Smoothed Particle (S. P.) 法を用いた流動粉体層の 数値解析と実験値による検証

The Numerical Simulation of the Velocity and Stress Fields for a Flowing Powder Using the Smoothed Particle (S. P.) Method and Experimental Verification

湯 晋 一*, 脇 昌 裕*, 岩 政 明*, 梅 景 俊 彦*

Shinichi YUU, Masahiro WAKI, Akira IWAMASA, Toshihiko UMEKAGE

The numerical simulation of the velocity and stress fields for a flowing powder which consists of uncountably numerous particles is one of the most difficult things to do. We have numerically simulated these fields of flowing powder using the Smoothed Particle (S. P.) method based on the relationships of the stress-strain rates obtained by D. E. M. . In the S. P. method, the partial differential equations, which are the governing equations of the flow fields, are transformed to ordinary differential equations which are Lagrangian-type equations of particle motions. The numerical analysis of ordinary differential equations is much easier than that of partial differential equations. Moreover, Lagrangian analysis is suitable for the description of the characteristics of discrete particles.

The calculated results of the velocity and stress fields in a two-dimensional rectangular hopper are compared with the measured values obtained under nearly the same conditions, and a fairly good agreement among them is obtained. These results show that the S. P. method is an effective tool to simulate the various flow fields of powders which consist of uncountably numerous particles.

Key Words : Numerical Simulation, Smoothed Particle Method, Powder Bed, Stress-strain Rate Relation, Hopper.

1. 緒 言

粉体は自然に我々の周りに存在するのみならず、様々な工業プロセス中に現出し、その力学機構の解明は多くの方面から切望されている。Cundall and Struck¹⁾、が提案した離散要素法 (Distinct Element Method) は個々の粒子に対して、多くの仮定が入るものの運動方程式を計算し、集合体の力学的挙動を解析する手法であるが、粒子一個一個を追跡して計算するために計算できる粒子数に限りがある。例えば、3次元粒子であれば高々数万個である。数万個といえば通常の粉体でスプーン一杯、微小粒子からなる粉体では耳かき一杯以下である。このような微量の粒子で粉体の力学的特性を定量的に表現することは無理であ

ろう。それでは無数の粒子からなっている粉体をどのように表したらよいであろうか。やはり連続体とみなす従来の方法が妥当であろうが、その時応力と歪みの関係を表す構成方程式と、かさ密度と応力等の関係を表す状態方程式が必要となる。ところが、粉体の離散性が起因する諸性質を正しく表現している構成関係式や状態方程式は未だ求められていないといっても過言ではない。従って、これが流動粉体層の力学的メカニズムには未解決の部分が多いゆえんの一つである。今回我々はD. E. M. によって導出された粗大粒子層の構成関係を小粒子からなる粉体層に外挿しS. P. (Smoothed Particle)^{2, 3)} 法に適用し、流動粉体層の数値解析を行った。このS. P. 法は、天体物理学や流体力学における連続体を取り扱ったシミュレーションに用いられている数値解析法である。計算方法はラグランジュ法であるが、D. E. M. のように個々の粒子に着目するのではなく、粒子群で形成され重なりあって存在する連続素片に着目し、その個々の素片に対して運動方程式を計算していく方法である。したがって個数の問題は解決され、かつラグランジアン的に取り

1997年9月1日受付

粉体工学会第33回夏期シンポジウム (1997年8月、葉山) にて発表

*九州工業大学工学部機械知能工学科

(〒804-0015 北九州市戸畑区水仙町1-1) TEL 093-884-3174

*Department of Mechanical Engineering, Kyusyu Institute of Technology

(Sensui-cho 1-1, Tobata-ku, Kitakyushu-shi 804-0015)

扱うので離散的要素が起因する諸性質を表現することも可能である。我々はこの S. P. 法を用いてまず二次元空間における流動粉体層の数値解析に取り組んだ。その結果、流動粉体層に関する興味ある結果が得られたので以下に報告する。

