ミーの散乱理論の導出

Derivation of Mie Theory of Light Scattering

松山 達

Tatsushi Matsuyama

The Mie's theory of light scattering by a small spherical particle was reviewed in details. It is a classic theory in which the light is treated as an electromagnetic wave, and the incident light activates oscillation of polarized charge in a sphere which results in a radiation of electromagnetic wave as the scattered light. The mathematical realization of the theory consists of some steps as : (1) vector wave equation is derived from Maxwell's equations, (2) general solution of the vector wave equation is obtained on spherical coordinates, (3) plane wave as incident light is expanded on the spherical coordinates, (4) scattered wave from the sphere satisfying the boundary conditions is obtained. Each step was explained in details in the review.

Keywords : Light scattering, Mie theory, Maxwell equation, Particle size parameter

1. はじめに

粒子による光の散乱を議論するとき、粒子径が光の波長と同程度またはそれ以下の場合、ミーの散乱理論を使って計算しなくてはならないことになっている。それは、(粒子が真球で古典的電磁気学の範囲では)この理論が唯一の「厳密解」であるからである。したがって、この分野にかかわりのある学生や技術者は、一度はミーの理論を勉強しておく必要があるだろうということになる。ところがこの理論は、ナニヤラ非常に難解(らしい)ということになっていて、少なくとも実務的には「結論の式」に従って計算はするにせよ、理論のおさらいそれ自体はどうにも敬遠されがちになってしまっている。

実は、後に詳しく見るように、ミー理論の「物理」の部分は非常に単純なのである。つまり、球の表面の境界条件に合うように電磁波を決めてやる「ダケ」なのだ。

しかしながら一方、その解を実際に求めるには数学的にテクニカルで相当にタイヘンな計算が必要になる。この事情が、ミー理論を「難解」と呼ばせるゆえんになっている。また、これは筆者の私見に過ぎないが、「物理部分」が非常に単純なので、言ってしまうと「後は計算だけ(のハズ)」というタテマエがあって、多くの教科書の類ではこの肝心の計算の部分が(紙幅の都合もあるのだろうが)省略されてしまうのが普通になっているようである。実際、筆者の知る限りではあるが、ミー理論の導出を丁寧に辿ることができるように記述された教科書や解説は見当たらない。このため、この理論について本格的に勉強してみたいと思いついたとしても、どうしても手が出せないような状況になってしまっているのは非常に残念なことである。

そこで本稿では、ミーの散乱理論の導出だけに的をしぼって一直線に、一切のゴマカシが無い*1ように丁寧に、この計算の解説をすることとした。なお、稿末には、更に進んで勉強されるであろう読者の便宜のため、本稿執筆にあたって参考にした文献^{2~5)}を挙げておく。文献³⁾には有名な邦訳書(草川ら、東海大学出

2005年10月11日受付

創価大学工学部環境共生工学科

(〒192-8577 東京都八王子市丹木町1-236) TEL 0426-91-8169

Department of Environmental Engineering for Symbiosis,
Faculty of Engineering, Soka University

(1-236, Tangi-cho, Hachioji, Tokyo 192-8577, Japan)

<著者紹介>

1992年東京大学大学院工学系研究科(化学工学専攻)博士課程修了。創価大学工学部助手、講師を経て、98年より助教授。工学博士。1998年にはDelft工科大学にて客員研究員。主たる興味は、粉と静電気の問題。2006年より静電気学会誌編集委員長。

版会)がある。

2. ミーの散乱理論の概要

球形粒子が真空中におかれていて、そこに光の平面波が入射している状況を考えよう。光は電磁波なのだから、粒子内部では入射した電磁波の電場により、誘電分極(あるいは導体の場合には電流)が発生する。つまり、粒子内部では電荷の移動が生ずるが、これは入射光の電場の振動にあわせて振動し続けるので、この電荷の振動に伴って粒子の周囲には電磁波が放射される。この放射電磁波が粒子による散乱光である。入射光、散乱光、および粒子内部の電場ベクトルをそれぞれ $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{E}_p$ と書くことにすると、すなわちこのとき、粒子外部には電場 $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$ があり、粒子内部には $\mathbf{E}_p$ があって、これら粒子外部・内部の電場ベクトルは、境界条件、つまり粒子表面での連続条件を満たさなくてはならない。入射光に対してこの境界条件を満たすように $\mathbf{E}_s$ を求めたい。以上がミーの散乱理論の内容である。

このように一見、ミーの散乱理論の「物理」自体は非常に単純である。しかし一方、それを実際に計算して見せるためには、それなりの準備と長い計算が必要になる。その具体的なステップを書き並べると、以下のようになる。

- (1) マックスウェル (Maxwell) 方程式から出発して電場と磁場に関するベクトル波動方程式を導き、この一般解を求める。
- (2) 波動方程式の球座標系での一般解を求める。
- (3) 入射光に対応する平面波を球座標系で表現する。
- (4) 球表面での境界条件を考慮して散乱光を求める。

以下では、それぞれのステップの計算について詳しく議論しよう。

3. ベクトル波動方程式の一般解の構成法

以下の(真電荷ゼロの物質中の)マックスウェル方程式から出発する*2。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

