -1.062 \text{ kPa}$ になると傾向は一

Fig. 10 Shear stress-strain rate relations

Fig. 11 Nondimensional shear stress-strain rate relations

致するものの値は両者で異なっている。これは押え板の垂直応力が大きくなると、粒子の充填状態が応力と歪み速度の関係に及ぼす影響が大きくなり、粒子の充填状態まで正確に一致させていない計算値と、実験値のあいだに差が生じたものと考えられる。粒子層が動き出すと、多少の充填状態の差異はあまり影響しないので、一般に静止状態が対応する $\partial u / \partial y = 0$ の時の τ_{xy} すなわち τ_{xy0} に両者の主な差が生じ、その後の運動状態では $\partial u / \partial y = 0$ の τ_{xy0} を補正すれば計算値と実験値は一致することがFig.10から予想される。Fig. 10に示す計算結果は摩擦係数を変化させており、構成関係に及ぼす摩擦係数の影響を見ることができる。図から分かるように、さほど大きな影響はないようである。

そこでFig. 11に縦軸には $\partial u / \partial y = 0$ 、一般に静止状

Fig. 12 Comparison of calculated and experimental particle normal flows

態に対応する剪断応力 τ_{xy0} (kPa) を剪断応力 τ_{xy} (kPa) から引いた値を垂直応力 $|\sigma_{y0}|$ で除して無次元化したものを取り、横軸に歪み速度勾配 $-\partial u / \partial y$ (1/s) を粒径 D_p と重力加速度 g で無次元化したものをもって計算結果と実験結果を示した。

Fig. 11 から分かるように、このまとめ方によって剪断に関する構成関係をほぼ一本の線でまとめることが出来る。静止時における充填状態の違いによる応力の相違を、静止時の応力 τ_{xy0} をさし引き σ_{y0} で割ることにより、取り去っている。ただし流動時の局所的充填率の変化の影響は考慮されていない。Fig. 11 で一本の線でまとめられることは、この程度の計算及び実験条件の範囲では流動時の充填率はあまり変化していないことを示している。しかしより広範囲に流動条件を変化させれば、Fig. 11 にも充填率の影響が現われると考えられるので、今後充填率の影響を明らかにする必要がある。したがって厳密には、本研究で得られた構成関係（後述する鉛直方向をも含む）は、本研究の計算条件、実験条件で適用可能で、それから大きく異なると充填率等の違いによる差が出てくると考えられる。また、Fig. 11 は粉粒体が流動することによって付加される応力と歪み速度の関係を示しており、静

Fig. 13 Normal stress-strain rate relations

止時にすでに加わっている τ_{xy0} , σ_{x0} , σ_{y0} 等については別にそれらの関係を求めなければならない。静止粉体層に D. E. M. を適用するか、クーロン・モールの塑性平衡条件を適用するかなど、種々の方法が考えられる。

4. 2 鉛直に流れる粉粒体の流動状態の計算結果と実験結果の比較

Fig. 12 に、縦長容器から粉粒体が流出する様子を示す。黒い着色粒子は底から 50mm 間隔で位置した。比較してみると現実の実験の流動状態を計算結果がよく表現しているのがわかる。ただし、実験結果の方が若干流出時間が遅いの気づく。これは計算においては、容器内に底から粒子半径だけ浮かせた状態で規則配列された粒子からランダムに粒子を抜き取り、その後重力をかけることによりランダムな充填状態を作るが、実験においては、粒子を容器上部から入れて充填させるため、実験における充填率が計算における充填率に比べ高くなり、流れにくくなっていたということが考えられる。

Fig. 13 に計算及び実験で得られた、垂直応力と歪み速度の関係を示す。なお、 $\sigma_{y0} = -5.72\text{kPa}$, $\sigma_{y0} = -6.13\text{kPa}$, $\sigma_{y0} = -6.23\text{kPa}$ のデータは、試料に 3.42 mm のセラミック球を用いた実験結果である。

Fig. 13 から、垂直応力—歪み速度線図は、剪断応力の場合と同様に、ほぼ直線であらわれ、粒径が小さいほどその勾配は大きいことが分かる。測定面に垂直な静止時の垂直応力 σ_{y0} がほぼ等しい計算値と実験値はよく一致している。

剪断応力の場合と同様に、種々の静止時応力の値を

Fig. 14 Nondimensional normal stress-strain rate relations

一本の直線にまとめるようにプロットしたのが Fig. 14 である。 σ_{y0} の値がかなり広く分布しているにもかかわらず、計算値、実験値共にデータは一本の直線でまとめられていることが分かる。Figs. 13 及び 14 の結果を直線であらわすと次式のようになる。

$$\frac{\tau_{xy} - \tau_{xy0}}{|\sigma_{y0}|} = -a_1 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_y - \sigma_{y0}}{|\sigma_{y0}|} = -a_2 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (13)$$