2. 計算方法

流体の数値解析には大きく分けて、場に固定された点において随時計算を行っていくオイラーの方法と、流体と共に移動する座標において随時計算を行っていくラグランジュ的方法がある。S. P. 法は場を連続体としてラグランジュ的に計算する方法である。

S. P. 法は連続体と近似した計算対象を粒子（素片）に分割して、その粒子の運動を追跡する手法で、各粒子は、互いに重なりあってその集合体として、例えば粉体を記述するといった考え方にもとづいている。粒子のもつ物理量は粒子の中心における値として表わされ、その点と共に移動し、粒子の影響範囲内で分布関数によって分布され、その重なりあいの総和として着目粉体の物理量が求められる。粒子の存在点によって連続体を表現し、その密度に比例して連続体を緻密に表すように粒子の影響範囲が決められるので、密度の高いところは詳しく、薄いところは大きい粒子によって粗に表現されるので、計算も効率的である。

S. P. 法では、物理量 $f(\mathbf{x}_i)$ を平滑化関数（分布関数） $w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ を用いて平滑化し、 $\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle$ によって以下のように表す。以下変数のゴシックはベクトル量であらわす。

$$\begin{aligned}\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle &= \int w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) f(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j \\ &= \sum_j w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) f(\mathbf{x}_j) \Delta \mathbf{x}_j\end{aligned}\quad (1)$$

ここでかさ密度 $\rho_b(\mathbf{x}_j)$ と 1 個粒子の質量 m_0 との関係は

$$\rho_b(\mathbf{x}_j) \Delta \mathbf{x}_j = m_0 \quad (2)$$

と表せる。ただし 2 次元の場合 $\Delta \mathbf{x}_j = \Delta x_j \Delta y_j$ である。したがって Eq. (2) を Eq. (1) に代入すると、一般の物理量は次式のように表される。

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = m_0 \sum_j \frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho_b(\mathbf{x}_j)} w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3)$$

平滑化されたかさ密度 $\langle \rho_b(\mathbf{x}_i) \rangle$ と速度 $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \rangle$ は次式のように表される。

$$\langle \rho_b(\mathbf{x}_i) \rangle = m_0 \sum_j w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (4)$$

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \rangle = m_0 \sum_j \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}_j)}{\rho_b(\mathbf{x}_j)} w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (5)$$

ここで平滑化関数は規格化のための次の関係を満たさなければならない。

$$\int w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j = 1 \quad (6)$$

平滑化関数として一般に次式のガウス・カーネル関数を用いられる。

$$w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\exp(-(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 / h_i^2)}{h_i^2} + \frac{\exp(-(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 / h_j^2)}{h_j^2} \right) \quad (7)$$

h_i は i 番目の粒子の影響範囲の広がりを示す。

通常 h_i は次式で求められる。

$$h_i = \eta (\Delta \mathbf{x}_j)^{1/2} = \eta (m_0 / \rho_b(\mathbf{x}_j))^{1/2} \quad (8)$$

2 次元の場合は次式となる。

$$h_i = \eta (m_0 / \rho_b(\mathbf{x}_j))^{1/2} \quad (9)$$

ここで η は定数であり、1 次元の解析解との比較より多次元計算でも妥当とされている $\eta = 1.4^4)$ を本計算では用いている。粒子の中心が半径 h_i の円内にあるすべての粒子の影響を考慮し平滑化を行う。このように影響範囲を狭くとったのは、粉体流動の塑性的性質を考慮して途中で影響が零になるように考えたからである。本計算においては、一点について通常 10 数個の粒子の影響を計算している。

運動方程式は次式のようになる。

(x 方向)

$$\rho_b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho_b \frac{du}{dt} = - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (10)$$

(y 方向)

$$\rho_b \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho_b \frac{dv}{dt} = - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) - \rho_b g \quad (11)$$