*1 ただし、途中の計算では、いわゆる特殊関数の性質をアレコレ使わなくてはならなくなるが、これらの「導出」あるいは「証明」については手に余るので省略する。基本的な方針として、岩波の数学公式集¹⁾等に掲載されているような一般的な「公式」は使って良いことにする。

*2 物質中のマックスウェル方程式の取り扱いについては最近、「粉体工学叢書第1巻・粉体の基礎物性」⁶⁾で詳しく解説したので、こちらも併せて参照されたい。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ただし、 ε は複素誘電率とする。ここで、ベクトルラプラシアン⁵⁾の定義、

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (5)$$

を Eq. (3) に用いると、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (1) なので、

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \quad (6)$$

となる。最後に $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ (4) を用いて、

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (7)$$

すなわち、電場 $\mathbf{E}$ に関する波動方程式が得られる。当然ながら、磁場 $\mathbf{H}$ についても全く同じ計算によって全く同じ形の式が得られる(ここでは等方的材料を前提として、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ であることを用いる)。

このようにして、電場 $\mathbf{E}$ も磁場 $\mathbf{H}$ も、($\mathbf{C}$ をこれらを代表する適当なベクトルとして) 同じベクトル波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{C} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} \quad (8)$$

を満たすことが分かった。ここで、 $\mathbf{C}$ が時間項 $e^{-i\omega t}$ を含んでいることを考えると、右辺の時間微分を先に評価しておけるので、 $k^2 = \varepsilon \mu \omega^2$ として、 $\mathbf{C}$ の満たすべき波動方程式を、

$$\nabla^2 \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = 0 \quad (9)$$

と書き換えておくことができる。また、これを満たす電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ は、それぞれ独立な関数ではなくて、もとのマックスウェル方程式の性質によって以下のように関係している(ただし、下の二つの式では上と同様にして、 $\mathbf{E}$ も $\mathbf{H}$ も時間項 $e^{-i\omega t}$ を含んでいるとする条件を使って時間微分を予め評価してある)。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (11)$$

以上の性質を満足するように $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ を求めたい。

ここでは、以下、天下りな方法ではあるが、母関数を用いて解を構成する方法を示す。

いま、ベクトル $\mathbf{C}$ の代わりにスカラー関数 ψ が Eq. (9) の代わりに次のスカラー波動関数を満たすものとする。

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (12)$$

この ψ を母関数として、次の三つのベクトルを構成することができる。

$$\mathbf{L} = \nabla \psi, \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{a} \psi, \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{a}$ は任意の定ベクトルとする。これらは、 ψ が Eq. (12) を満たすことを用いると、どれもが元のベクトル波動方程式 Eq. (9) を満足することを示すことができる^{*3}。 $\mathbf{a}$ が定ベクトルであるという条件を利用すると、 $\mathbf{M}$ は以下のように書くことができ、

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{a} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N} \quad (14)$$

従って、 $\mathbf{M}$ は $\mathbf{L}$ と $\mathbf{a}$ ととも直交している ($\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = 0$)。また、 $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ は、それぞれ以下のような性質を持つことも分かる。

$$\nabla \times \mathbf{L} = 0, \nabla \cdot \mathbf{L} = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (16)$$

これにより、まず、Eqs. (10) と (16) (div がゼロ)、また Eqs. (11) と (13)・(14) (他方の rot がもう一方に等しい) を見比べて、 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ が $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ の満たすべき性質に対応していることが分かる (この段階で $\mathbf{L}$ は候補から落ちる)。実際には、Eq. (12) には (後で見るように) 独立な解がたくさんある。それを ψ_n と書いて、これに対応する $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ を $\mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n$ と書く。このとき、以上の議論により、必要な性質 Eqs. (10)・(11) を全て満足するような $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ を、以下のようにして構成することができる^{*4}。

$$\mathbf{E} = -\sum_n (a_n \mathbf{M}_n + b_n \mathbf{N}_n) \quad (17)$$

$$\mathbf{H} = i \frac{k}{\mu\omega} \sum_n (a_n \mathbf{N}_n + b_n \mathbf{M}_n) \quad (18)$$

^{*3} 興味のある読者は、各自試みられたい。なお、これ以降の計算に関連する主要なベクトル解析の公式を以下に示しておく。

$$(\text{rot grad}) = (\text{div rot}) = 0$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

以上のようにして、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ を構成することが出来る。次の課題は、母関数 ψ の具体的な形を得ることである。

4. 球座標上での波動方程式の一般解

球座標

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (19)$$

における、スカラー波動方程式 Eq. (12) は次のようになる^{*5}。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

これを満足する ψ が、

$$\psi = f(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (21)$$

という形に時間項を含んでいるとする。既に議論したように、この時間項は予め評価することで落としておける。従って問題は Eq. (20) を満たすような位置の関数 f を求めることになる。ここで、Eq. (20) は変数分離できることが知られていて、解を以下の形に書くことができる。

$$f(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (22)$$

これを Eq. (20) に代入すると、 p と q を分離定数とする以下の3個の (変数分離された) 微分方程式が得

^{*4} (詳しい読者のための注) ここで実はベクトルポテンシャルを以下のように構成することができ、 $\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ によって、Eqs. (17)・(18) を構成できる。

$$\mathbf{A} = \frac{i}{\omega} \sum_n (a_n \mathbf{M}_n + b_n \mathbf{N}_n + c_n \mathbf{L}_n)$$