上式において、例えば Eq.(12) を書きなおすと

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2} a_1 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) |\sigma_{y0}| + \tau_{xy0} \quad (14)$$

のようになり、 $(\partial u / \partial y) |\sigma_{y0}|$ 、すなわち歪み速度と静止時応力の積という項が現われる。 σ_x 、 σ_y についても同様の項が現われる。運動状態においても静止時応力の重要さがうかがえる。

Figs. 11 及び 14 からわかるように、 τ_{xy} の傾きは σ_y の傾きよりも明らかに小さい。計算値、実験値共に明瞭にこの傾向を示している。水や空気のようなニュ-

トン流体では Eqs.(12), (13) の a_1 と a_2 は等しい。したがって、 a_1 が a_2 より明らかに小さいことは粉粒体の構成関係の特徴と考えられる。すなわち粉粒体は容易に剪断変形されるが、それに比較して垂直変形はされにくいということになる。粉粒体の運動は、個々の粒子間の摩擦がその基本となるので、剪断変形は容易に起こるが、圧縮による変形は起こりにくいと考えられる。これ以上の考察は今後の課題である。

5. 結 言

粗大粒子 ($D_p=5\text{mm}$ 及び 3.42mm のセラミック粒子) を対象として 3 次元離散要素法を用いて、流動粉粒体層の応力と歪み速度の関係を求めた。また、同一条件において実験を行い、計算結果と比較検討を行った。その結果、次の事柄が明らかとなった。すなわち同一粉粒体であれば静止時応力と歪み速度のかなり広い範囲わたって剪断応力、垂直応力共に静止時応力との差、すなわち粉粒体が流動することによって発生する応力と静止時応力の比 $\{(\tau_{xy} - \tau_{xy0}) / |\sigma_{y0}|\}$ 及び $(\sigma_y - \sigma_{y0}) / |\sigma_{y0}|$ は、歪み速度に関する 1 本の直線によって表わすことが出来る。その結果、剪断及び垂直応力は次のような式になる。

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2} A_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) |\sigma_{y0}| + \tau_{xy0} \quad (15)$$

$$\sigma_y = -A_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) |\sigma_{y0}| + \sigma_{y0} \quad (16)$$

上式における係数 A_1 、 A_2 は粘性係数と類似の係数で変形のしやすさを表わすが、粉粒体の場合、 A_2 の方が A_1 よりはるかに大きい。これは粉粒体の剪断変形はしやすいが、圧縮変形はしにくいことを意味する。

今後の方針としては、上述の構成方程式を運動量のつりあい式に代入し、実際の流動粉粒体の応力分布、速度分布を定量的に正確に表わすかどうかを調べる必要がある。又、広範囲の充填率、歪み速度を網羅したより精密な構成関係の導出も今後の課題である。

Nomenclature

A_1, A_2, a_1, a_2	: constants in Eqs.(12) ~ (19)	(-)	k_n, k_t	: normal and tangential stiffness	
a, b, c	: dimensions of a board	(mm)		at a contact point	(N/m)
D_p	: particle diameter	(mm)	l, m, n	: direction cosine	(-)
F	: contact force which acts on a particle	(N)	M	: moment of the contact force	(N·m)
g	: gravitational acceleration	(m/s ²)	m	: particle mass	(kg)
I	: inertia moment	(kg·m ²)	S	: width of a gate	(mm)
			t	: time	(s)

u, v	: particle velocity components	(m/s)	σ_x, σ_y	: x and y components of	
X, Y, Z	: coordinates which describe			normal stress	(kPa)
	the rotation of a board	(mm)	σ_{x0}, σ_{y0}	: x and y components of static	
x_{wG}, y_{wG}, z_{wG}	: locations of gravity center	(mm)		normal stress	(kPa)
x_{wi}, y_{wi}, z_{wi}	: locations of i particle in a board	(mm)	$\theta_{wx}, \theta_{wy}, \theta_{wz}$	: angular coordinates which describe	
Δt	: time step	(s)		the rotation of a board	(rad)
η_n, η_t	: normal and tangential damping		τ_{xy}	: shear stress	(kPa)
	coefficients at a contact point	(kg/s)	τ_{xy0}	: static shear stress	(kPa)
ρ_p	: particle density	(kg/m ³)			

Reference

- 1) Cundall, P. A and O. D. L., Strack : *Geotechnique*, (1987)
29, 47-65 (1979)
- 2) Kiyama, H. and N. Fujimura and T. Nishimura : (1992)
Dobokugakkai Ronbun Houkoku, 382, 167-174
- 3) Hidaka, J : *J. Soc. Powder Technol., Japan*, 29, 465-471