Eqs. (10), (11) から分かるように、これらの式の最右辺の応力とかさ密度の関係が分かれば、常微分方程式として Eqs. (10), (11) を解くことができる。すなわちラグランジアン的に粒子を追跡して解くことがで

Table 1 Calculation condition

Particle diameter in Eqs. (12), (13) and (14)	D_p	$= 0.31$	(mm)
Particle density	ρ	$= 2.5 \times 10^{-3}$	g/mm ³
Number of particle	N	$= 9800$	(-)
Constants in Eqs. (12), (13) and (14)	A_1	$= 0.16 \times 10^{-3}$	(-)
	A_2	$= 0.26 \times 10^{-5}$	(-)
Constant in Eq. (9)	η	$= 1.4$	(-)
Wall friction coefficient	μ_w	$= 0.3$	(-)

きる。S. P. 法はラグランジアン的に解き、質量を保存しているので質量保存式（例えば流体力学での連続の式）は必然的に満足しているので記述する必要はない。ここで構成方程式としては著者⁵⁾らが離散要素法を用いて粗大粒子について求めた関係を用いる。それらを次式で示す。

$$\frac{\sigma_x - \sigma_{x0}}{\sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2}} = -a_1 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x} = -A_1 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_y + \sigma_{y0}}{\sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2}} = -a_1 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{1/2} \frac{\partial v}{\partial y} = -A_1 \frac{\partial v}{\partial y} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy} - \tau_{xy0}}{\sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2}} &= -\frac{1}{2} a_2 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{2} A_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、上式中の A_1 、 A_2 は計算結果が実験結果に近づくように選定した。それらの値はTable 1に示す。 A_1 、 A_2 中の a_1 、 a_2 も実際の粉体の粒径等の条件によって変化するので、Table 1中の A_1 、 A_2 は厳密には本研究条件にのみ適用可能である。

$$\sigma_{x0} = k\sigma_{y0} \quad (15)$$

$$\sigma_{y0} = -\frac{\rho_b g D}{\mu_w k} \left[1 - \exp \left(-\frac{\mu_w k}{D} (y - 283.5) \right) \right] \quad (16)$$

$$\tau_{xy0} = \beta \sigma_{y0} \quad (17)$$

Eqs. (15), (17) 中の粉体層内の応力比 k 、 β は前述の離散要素法を用いた著者らの結果⁶⁾を数式化して用いた。それらは次式によって表される。

$$k = b_1 (x - l)^4 + b_2 (x - l)^2 + 0.5 \quad (18)$$

但し、 $b_1 = -1.645 \cdot 10^{-9}$ 、 $b_2 = 3.63 \cdot 10^{-5}$ である。

$$\beta = c (x - l)^2 \frac{(x - l)}{|x - l|} \quad (19)$$

但し、 $c = 1.36 \cdot 10^{-5}$ である。また容器の左側壁から中心までをEqs. (18), (19) で表し、右側半分は対称となるように求めた。

運動方程式 Eqs. (10), (11) に構成方程式 Eqs. (12) ~ (14) を代入し、方程式を平滑化する必要がある。〈 〉 で平滑化を示すと形式的に平滑化した方程式は次式となる。

(x 方向)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{du}{dt} \right\rangle &= \left\langle -\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle -\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial y} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_1}{\rho_b} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_1}{\rho_b} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_2}{2\rho_b} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_2}{2\rho_b} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (20)$$

(y 方向)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dv}{dt} \right\rangle &= \left\langle -\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle -\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial \sigma_{y0}}{\partial y} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_2}{2\rho_b} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_2}{2\rho_b} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_1}{\rho_b} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{A_1}{\rho_b} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle - \langle g \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