またこのとき、対応するスカラーポテンシャルは、 $\phi = -\sum_n c_n \psi_n$ になっていて、従って $\nabla \phi = -\sum_n c_n \mathbf{L}_n$ であり、通常のスカラーポテンシャルと電場の関係式、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ から、Eq. (17) が得られる。

^{*5} 球座標での微分の公式は、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ をそれぞれの座標成分方向の単位ベクトルとして、以下の通り。

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi$$

られる。

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - p^2) R = 0 \quad (23)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(p^2 - \frac{q^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + q^2 \Phi = 0 \quad (25)$$

まず、Eq. (25) について見る。今考えているのは、球の周りのスカラー母関数 ψ なので、角 ϕ についての関数 Φ は、 $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ のように、一周回って同じ値になる周期関数になっていなくてはならない。従って、分離定数 q は整数でなくてはならず、Eq. (25) の意味ある解は、

$$\Phi_e = \cos m\phi, \Phi_o = \sin m\phi, (m=0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

であることが分かる。なお、添字 e, o はそれぞれ、偶関数項、奇関数項を表すものとする。次に、 $q=m$ として、Eq. (24) に戻ろう。 $\eta = \cos \theta$ と変数変換を行うと、これは以下の、ルジャンドル (Legendre) の陪微分方程式として知られる微分方程式に書き換えられる (なお、以下では、ルジャンドル陪微分方程式の標準型に合わせるために、 p を $p^2 = n(n+1)$ で置き換えておく)。

$$(1-\eta^2) \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Theta}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right] \Theta = 0 \quad (27)$$

この微分方程式の解のうち、 $\eta = \pm 1 (\theta = 0, \pi)$ で無限大に発散してしまわないような (ここでの問題にとって意味のある) 解は、 n を 0 または正の整数とする第 1 種のルジャンドル陪関数 $P_n^m(\eta)$ だけであることが知られている。すなわち、

$$\Theta = P_n^m(\eta) = P_n^m(\cos \theta), (m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (28)$$

である。ただし、 $n \geq m \geq 0$ とする。また、 $m=0$ のときは、 $P_n^0(\eta) = P_n(\eta)$ であり、この項は第一種のルジャンドル多項式になっている。

次に Eq. (23) に進む。上に従って $p^2 = n(n+1)$ とし、また、

$$\rho = kr \quad (29)$$

とおくとき、 R が、

$$R = Z(kr) / \sqrt{kr} = Z(\rho) / \sqrt{\rho} \quad (30)$$

という形をしているとする。この変数変換によって Eq. (23) は、ベッセル (Bessel) の微分方程式に書き換えられる。

$$\rho^2 \frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \rho \frac{dZ}{d\rho} + \left[\rho^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0 \quad (31)$$

この微分方程式の解の基本系は、以下の 4 種類の球ベッセル関数のうちの任意の二つで与えられる。

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (\text{第 1 種球ベッセル関数}) \quad (32)$$

$$n_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} N_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (\text{第 2 種球ベッセル関数}) \quad (33)$$

$$h_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho) = j_n(\rho) + i n_n(\rho) \quad (\text{第 1 種球ハンケル関数}) \quad (34)$$

$$h_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho) = j_n(\rho) - i n_n(\rho) \quad (\text{第 2 種球ハンケル関数}) \quad (35)$$

ここで、 $J_n, N_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ は、それぞれ、第 1 種、第 2 種のベッセル関数、第 1 種、第 2 種のハンケル (Hankel) 関数である。 $h_n^{(1)}$ と $h_n^{(2)}$ をあわせて第 3 種球ベッセル関数と呼ぶこともある。また、これらを総称して球ベッセル関数と呼ぶ。以下、 $z_n(\rho)$ で球ベッセル関数を代表させることにする。

以上により、スカラー波動関数の解 ψ (の位置の関数 f) の独立な任意の項は、以下のように求まった^{*6}。

$$f_{e_{\phi mn}} = z_n(\rho) P_n^m(\cos \theta)_{\sin}^{\cos} m\phi \quad (36)$$

最終的に、 $f(r, \theta, \phi)$ は、これらの項の線形結合で以下のように与えられる。

^{*6} $f_{c_{\phi mn}} = z_n(\rho) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$ と $f_{o_{\phi mn}} = z_n(\rho) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$ の、つまりほとんど同じ二つの式を分けて二度書くのが煩わしいので、このように表記する。添字の e と o (偶関数項と奇関数項) の上下に対応して、三角関数の項を上下に読み、二つの独立な式が表記されているものと理解されたい。

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(kr) \left[a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \right] \quad (37)$$

