Excel による対数正規確率グラフの作図

Log-normal Probability Graphs using Microsoft Excel

渡辺 正裕*, 岡屋 克則**

Masahiro WATANABE, Katsunori OKAYA

Key Words : Microsoft Excel 97, Probability Chart, Probability Scale, Log-normal Distribution, Parameter Estimation

1. はじめに

正規分布や対数正規分布に従う累積分布データを、それぞれ正規確率グラフや対数正規確率グラフ¹⁾にプロットすると直線で表されるということはよく知られている。コンピュータによる数値計算が一般化していなかった時代には、正規確率紙や対数正規確率紙といった手書き用のグラフ用紙がパラメータ推定にも用いられていた。

粉体工学の分野においては、粒度分布を図示する場合など、特に対数正規確率グラフを利用すると便利なが多い。しかし、正規確率目盛をとった散布図を表示する機能を備えているソフトウェアは数少ない。そこで筆者らは、表計算ソフトとして非常に普及している Microsoft Excel 97 for Windows (マイクロソフト株, 以下 Excel 97 と称する) で、このような確率グラフを作図する方法を工夫してみたので紹介する。

2. 累積分布関数の線形化

確率変数を x とすると、正規分布の累積分布関数は次のような式で表すことができる。

$$Q_N(x; x_{0.5}, \sigma_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \int_{t=-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-x_{0.5}}{\sigma_a}\right)^2\right] dt \quad (1)$$

ここで $x_{0.5}$ と σ_a はそれぞれ確率変数 x のメジアンと標準偏差である。式 (1) を例えば標準正規分布の逆関数で変換すると、次のように x に対して線形になる。

$$Q_N^{-1}(Q_N(x; x_{0.5}, \sigma_a); 0, 1) = \frac{x - x_{0.5}}{\sigma_a} \quad (2)$$

正規分布に従うデータを散布図にプロットする場合には、確率変数を横軸にとり、累積分布を標準正規分布の逆関数で変換した値を縦軸にとると、直線で表される。つまり横軸に算術目盛をとって、縦軸に標準正規分布の逆関数で変換した目盛、すなわち正規確率目盛をとった散布図は正規確率グラフになる。

一方、対数正規分布の累積分布関数は次のように表される

$$Q_{LN}(x; x_{0.5}, \sigma_g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln \sigma_g}} \int_{t=-\infty}^{\ln x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \ln x_{0.5}}{\ln \sigma_g}\right)^2\right] dt \quad (3)$$

ここで σ_g は確率変数 x の幾何標準偏差である。標準正規分布の逆関数で式 (3) を変換すると、次のように x の対数に対して線形化される。

$$Q_{LN}^{-1}(Q_{LN}(x; x_{0.5}, \sigma_g); 0, 1) = \frac{\ln x - \ln x_{0.5}}{\ln \sigma_g} \quad (4)$$

つまり横軸と縦軸にそれぞれ対数目盛と正規確率目盛をとった散布図は対数正規確率グラフになる。

3. 正規確率目盛の表示

Excel 97 の散布図では、縦軸横軸ともに算術目盛か対数目盛を選択できるが、それ以外の目盛は用意されていない。そこで筆者らが考えたのは、縦軸は通常

1998年9月21日受付

資源・素材学会平成9年度春季大会(1997年3月)にて一部発表

* 信越石英(株)石英技術研究所

(〒963-0725 福島県郡山市田村町金屋字川久保88)

FAX 024-944-7289

** 東京大学大学院工学系研究科地球システム工学専攻

(〒113-0033 文京区本郷7-3-1) TEL 03-3812-2111 内線7072

(a) 散布図を作成する

(b) 正規確率目盛用のデータ系列を追加する

(c) データラベルに値を表示する

(d) データラベルに文字列を入力する

(e) データラベルの位置を左にする

(f) 不要なグラフ要素を消去する

図1 正規確率目盛を付け加える手順の例

表1 ワークシートに入力する累積分布用データの例

粒度 (μm)	変換された累積分布 (-)	累積分布 (-)
250	1.625762707	0.948
180	0.778966296	0.782
125	-0.005013590	0.498
90	-0.785773864	0.216
63	-1.425544269	0.077

の算術目盛として、そこに正規確率目盛の代用となるデータ系列を付け加えてやるという操作である。

ここでは例として、ふるい分析による粒度分布データを散布図にプロットする場合を考える。まず Excel 97 のワークシートの適当な場所に、表1の1列目のように粒度、つまり確率変数を入力し、3列目のように累積分布を入力する。また Excel 97 では、標準正規分布の逆関数が NORMSINV という名前で組み込まれているので、3列目の値を NORMSINV で変換したものを2列目のように入力する。そして1列目と

表2 ワークシートに入力する正規確率目盛用データの例

横軸 (μm)	変換された目盛の値 (-)	目盛の値 (-)
0	0.524401003	0.7
300	0.524401003	0.7

2列目のデータを使って普通に散布図を作成すると図1(a)のようになる。ただしこのときにワークシートよりもグラフシートに作成しておく方が、あとで印刷の際に便利である。