右辺の各項についてそれぞれ実際に平滑化を行う。右辺第一項については次のようになる。

$$\left\langle -\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial x} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\rho_b} \frac{g D}{\mu_w k} \left[1 - \exp \left(-\frac{\mu_w k}{D} y \right) \right] \right\rangle$$

$$\times \left\{ \kappa \frac{\partial \rho_b}{\partial x} + \rho_b \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right\} \quad (22)$$

次に ρ_b を $w(x_i - x_j)$ を用いて表すと次式となる。

$$= -\frac{gD}{\mu_w k} \sum_j \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right\} \times \left[\kappa \frac{\frac{\partial}{\partial x} w(x_i - x_j)}{w(x_i - x_j)} + \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] \quad (23)$$

同様にして他の項も計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \left\langle -\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial y} \right\rangle \\ &= -\frac{gD}{\mu_w k} \sum_j \left[\beta \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right\} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) w(x_i - x_j)}{w(x_i - x_j)} \right. \\ & \quad \left. + \beta \frac{\mu_w k}{D} \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{A_1}{\rho_b} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &= A_1 \frac{gD}{\mu_w k} \sum_j \left[\sqrt{1 + \kappa^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right\} \right. \\ & \quad \left. \times m_0 \frac{u_j}{\rho_{bj}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(x_i - x_j) \right] \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{A_1}{\rho_b} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &= A_1 \frac{gD}{\mu_w k} \sum_j \left[\sqrt{1 + \kappa^2} m_0 \frac{u_j}{\rho_{bj}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x_i - x_j) \right. \\ & \quad \times \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right\} \left\{ \sqrt{1 + \kappa^2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x_i - x_j) \right. \\ & \quad \left. \left. w(x_i - x_j) + \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{1 + \kappa^2} \right\} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{A_2}{2\rho_b} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &= \frac{A_2}{2} \frac{gD}{\mu_w k} \sum_j \left[\sqrt{1 + \kappa^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right\} \right. \\ & \quad \times \frac{m_0}{\rho_b} \left\{ v_j \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right) w(x_i - x_j) + u_j \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. \times w(x_i - x_j) \right\} \right] \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{A_2}{2\rho_b} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2} \right\rangle \\ &= \frac{A_2}{2} \frac{gD}{\mu_w k} \sum_j \left[\sqrt{1 + \kappa^2} \frac{m_0}{\rho_b} \left\{ v_j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x_i - x_j) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + u_j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) w(x_i - x_j) \right\} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right\} \right. \\ & \quad \times \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) w(x_i - x_j) / w(x_i - x_j) + \frac{\mu_w k}{D} \\ & \quad \left. \times \exp\left(-\frac{\mu_w k}{D} y\right) \right] \quad (28) \end{aligned}$$

y 方向も同様に得られるが、ここでは省略する。

境界においては、計算空間外部に 1 パーティション分余分に計算空間を設けた。そして、計算空間内部の壁に接しているパーティションに存在している粒子と、壁を境に対称になるように粒子を配置した。その時、粒子の特性値は壁に対して垂直となる速度についてだけを異符号とし、他の特性値は同一とした。

境界からの影響を受けた粒子速度は次のように考える。計算空間内部に存在する粒子と境界外の粒子からの影響を考え、次の式をたてた。

$$\tilde{v}_i = v_i + v_i^B \quad (29)$$

$\tilde{v}_i$ は境界からの影響を受けた粒子速度、 v_i は計算空間内部にある粒子の影響を受けた粒子速度、 v_i^B はある粒子に影響する境界外の粒子からの速度影響の和である。 v_i と v_i^B は次式で表される。

$$v_i = \frac{m_0}{\pi} \sum_j \left(\frac{v_j}{\rho_{bj}} \right) \frac{1}{2} \left\{ \frac{\exp(-(x_i - x_j)^2 / h_j^2)}{h_j^2} + \frac{\exp(-(x_i - x_j)^2 / h_j^2)}{h_j^2} \right\} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} v_i^B &= \frac{m_0}{\pi} \sum_B \left(\frac{v_B}{\rho_{bB}} \right) \left[\frac{\exp\{-(x_i - x_B)^2 / h_B^2\}}{h_B^2} \right] \\ &= -\frac{\tilde{v}_i}{2} \frac{1}{t_{0i} \sqrt{\pi}} \exp(-t_{0i}) \quad (31) \end{aligned}$$