5. 球座標上での電場と磁場の一般解

前節で、母関数が求まった。これにより、3節で準備したようにして $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ を作れば、球座標上での電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ の一般解が構成できることになる。まず、 $\psi = fe^{-i\omega t}$ と $\mathbf{L} = \nabla \psi$ (13) であることから、Eq. (37) によって、 $\mathbf{L} = \mathbf{l}e^{-i\omega t}$ が計算できる。次にこれに基づき、Eq. (13) に従って $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ を構成したいのだが、このためには定ベクトル $\mathbf{a}$ が必要なのであった。この定ベクトル $\mathbf{a}$ の代わりに、もしも動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ が使えると、計算結果の見通しが非常によくなるので便利そうであるが、 $\mathbf{e}_r$ はとりあえずは定ベクトルではない。ところが実は、球座標上での計算の場合には、定ベクトル $\mathbf{a}$ の代わりに $\mathbf{e}_r$ を用いても $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ を構成できることが以下のように示される。

まず、変数が r だけの未知のスカラー関数 $u(r)$ を仮定して、 $\mathbf{M}$ が、

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{e}_r u(r) \psi) = \mathbf{L} \times \mathbf{e}_r u(r) \quad (38)$$

と構成されるものとする^{*7}。この二番目の式を評価すると、 $\mathbf{M}$ の各成分は、

$$\begin{aligned} M_r &= 0, \quad M_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (u\psi), \\ M_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u\psi) \end{aligned} \quad (39)$$

と計算できる。この $\mathbf{M}$ が、ベクトル波動方程式を満足するような $u(r)$ を求めたい。すなわち、そのような $u(r)$ が存在し、かつ、それがうまく見つければ、Eq. (38) によって $\mathbf{M}$ を構成できることになる。そこでひとまず、 $\mathbf{M}$ をベクトル波動方程式 Eq. (9) に代入してみる。

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{M}) + k^2 \mathbf{M} = 0 \quad (40)$$

ただし、ここでは、ラプラシアンをベクトルラプラシ

^{*7} 二番目から三番目へ行くには $\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$ を用いる。このとき $\nabla \times \mathbf{e}_r = 0$ であることに留意。

アンの定義 Eq. (5) に従って書き換えてある。div rot = 0 なので、初項 $\nabla \cdot \mathbf{M}$ は常に 0 である。第二項は、

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{M})]_r = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{M})]_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} u\psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} u\psi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} u\psi \right] \end{aligned} \quad (42)$$

と計算できるので、これらの成分が Eq. (40) を満たすためには、 $u(r)$ を、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u\psi + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} u\psi \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} u\psi + k^2 u\psi = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

が成立するように決めてやる必要がある。そして実は、 $u(r) = r$ と、全く単純な形に $u(r)$ を定めると、この Eq. (43) がただちに、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

すなわち、

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (12)$$

の形になることが分かる。 ψ はもともとこのスカラー波動方程式の解であったのだから、従って、この構成法により、 $\mathbf{e}_r u(r) = r\mathbf{e}_r = \mathbf{r}$ とし、

$$\mathbf{M} = \nabla \times r\psi = \mathbf{L} \times \mathbf{r} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N} \quad (45)$$

が、ベクトル波動方程式の解であることが示された。このとき、

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi \quad (46)$$

である。 $k\mathbf{N} = \nabla \times \mathbf{M}$ (13) により、

$$\mathbf{N} = \frac{n(n+1)}{kr} \psi \mathbf{e}_r + \frac{1}{kr} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r \partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{kr \sin \theta} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r \partial \phi} e_\phi \quad (47)$$

を得る。ただし、第一項の計算には、 ψ が Eq. (23) および Eq. (12) の解であることを用いた。 $\psi = fe^{-i\omega t}$ (22) の一般項 $f_{\phi mn}$ は Eq. (36) のように求まっているので、上の微分を評価すれば、 $M = me^{-i\omega t}$ 、 $N = ne^{-i\omega t}$ の f の各項に対応する一般項 m 、 n はそれぞれ、以下のように求まる。

$$\begin{aligned} m_{\phi mn} &= \mp \frac{m}{\sin \theta} z_n(kr) P_n^m(\cos \theta)_{\cos}^{\sin} m\phi e_\theta \\ &\quad - z_n(kr) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta)_{\sin}^{\cos} m\phi e_\phi \quad (48) \\ n_{\phi mn} &= \frac{n(n+1)}{kr} z_n(kr) P_n^m(\cos \theta)_{\sin}^{\cos} m\phi e_r \\ &\quad + \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [rz_n(kr)] \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta)_{\sin}^{\cos} m\phi e_\theta \\ &\quad \mp \frac{m}{kr \sin \theta} \frac{d}{dr} [rz_n(kr)] P_n^m(\cos \theta)_{\cos}^{\sin} m\phi e_\phi \quad (49) \end{aligned}$$

6. 球ベッセル関数のいくつかの性質

上のようにして、一般解は球ベッセル関数 $z_n(\rho)$ を含むが、この後、具体的な問題に対応して、4節で示した Eqs. (32~35) の4種類の中から、適切な性質を持つものを選ぶ必要がある。そこで、以下では球ベッセル関数のいくつかの性質について少し触れておくことにする。