さて、図1(a)のような散布図に正規確率目盛を書き込む手法について説明する。ここでは説明の都合で、0.7の目盛一つだけを付け加えてみる。まず正規確率目盛用のデータとして、0.7を NORMSINV で変換した値を表2の2列目のようにワークシートに入力し、1列目には横軸方向の最小値0と最大値300を入力する。この1列目と2列目のデータを散布図に追加してやると、図1(b)のように表示される。このデータ系列については、二つのデータマーカーを結ぶ線

図2 正規確率グラフの例

が水平に引かれている。ここで左側のデータ要素を選択してデータラベルに縦軸方向の値を表示させると図1(c)のようになる。マーカーのすぐ右にある0.524401003という数字がデータラベル内に表示された縦軸方向の値であり、すなわちNORMSINVで変換された後の正規確率目盛の値である。このデータラベルには、キーボードなどからの入力により文字を書き込むことができる。そこで、変換される前の値0.7を文字列として書き込んでやると図1(d)のように表示される。

さらにExcel 97では、データマーカーの上下左右の位置にデータラベルを固定できるようになっているので、ここでは左に変更すると図1(e)のようになる。そしてこのデータ系列のマーカーや、縦軸の目盛ラベルや目盛線などといった不要なグラフ要素を消去してしまえば図1(f)のようになり、付け加えたデータ系列はあたかも0.7の正規確率目盛のように見える。

このような手順で、例えば0.99から0.01までの目盛の代用となるデータ系列をまとめて追加し、あとは縦軸の最小値と最大値を調節したりすれば、図2のような正規確率グラフが完成する。

一方、対数正規確率グラフを作成する場合には、以下のように操作すればよい。まず、図1(a)のような散布図を作成するところまでは正規確率グラフと同様である。この状態から横軸について、最小値と最大値を10と1000にして、縦軸との交点を10にして、対数目盛に変更する。そして、ワークシートに入力する正規確率目盛用データは、横軸方向の最小値と最大値をそれぞれ10と1000にする。このデータを散布図に追加する操作からは、再び正規確率グラフの場合と同様

図3 対数正規確率グラフの例

に行えばよい。

完成した対数正規確率グラフの例を図3に示す。この図では正規確率目盛の値を100倍にしてデータラベルに書き込むことで百分率による表示としてある。また、累積分布のデータマーカーを結ぶ線を消去して、データに当てはめられた直線を新たにデータ系列として追加してある。

このように作成された確率グラフは、正規確率目盛もグラフ要素の一部になっているので、プロットエリアの位置や大きさをマウスなどで変更することができる。そして印刷もきれいに仕上がる。

また、いわゆる Rosin-Rammler 線図²⁾などの確率グラフも、同じ要領で目盛を付け加えることにより作成できる。ただしExcel 97では、縦横の比率をある基準に合わせたような散布図を作成することが難しいという欠点がある。

4. マクロ

ここまでで説明したような手順をキーボードやマウスからの入力だけでするのは手間がかかるので、自動的に確率グラフを作成するマクロを用意すると便利である。例として、筆者らの作成したマクロが登録されたExcel 97のファイルが、筆者らのホームページからインターネットを通じてダウンロードできるようにしているので参考にいただければ幸いである。アドレスは <http://join.t.u-tokyo.ac.jp/~masahiro/> となっている。またこのマクロでは分布関数を当てはめる際のパラメータ推定についても、特に粒度分布に関する報告³⁻⁷⁾を参考に、いくつかの評価関数をソルバーで最適化できるようにしてみた。

References

- 1) Kottler, F. : "The distribution of particle sizes", *J. Franklin Inst.*, **250**, 339-356 (1950) ; **250**, 419-441 (1950)
- 2) Harris, C. C. : "A multi-purpose Alyavdin-Rosin-Rammler-Weibull chart", *Powder Technol.*, **5**, 39-42 (1971/72)
- 3) Kottler, F. : "The goodness of fit and the distribution of particle sizes", *J. Franklin Inst.*, **251**, 499-514 (1951) ; **251**, 617-641 (1951)
- 4) Raabe, O. G. : "Particle size analysis utilizing grouped data and the log-normal distribution", *J. Aerosol Sci.*, **2**, 289-303 (1971)
- 5) Barndorff-Nielsen, O. : "Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size", *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **353**, 401-419 (1977)
- 6) De Ruiter, C. J. and F. Oeseburg, : "A comparison of parameter estimation procedures for experimental bimodal lognormal particle size distributions and grouped data", *J. Aerosol Sci.*, **18**, 431-444 (1987)
- 7) Koh, P. T. L., T. Lwin and D. Albrecht : "Analysis of weight frequency particle size distributions : with special application to bimodal floc size distributions in shear-flocculation", *Powder Technol.*, **59**, 87-95 (1989)