但し、 $t_{0i} = |x_i - x_B| / h_i$

Eq. (31) を、Eq. (29) に代入し整理すると、

$$\tilde{v}_i = v_i / \left\{ 1 + \exp(-t_{0i}^2) / (2t_{0i} \sqrt{\pi}) \right\} \quad (32)$$

となり、この式から着目粒子のもつ速度を使って境界からの影響を受けた粒子の速度を計算することができ

Fig. 1 Computational domain (mm)

る。

粒子の初期配列としては計算空間内部において、規則的に、また一様に配置した。この時の初期配列における隣接粒子の中心間距離は3mmとした。計算における初期条件は、粉体容器の開口部を閉じた状態であるので、全点における速度は0となる。

応力の初期条件としては、ヤンセンの式をもとにした状態方程式によって計算される静止時における粉体層内部に働く応力を与え、スリット開口時（計算開始時）にはこの応力によって粉体層全体が流動を始める。

流出口（容器中央のスリット開口部）からの粉体の流出は自由落下として、すなわち $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = \tau_{xy0} = 0$ として計算を行った。このとき流出口ではそれより上部粉体層の影響で x 方向に速度分布が形成されているが、実際の現象で見られる流出口直下の x 方向速度減衰を表現するために、自由落下だけではこれを表しえないので、流出口より下方に落下するに従って x 方向速度に1cycleごとに0.95を掛けて時間的に減少させるようにしている。数10cycle進めばほぼ零となる。粒子が底壁に近づく、底壁及びその近くの側壁の境界条件が働き粒子は静止し、堆積する。そこで最初の粒子が底に到達し、下向き速度が零になった後、下向き速度が一旦ほぼ零になった粒子は堆積したと見なせるので、それらの粒子には堆積した状態、すなわちEqs. (15) ~ (17) を再び用いて計算を行う。但し $(y - 283.5)$ のかわりに y となる必要がある。

また本計算では、計算空間内にある範囲を設けて、その範囲内で速度の絶対値がある微小値(10^{-3} mm/s)以下になると、その速度を零とみなすことにより、死領域を表した。

S. P. 法の計算においても着目粒子に、他の全ての粒子からの影響を考えることは計算時間が非常に長く

Fig. 2 Experimental apparatus (mm)

なり非効率である。そこで、離散要素法で用いられるパーティションを、S. P. 法でも適用し計算の効率化を図った。一つのパーティションの大きさは x 方向及び y 方向に10.5mmとした。初期状態では隣の粒子との間隔が3mmであるためこのパーティションの中に、最大16個の粒子が入ることになる。

またFig. 1に示すように、一つのパーティションに存在する着目粒子には、その周りにある八つのパーティションに存在する全ての粒子の影響も考慮するので、結局一つの着目粒子には九つのパーティションに存在する粒子の影響も考慮していることになる。

3. 計算条件

Fig. 1に計算空間を示す。計算空間内部は高さ703.5mm、横幅210mmで、境界外部を含むと高さ714mm、横幅231mmの二次元空間である。これは、後で述べる比較実験の実験装置と、奥行きを除くと同じ寸法である。また、境界外部は境界条件を満足させるために設けた仮想のパーティションの計算空間である。更に底から283.5mmの高さの中央に84mmの幅のスリットを設置した。このスリットを開口させることで粉体層全体が流動を始めるようにした。粒子はこの計算空間内に9800個、規則的に配置した。今回の計算で用いた諸物性値をTable 1に示す。