まず、第1種、第2種の球ベッセル関数は、以下のように幕級数展開できる。

$$j_n(z) = (2z)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m! (2n+2m+1)!} z^{2m} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} n_n(z) &= -\frac{1}{2^n z^{n+1}} \left[\sum_{m=0}^n \frac{(2n-2m)!}{m! (n-m)!} z^{2m} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^m (m-n)!}{m! (2m-2n)!} z^{2m} \right] \quad (51) \end{aligned}$$

ここで、 $z \rightarrow 0$ のときの近似を調べておく。 $z \rightarrow 0$ では幕級数の高次の項は急激に小さくなって行くので、初項を取って調べれば十分で、このとき、

$$j_n(z) \sim z^n / (2n+1)!! \quad (52)$$

$$n_n(z) \sim -(2n+1)!! / z^{n+1} \quad (53)$$

である。球ヘンケル関数は、 $h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + in_n(z)$ 、

$h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - in_n(z)$ で定義されているので、この4種類の中で、 $z \rightarrow 0$ で無限大に発散してしまわないのは、第1種球ベッセル関数だけであることが分かる。つまり、球の内部の電場を表現するためには、第1種球ベッセル関数しか使えない。

次に、第1種、第2種の球ヘンケル関数であるが、次のように表せることが知られている。

$$h_n^{(1)}(z) = (-i)^{n+1} \frac{e^{iz}}{z} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r! (n-r)!} \left(\frac{i}{2z} \right)^r \quad (54)$$

$$h_n^{(2)}(z) = i^{n+1} \frac{e^{-iz}}{z} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r! (n-r)!} \left(\frac{-i}{2z} \right)^r \quad (55)$$

ここでは、 $z \rightarrow \infty$ を調べる。ここでも上と同様にし、幕の初項を取って調べれば十分で、その結果、

$$h_n^{(1)}(z) \sim (-i)^{n+1} e^{iz} / z \quad (56)$$

$$h_n^{(2)}(z) \sim i^{n+1} e^{-iz} / z \quad (57)$$

という形をしていることが分かる。今、振動の時間項が $e^{-i\omega t}$ の形をしていたことを思い出す。そうすると、動径の関数であるこれらは、 $h_n^{(1)}$ が中心 ($z=0$) から外へ向かって進行して行く波を、 $h_n^{(2)}$ が逆に、外から中心へ向かって進行する波を表していることが分かる。従って、粒子からの散乱光が粒子の中心から外へ向かって進む波であることを考えれば、これを表現するために、 $h_n^{(1)}$ を用いることが適切であることが分かる。

7. 直交性

関数 f と g をかけて、ある区間で定積分したものを関数の内積という。また、 $\int_a^b f \cdot g \cdot h dx = 0$ のように、 f と g とは別の関数 h をかけて計算する場合、 h を重みとした内積といい、この積分の結果が0になるとき、この f と g は h を重みとして直交するという。関数の直交性は、次節で見えるような関数展開の計算で係数決定をするときに非常に便利で重要な性質である。ここでは、後の計算で用いる $m_{\phi mn}$ 、 $n_{\phi mn}$ の組み合わせについて、 $\sin \theta d\theta d\phi$ を重みとしてかけて積分したときの直交性について、いくつか確認しておく*8。まず、そもそも、 $\sin m\phi$ と $\cos m'\phi$ は m と m' が整数で $m \neq m'$ のときには区間 $(0, 2\pi)$ で全ての組み合わせで以下のように直交している。

*8 $\phi: 0 \rightarrow 2\pi$, $\theta: 0 \rightarrow \pi$ で積分する。 $\sin \theta$ をかけるのは、変数変換 $\eta = \cos \theta$ によって、

$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 P_n^m(\eta) d\eta$ とするため。

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos m'\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin m'\phi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos m'\phi d\phi = 0\end{aligned}\quad (58)$$

従って、 $\mathbf{m}_{\mathbf{e}_{mn}}$ と $\mathbf{n}_{\mathbf{e}_{m'n'}}$ ($m \neq m'$) のすべての組み合わせは直交している。 $m=m'$ の場合を含めても、 $\sin m\phi$ と $\cos m\phi$ は直交している。すなわち、

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos m\phi d\phi = 0 \quad (59)$$

であるから、 $\mathbf{m}_{\mathbf{e}_{mn}}$ 、 $\mathbf{n}_{\mathbf{e}_{mn}}$ の以下の組み合わせはすべて直交している。

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{\mathbf{e}_{mn}} \cdot \mathbf{m}_{\mathbf{e}_{m'n'}} \sin \theta d\theta d\phi \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{n}_{\mathbf{e}_{mn}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{e}_{m'n'}} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \\ \text{(for all } m, m', n, n') \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{\mathbf{e}_{mn}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{e}_{m'n'}} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \\ (m \neq m')\end{aligned}\quad (60)$$

$\mathbf{m}_{\mathbf{e}_{mn}}$ と $\mathbf{m}_{\mathbf{e}_{m'n'}}$ の組み合わせの場合は、 ϕ についての積分が 0 にならないので、その次の θ についての積分を評価する必要があり、計算はもう少し複雑になる。

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi d\phi = \pi, \quad (61)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{\mathbf{e}_{mn}} \cdot \mathbf{m}_{\mathbf{e}_{m'n'}} \sin \theta d\theta d\phi \\ = \pi \int_0^\pi z_n z_{n'} \left(\frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + m^2 \frac{P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta\end{aligned}\quad (62)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + m^2 \frac{P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta \\ = \begin{cases} 0 & (n \neq n'), \\ \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & (n = n'), \end{cases}\end{aligned}\quad (63)$$

の関係がある。従って、 $\mathbf{m}_{\mathbf{e}_{mn}}$ と $\mathbf{m}_{\mathbf{e}_{m'n'}}$ は $n \neq n'$ のとき

直交している。同様に、 $\mathbf{n}_{\mathbf{e}_{mn}}$ と $\mathbf{n}_{\mathbf{e}_{m'n'}}$ の組み合わせの場合も、 $n \neq n'$ のとき直交する。

8. 平面波の球座標系への展開

座標の中心においた粒子に、平面波が入射しているものとする。この平面波は、 z 方向に進行し、電場の変位の方向が x 方向であるとする。このような電磁波の電場成分は、 $E_x = E_0 e^{ikz - i\omega t}$ と書ける。今、計算を入射光の電場の振幅で規格化しておくことにして、また、これまで見てきたように、時間の項を予め落としておくと、入射光の電場ベクトルは、

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x e^{ikz} = \mathbf{e}_x e^{ikr \cos \theta} \quad (64)$$

と書ける。ここに、

$$\mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \quad (65)$$

である。この平面波を、球座標系の電場の形に展開する。つまり、

$$\mathbf{e}_x e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} + b_n \mathbf{n}_{\text{eln}}^{(1)}) \quad (66)$$

の右辺の係数を決定したい。ただし、入射波は粒子の中心で発散することはないので、動径の関数としては、第 1 種のベッセル関数しか採用できない。これを上添字 (1) で表した。また、Eq. (65) の形と見比べることによって、計算するまでもなく、 ϕ の関数の項としては、 $\cos \phi \mathbf{e}_\theta$ と $\sin \phi \mathbf{e}_\phi$ を含む項しか選べないことは明らかである。つまり、 $m=1$ で $\mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)}$ と $\mathbf{n}_{\text{eln}}^{(1)}$ の項だけでもって、この平面波は Eq. (66) の形に展開される。この両辺に、 $\mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} \sin \theta d\theta d\phi$ をかけて、積分する。右辺では $\mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)}$ の直交性により、 $\mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} \cdot \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)}$ の項以外には、総和の中身を展開した成分の積分はすべて 0 になる。つまり、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi \\ = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a_n \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} \cdot \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} \sin \theta d\theta d\phi\end{aligned}\quad (67)$$

まず、左辺を評価しよう。

(左辺)

$$\begin{aligned}= \pi j_n(rk) \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \left(\cos \theta P_n^1(\cos \theta) \right. \\ \left. + \sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) d\theta\end{aligned}$$

$$= \pi j_n(rk) \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P_n^1(\cos \theta)) e^{ikr \cos \theta} d\theta \quad (68)$$

ここで、次の公式により、

$$P_n^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m} \quad (69)$$

以下を得る。

$$\begin{aligned} P_n^1(\cos \theta) &= \sin \theta \frac{dP_n(\eta)}{d\eta} \\ &= - \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (70)$$

ここで、 P_n がルジャンドル陪微分方程式 Eq. (24) の解であったことにより、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) \\ = -n(n+1)P_n(\cos \theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (71)$$

で置き換えられるので、Eq. (68) は、

(左辺)

$$= \pi j_n(rk) n(n+1) \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (72)$$

となる。この積分は、ゲーゲンバウア (Gegenbauer) の積分表示と呼ばれ、

$$j_n(rk) = \frac{(-i)^n}{2} \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (73)$$

を与える。一方、右辺は、Eqs. (62), (63) により、

$$(\text{右辺}) = a_n \pi (j_n(rk))^2 \frac{2n^2(n+1)^2}{(2n+1)} \quad (74)$$

となるので、以上により a_n は、

$$a_n = i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \quad (75)$$

と求まった。同様にして $\mathbf{n}_{\text{eln}}^{(1)}$ の項も評価すると、

$$b_n = -i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (76)$$

を得る。以上により、入射波である平面波の電場ベク

トル Eq. (64) は、球座標系で、以下のように展開された。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}_x e^{ikr \cos \theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} - i\mathbf{n}_{\text{eln}}^{(1)}) \end{aligned} \quad (77)$$

これに対応する磁場は、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_0 \\ &= -\frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} + i\mathbf{n}_{\text{eln}}^{(1)}) \end{aligned} \quad (78)$$