4. 実験方法

今回実験に使用した実験装置の概略図をFig. 2に示す。これは計算と同一寸法のアクリル製実験容器で、直径 $D_p = 310 \mu\text{m}$ のガラスビーズを乾燥させ充填し、底のスリットを開口することにより容器中の粉体を流

(a) Calculated position of point mass ($t = 0.03s$) (b) Experimental position of powder ($t = 0.03s$)

Fig. 3 Comparison of experimental and calculated results

(a) Calculated position of point mass ($t = 0.12s$) (b) Experimental position of powder ($t = 0.12s$)

Fig. 5 Comparison of experimental and calculated results

(a) Calculated position of point mass ($t = 0.058s$) (b) Experimental position of powder ($t = 0.058s$)

Fig. 4 Comparison of experimental and calculated results

(a) Calculated position of point mass ($t = 0.21s$) (b) Experimental position of powder ($t = 0.48s$)

Fig. 6 Comparison of experimental and calculated results

動させ、容器側面壁での応力分布を圧力プローブで測定する。またこのときビデオカメラ（シャッタースピード1/1000s、毎秒60コマ）を用いて粒子瞬時位置及び瞬時速度を測定する。圧力プローブ⁷⁾はボールベアリングを使用することによって構造的に垂直応

力、剪断応力を分離し測定できるようにしてある。

5. 結果及び考察

Figs. 3~6、にそれぞれ容器から粉体が出し始めてからそれぞれ0.03、0.058、0.12、0.21秒後の粉体の

Fig. 7 (1) y component of powder velocity
($t = 0.12\text{s}$)

Fig. 8 (1) x component of powder velocity
($t = 0.12\text{s}$)

Fig. 7 (2), ($t = 0.12\text{s}$)

Fig. 8 (2), ($t = 0.12\text{s}$)

Fig. 7 (3), ($t = 0.12\text{s}$)

Fig. 8 (3), ($t = 0.12\text{s}$)

瞬時位置の計算結果と実験結果 (Fig. 6の実験結果は 0.48 秒後である) を比較して示す。これらの図中、計算空間内部の黒点は粉体という連続体中の仮想粒子の中心点の位置を総数 9800 個プロットしたものである。したがって図中の黒点の密度が粉体のかさ密度の大小に直接関連している。すなわち黒点がまばらな領域はかさ密度の小さい領域を示している。計算結果と実験結果を比較してみると、全体的に計算結果は流動粉体の実験結果をおおよそ表現している。Fig. 3は粉体が流出し始めて 0.03 秒後の状態図であるが、下部の流出口から粉体が多少かさ密度を低くしながら (すなわち、多少まばらになりながら) 流出し、その流動領域が上流に広がっていく様子がよく分かる。流動によって粒子の配列があまり変化しない領域では粉体が塑性流動する際にみられるスベリ線 (と類似の線

群) が計算結果からよく観察される。すなわち図中で、粒子位置のズレが線状に表われ、互いに交差している線群である。0.058 秒後 (Fig. 4) になると、粉体の流動によってほとんどの領域で粒子の配列が大きく変化するため、この線群はほとんど観察できなくなる。粉体は流出口から自由落下的に流出し、底壁及びその近くの側壁においてはそれらの境界条件を働かせるためその影響を受けて静止し、堆積する。Figs. 5, 6の底部がそれらを表している。流出口からの粉体の流出は必ずしも自由落下的ではない。粉体の粒子間に存在する空気の影響やその他様々な影響があるであろう。計算結果と実験結果の差は流出口から底壁近くまでを自由落下、すなわち $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = \tau_{xy0} = 0$ として計算したことが主に原因しているように思われる。すなわち、計算では連続体としての粉体とその密

Fig. 9 (1) x component of normal stress at the side wall ($y = 483.5\text{mm}$)

Fig. 9 (2), ($y = 433.5\text{mm}$)

度にしたがって重力によって自由落下する。実際の粉体は粒子一個一個、ゆるい凝集体を形成していたとしてもそれら凝集体粒子が空気の抵抗を受けて落下する。計算では ρ_b がうすくなることによって落下速度が低くなるように考慮されているが、空気の抵抗を考慮していないので、計算値の落下速度の方が実験値のそれよりもかなり早くなっている。粉体層の上部自由表面の形状が計算値と実験値で異なっている。Eqs. (15) ~ (17) から分かるように $\tau_{xy0} = \mu_w \sigma_{x0}$ とすると、内部摩擦係数に相当する μ_w は β/k となる。Eqs. (18), (19) より $0 \leq \beta/k < 0.17$ （これは離散要素法によって粗大粒子について得られた値である）となり、ガラスビーズの内部摩擦係数0.5程度よりかなり小さい。壁摩擦係数も計算では0.3で、実際には0.3~0.4程度⁸⁾とわずかではあるが計算の方が小さくなっている。すなわち、計算では粉体は実際のガラスビーズよりかなりスベリやすくなっている。そのため計算では、上部自由表面がほぼ一定で下方に移動するマスフローになっているものと思われる。実際のガラスビーズの値を計算でも用いるよう工夫するべきであろう。これらの図から分かるように、このような粉体の流れには自由表面や移動境界がよく表われるが、一般に連続体解法ではこれらを表現することは難しい問題の一つである。しかしS. P. 法では自由表面や移動境界を容易に表現できる。これはラグランジアン数値解析によるためであり、S. P. 法の長所の一つである。

Fig. 10 Shear stress at the side wall ($y = 483.5\text{mm}$)

粉体が流出口から流出し初めてから0.12秒後の y 方向速度及び x 方向速度の計算結果と実験結果をそれぞれFig. 7とFig. 8に示す。 $y = 564\text{mm}$ の断面のように粉体の流出口よりかなり上方の断面では、Fig. 7 (1)に示すように側壁近傍でも下向きの速度は存在して、まだ死領域は形成されていない。前述したように、粉体の内部摩擦係数に相当する β/k の値が実際のガラスビーズ粉体のそれよりかなり低いために、計算では実際以上に粉体はスベリやすくなっていることと、粉体の流出口から粉体は連続体として自由落下するとしているため、全体的に下向き速度は計算値の方が実験値より大きい。Fig.7 (1) から分かるように速度の計算値は断面一定（マスフロー）であるが、実験値は中心領域が速いファネルフローの分布をしている。この図からマスフローとファネルフローの速度差を定量的に知ることができる。Fig.7 (2) では側壁近くで計算値、実験値ともに速度はほぼ零となり、死領域が形成されていることが分かる。Fig.7 (3) は流出口近傍の断面の速度分布である。流出速度の計算の方が実験値より大きい分布形状はほぼ一定である。Figs. 8 (1) ~ 8 (3) で分かるように、流出口に近づくにしたがって容器の中心に向かう速度が発達する。速度分布の形状の実験値を計算値はほぼ表現している。

Fig. 9 (1) ~ 9 (2) に側壁にかかる水平方向垂直応力の計算結果と実験結果を示す。各図は粉体容器の三つの異なった高さにおける側壁の σ_x の時間変化を示している。計算結果はほぼ定量的に実験結果を表現しているといえるであろう。時間とともに σ_x が減少していく主な原因は、流出して粉体の量が減るからである。

Fig. 10 に、側壁にかかる剪断応力の計算結果を示す。Fig. 9 (2) における $t = 0\text{s}$ の時の $\sigma_x = 2.6\text{kPa}$ で同一時刻、同一点における $\tau_{xy} = 0.6$ である。 $\mu_w \sigma_x = (0.3) (2.6) = 0.78\text{kPa}$ で粉体の内部摩擦係数に相当する β/k がかなり小さいので、その影響を受けて壁の剪断応力もこの程度小さくなっていると考えら