9. 境界条件

以上で、入射光である平面波の電場 $\mathbf{E}_0$ と磁場 $\mathbf{H}_0$ の、球座標上での表現が得られた。次に、この光が半径 a の粒子に照射されたとき、粒子からの散乱光の電場 $\mathbf{E}_s$ と磁場 $\mathbf{H}_s$ 、ならびに、粒子内部の電場 $\mathbf{E}_p$ と磁場 $\mathbf{H}_p$ を、以下のように表すことにする。

$$\mathbf{E}_s = - \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(3)} - i b_n \mathbf{n}_{\text{eln}}^{(3)}) \quad (79)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{ik}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(3)} + i a_n \mathbf{n}_{\text{eln}}^{(3)}) \quad (80)$$

$$\mathbf{E}_p = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} - i d_n \mathbf{n}_{\text{eln}}^{(1)}) \quad (81)$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{-ik_p}{\omega\mu_p} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (d_n \mathbf{m}_{\text{oln}}^{(1)} + i c_n \mathbf{n}_{\text{eln}}^{(1)}) \quad (82)$$

ここで、6節で見た球ベッセル関数の性質により、粒子から遠方へ向かって進行する散乱波の球ベッセル関数項としては、第1種球ハンケル関数 $h_n^{(1)}$ を用いなくてはならない。球内部では、電場が有限でなくてはならないので、第1種球ベッセル関数 j_n を用いる。このことを、上添字 (3) と (1) 表した。また、粒子内部の物性を添字 p で表し、媒質の物性は添字なしで表している。

以上の準備により、今、粒子の外部には $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$ なる電場が、粒子内部には、 $\mathbf{E}_p$ なる電場がある (磁場についても同様)。粒子表面の境界では、電場は外と内とで「繋がって」いなくてはならない。このとき、満たされるべき境界条件は、以下である。

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s)_\theta &= (\mathbf{E}_p)_\theta, & (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s)_\phi &= (\mathbf{E}_p)_\phi, \\ (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s)_\theta &= (\mathbf{H}_p)_\theta, & (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s)_\phi &= (\mathbf{H}_p)_\phi \end{aligned}$$

$$(\text{at } r=a, \text{ for all } \theta, \phi) \quad (83)$$

実際には、動径方向の境界条件もあるが、以下の計算ではこれだけあれば十分である（未知数 $4n$ 個に対して条件式が $4n$ 個あるから）。つまり、これを満足するように連立方程式を解いて、Eq. (79) の係数 a_n と b_n を次に求める。

10. 散乱波の解

粒径パラメータ α と、比屈折率 m を以下のように定義する。

$$\alpha = ka, \quad m = \frac{k_p}{k} = \frac{n_p}{n} \quad (84)$$

また、以下の計算では、媒質と粒子の透磁率は等しい ($\mu = \mu_p$) とする^{*9}。更に、この後の表記を単純にするために、リッカチ-ベッセル (Riccati-Bessel) 関数を以下のように導入した上で、

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho), \quad \xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho) \quad (85)$$

以下の記法を定義しておく。

$$\psi'_n(\alpha) = \frac{d}{d\rho} \psi_n(\rho) \Big|_{\rho=\alpha}, \quad \xi'_n(\alpha) = \frac{d}{d\rho} \xi_n(\rho) \Big|_{\rho=\alpha} \quad (86)$$

このとき、前節で議論した境界条件に従って、以下の連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi_n(\alpha) - a_n \xi_n(\alpha) &= \frac{c_n}{m} \psi_n(m\alpha), \\ \psi'_n(\alpha) - b_n \xi'_n(\alpha) &= \frac{d_n}{m} \psi'_n(m\alpha), \\ \psi_n(\alpha) - b_n \xi_n(\alpha) &= d_n \psi_n(m\alpha), \\ \psi'_n(\alpha) - a_n \xi'_n(\alpha) &= c_n \psi'_n(m\alpha) \end{aligned} \quad (87)$$

これを解いて、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\psi_n(m\alpha) \psi'_n(\alpha) - m \psi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha)}{\psi_n(m\alpha) \xi'_n(\alpha) - m \xi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha)}, \\ b_n &= \frac{m \psi_n(m\alpha) \psi'_n(\alpha) - \psi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha)}{m \psi_n(m\alpha) \xi'_n(\alpha) - \xi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha)} \end{aligned} \quad (88)$$

^{*9} $k = 2\pi/\lambda$ なので、 $\alpha = 2\pi a/\lambda$ であり、従って、粒子径を媒質中の光の波長で規格化した量になっている。なお、普通は媒質は光を吸収しないことを前提に議論するので、媒質の k は実数と考えてよい点に留意。比屈折率 m は、 $\mu = \mu_p$ としたので、媒質と粒子の相対誘電率の平方根に対応している。なお、光のような振動数の高い領域では、物質の磁化は無視でき、一般に $\mu = \mu_p = \mu_0$ としてかまわない。

を得る。すなわち、Eq. (79) の係数がこのように定まり、これにより、散乱波が求まった。

「散乱面」は、入射光の進行方向ベクトル $\mathbf{e}_z$ と、散乱波の進行方向ベクトル $\mathbf{e}_r$ の張る平面として定義される。散乱波の偏光は、この散乱面内の成分を水平偏光、散乱面に垂直な成分を垂直偏光と呼ぶ。従って、球座標系の定義から明らかに、電場ベクトルの方向が $\mathbf{e}_\theta$ の成分が水平偏光、 $\mathbf{e}_\phi$ の成分が垂直偏光に対応している。そこで、上で求めた散乱波の成分 $\mathbf{m}_{oln}^{(3)}$ と $\mathbf{n}_{eln}^{(3)}$ からそれぞれの偏光成分を取り出して整理しておく必要がある。なお、 $\mathbf{n}_{eln}^{(3)}$ は、 $\mathbf{e}_r$ 方向の成分を持っているが、これは、動径 r の関数の項が、 $h_n^{(1)}(kr)/kr$ に従って距離と共に（他と比べて）すみやかに減衰するので、粒子から十分離れた地点で散乱光を観測する場合には ($kr \gg 1$)、この成分は無視してかまわない。また、 $kr \gg 1$ のとき、 $h_n^{(1)}(z) \sim (-i)^{n+1} e^{iz}/z$ (56) であった。従って、観測点が粒子から十分離れているとき、

$$\frac{d}{dr} (r h_n^{(1)}(kr)) \sim \frac{d}{dr} \left((-i)^{n+1} \frac{r e^{ikr}}{k} \right) = (-i)^{n+1} i e^{ikr} \quad (89)$$

とできる。従って、ここで更にまた新しく記号を作つて、

$$\pi_n = \frac{P_n^1}{\sin \theta}, \quad \tau_n = \frac{dP_n^1}{d\theta} \quad (90)$$

と書くことにすると、 $\mathbf{m}_{oln}^{(3)}$ と $\mathbf{n}_{eln}^{(3)}$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{oln}^{(3)} &= (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \pi_n (\cos \theta) \cos \phi \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \tau_n (\cos \theta) \sin \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{n}_{eln}^{(3)} &= (-i)^{n+1} \frac{i e^{ikr}}{kr} \tau_n (\cos \theta) \cos \phi \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - (-i)^{n+1} \frac{i e^{ikr}}{kr} \pi_n (\cos \theta) \sin \phi \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (91) \quad (92)$$

と書き表すことができ、従って今、垂直偏光を $S_\perp$ 、水平偏光を $S_\parallel$ と書くことにすると、Eq. (79) によって、これらは以下のように求められる。なお、光強度を計算するときは、これらの絶対値の二乗を取る。

$$\begin{aligned} S_\perp &= E_{S\phi} \\ &\sim -i \frac{e^{ikr}}{kr} \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n (\cos \theta)) \end{aligned}$$

$$+b_n\pi_n(\cos\theta)) \quad (93)$$

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &= E_{s\theta} \\ &\sim +i \frac{e^{ikr}}{kr} \cos\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n\pi_n(\cos\theta) \\ &+ b_n\tau_n(\cos\theta)) \end{aligned} \quad (94)$$

11. レイリー (Rayleigh) 散乱

粒径パラメータが $\alpha = 2\pi a / \lambda \ll 1$, すなわち, 光の波長に比べて粒子が十分小さいときは, Eq. (88) の a_n, b_n を α で冪級数展開して, その最初の方の項だけを取って計算すれば良い。最も粗い近似では, 展開の初項だけ取り, これを用いて更に, Eqs. (93), (94) の初項だけ計算する。以下, 結論だけ書くと,

$$\begin{aligned} \psi_n(\rho) &\approx \rho^2/3, \quad \psi'_n(\rho) \approx 2\rho/3, \\ \xi_n(\rho) &\approx -i/\rho, \quad \xi'_n(\rho) \approx i/\rho^2 \end{aligned} \quad (95)$$

として,

$$a_1 \approx 0, \quad b_1 \approx -i \frac{2}{3} \alpha^3 \frac{m^2-1}{m^2+2} \quad (96)$$

を得る。また, $P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta$ であることにより,

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{P_1^1(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1, \\ \tau_1 &= \frac{dP_1^1(\cos\theta)}{d\theta} = \cos\theta \end{aligned} \quad (97)$$

であるから, 散乱光強度は,

$$\left\{ \begin{array}{l} |S_{\perp}|^2 \\ |S_{\parallel}|^2 \end{array} \right\} = \frac{k^4 a^6}{r^2} \left(\frac{m^2-1}{m^2+2} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin\phi \\ \cos\phi \cos\theta \end{array} \right\} \quad (98)$$

で与えられる。このような散乱をレイリー散乱と呼ぶ。

References

- 1) Moriguchi, S. et al.: "Sugaku Koushiki III", Iwanami-shoten (1960)
- 2) Stratton, J. A.: "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill (1941)
- 3) Born, M. and E. Wolf: "Principles of Optics", Pergamon Press (1974)
- 4) van de Hulst, H. C.: "Light scattering by small particles", Dover (1981)
- 5) Bohren, C. F. and D. R. Huffman: "Absorption and scattering of light by small particles", Wiley-Interscience (1983)
- 6) Soc. Powder Technol. Japan ed.: "Funtai Kougaku Sousho" vol. 1, Nikkan Kogyo (2005)