れ、ほぼ妥当な値と考えられる。

6. 結 論

無数の粒子からなる流動粉体の数値解析は困難な問題の一つであるが、我々は、D. E. M. で得られた粉体の構成関係を用いて、S. P. 法を用いた連続体モデルによる粉体の流動計算を試みた。S. P. 法は支配方程式を常微分化して解くので、偏微分方程式をオイラー的に解く場合と比較するとはるかに簡単である。得られた計算結果を同一条件の下で行われた実験結果と比較した。その結果、計算と実験では速度分布に関しては、定量的にほぼ一致した結果を示した。また、

壁面垂直応力の時間変化に関しても計算値と実験値は定量的にほぼ一致しているが、今回剪断応力については信頼できる実験データが得られなかったので計算値は直接実験値と比較していない。計算に用いた壁摩擦係数の値から推測されるに近い値を剪断応力の計算値は示しており、全体として定量的にほぼ一致していると結論づけても差し支えないと思われる。S. P. 法は今回新しく粉体の力学に導入された計算方法であり、まだその適用に様々な問題を抱えているものの（状態方程式などに問題が多い）、この手法が流動粉体のシミュレーションに有効な方法であることが明らかとなった。

Nomenclature

A_1, A_2, a_1, a_2 : constants in Eqs. (12), (13), (14)	(mm/s)
b_1, b_2 : constants in Eq. (18)	(—)
c : constant in Eq. (19)	(—)
D : width of hopper	(mm)
D_p : diameter of real powder particle	(mm)
g : gravitational acceleration	(mm ² /s)
h : standard deviation of kernel function	(mm)
k : ratio between σ_{x0} and σ_{y0}	(—)
l : half width of hopper	(mm)
m_0 : mass of initial imaginary powder	(g)
t : time	(s)
u, v : x and y components of powder velocity	(mm/s)
w : kernel function	(1/mm ²)
x, y : coordinates	(mm)
β : ratio between τ_{xy0} and σ_{y0}	(—)
η : constant in Eq. (9)	(—)
μ_w : wall friction coefficient	(—)
ρ_b : bulk density of powder	(g/mm ³)
σ_x, σ_y : x and y components of normal stress	(kPa)
σ_{x0}, σ_{y0} : x and y components of static normal stress	(kPa)
τ_{xy} : shear stress	(kPa)
τ_{xy0} : static shear stress	(kPa)

References

- 1) Cundall, P. A. and O. D. L. Strack : "A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies", *Geotechnique*, **29**, 47-65 (1979)
- 2) Yabe, T. and M. Miyama : "Simulation Physics by Personal Computer", Asakurashoten, pp. 51-75 (1992)
- 3) Nagasawa, M. : "Smoothed Particle Method in Astrophysical Gas Dynamics", *Nagare*, **10**, 229-239 (1991)
- 4) Takeda, H., M. Shoken and M. Sekiya : "Numerical Simulation of Viscous Flow by Smoothed Particle Hydrodynamics", *Progress Theoretical Phys.*, **92**, 939-960 (1994)
- 5) Yuu, S., A. Hayashi, M. Waki and T. Umekage : "The Stress-strain Rate Relationship for Flowing Coarse Particle Powder Beds Obtained by the 3-Dimensional Distinct Element Method and Experiments", *J. Soc. Powder Technol. Japan*, **34**, 212-220 (1997)
- 6) Waki, M. : "Numerical Simulation of Flowing Powder Beds Using Smoothed Particle Hydrodynamics Method and Experimental Verification", Master Thesis of Kyushu Inst. Tech. (1997)
- 7) Yuu, S., T. Saito and T. Umekage : Shunki Kenkyu Hapyokai Koen Ronbunshu, 94-98 (1995)
- 8) Yuu, S., T. Ikeda, K. Egami and T. Kameshima : "Experimental Analysis of Increases in Wall Pressure Due to Slight Impacts on the Wall of a Vessel", *Powder Technology*, **41**, 251-258 (1985)