楕円軌道上において群衛星の相対位置関係を維持する軌道設計法^{*1}

The Orbital Synthesis for Maintaining the Formation Geometry in Elliptic Orbits

夏 目 耕 一^{*2}・佐 伯 孝 尚^{*2}・川 口 淳 一 郎^{*3}
Koichi NATSUME, Takanao SAIKI and Jun'ichiro KAWAGUCHI

Key Words: Formation Flight, Elliptic Orbit, Geometry Keeping

Abstract: For formation flight missions, it is often required for the satellite members to maintain a favorable relative position. There have been many researches about the navigation, guidance and control on the formation flight. But many of those researches are on the active control, that is, the control with delta-V mostly in circular orbits. Although the passive geometry maintenance without fuel should be emphasized for the mission life, there is little such research about it. Furthermore, the most researches for formation flying have dealt with the circular orbit using the Hill's equation. This paper discusses the design method for maintaining the formation geometry without performing orbit control on the elliptic orbits.

記 号 の 説 明

軌道要素

a	:	長半径
e	:	離心率
i	:	軌道傾斜角
Ω	:	昇交点経度
ω	:	近地点引数
f	:	真近点離角
M	:	平均近点離角
u	:	離心近点離角
t_0	:	近点通過時刻
t	:	時刻
n	:	平均運動
p	:	半直弦

スカラー, ベクトル

μ	:	地心重力定数
R_e	:	地球半径 ($\approx 6378[\text{km}]$)
$\mathbf{r}$	:	相対位置ベクトル

1. は じ め に

多くのフォーメーションフライトミッションでは衛星群は適切な相対位置関係を維持することが求められる。そのため、現在衛星フォーメーションフライトに関する相対航法、誘導制御に関する研究が盛んに行われている。しかしながら、それらの研究の多くは、複数衛星をある幾何的な配置に誘導、維持するための燃料消費を前提とした積極的

な制御に関する研究である。本来は燃料消費を抑制しミッション寿命の長期化を図るという意味でも、制御をすることなく衛星間の相対位置を受動的に、または自動的に維持したいという要求があるのだが、そのような研究はかなり稀である。また、過去のフォーメーションフライト関連の論文は慣性系での運動を扱ったものや、軌道運動を考慮したとしても円軌道周りの線形化された簡単な Hill の方程式を扱ったものがほとんどである。しかし、実際の衛星ミッションは円軌道のみとは限らず、むしろ楕円軌道が必要とされるものも多い。そこで本研究は、楕円軌道上で軌道制御を積極的に行うことなく衛星群の相対位置関係を維持する軌道の設計法について扱う。具体的には

1) 衛星間距離を一定にする軌道の設計
2) 相似な 2 次元幾何形状を維持する軌道の設計
を行った。軌道設計の際の解を解析的に得ることができ、このことは本研究の一つの特徴となっている。楕円上フォーメーションフライトでは一般に衛星間の相対位置の変化が大きく、直感的には相対位置関係の維持は困難であると考えられるが、軌道設計の結果は意外にも相対位置関係をよく保つものであり有意であることが分かった。

2. 相対位置ベクトル表現

2.1 基準衛星近傍の相対運動の線形近似式¹⁾ 長半径 a 、離心率 e の基準衛星を考える。地球中心を原点として、基準衛星の動径方向を X_r 軸、 X_r 軸と直交し基準軌道の進行方向が正となるように軌道面内に Y_r 軸、軌道面外方向に右手系を構成するように Z_r 軸をとった回転座標系を定義すると、基準衛星の位置ベクトル $\mathbf{r}_{ref}$ は

^{*1} © 2004 日本航空宇宙学会

平成 15 年 7 月 14 日原稿受理

^{*2} 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

^{*3} 宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究本部

$$\mathbf{r}_{ref} = (r_{ref}, 0, 0)^T \quad (1)$$

$$r_{ref} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (2)$$

と表される。

今、基準衛星が $(a, e, i = 0, \Omega = 0, \omega = 0, t_0)$ の軌道上にあるとき、この軌道面を基準面として

$$(a', e', i', \Omega', \omega', t'_0)$$

の軌道要素を持つ衛星の運動を考える。昇交点経度は基準衛星の近点方向を基準として測る。衛星が基準衛星の近傍に存在するためには、

- 1) 軌道形状がほぼ同じであること
 - 2) 軌道上での位置がほぼ同じであること
- が必要である。基準軌道が楕円軌道である場合にはこれらの条件は、

$$\begin{aligned} |\delta a| << 1, |\delta e| << 1, |\delta i| << 1, \\ |\delta \omega| << 1, |\delta t_0| << 1 \end{aligned} \quad (3)$$

であるとして、

$$a' = a + \delta a, e' = e + \delta e, i' = \delta i \quad (4)$$

$$\Omega' + \omega' = 2\pi \times k + \delta \omega \quad (k: \text{整数}, \delta \omega << 1) \quad (5)$$

および、

$$t'_0 = t_0 + \delta t_0 \quad (6)$$

と書くことができる。

基準軌道が円軌道である場合にも、軌道形状がほぼ等しい条件は

$$a' = a + \delta a, e' = e + \delta e, i' = \delta i \quad (7)$$

となる。基準軌道が円軌道である場合には、基準軌道に近地点という概念がないため、軌道上での位置がほぼ同じであるという条件に関しては工夫が必要となる。本稿では、基準衛星の近地点 (存在しないが) を春分点方向と仮定し、真近点離角 f の基準も春分点方向とする。このとき、衛星の真近点離角 f' の基準は衛星の近地点であるから、軌道上での両者の位置がほぼ同じである条件は

$$|f' - (f - (\Omega' + \omega'))| << 1 \quad (8)$$

とすることができる。よって、両者の間の軌道上での微小な位相差を

$$n\delta t_0 = f' - (f - (\Omega' + \omega')), |\delta t_0| << 1 \quad (9)$$

で表すことにする。 n は基準衛星の平均運動である。

改めて $\Omega' = \Omega, \omega' = \omega$ とおくと、前述の回転座標系における衛星の位置ベクトル $\mathbf{r}_{s/c}$ は

$$\mathbf{r}_{s/c} = \mathbf{R}_z(-f)\mathbf{R}_z(\Omega)\mathbf{R}_x(\delta i)\mathbf{R}_z(\omega + f') \begin{pmatrix} r' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる。ここで $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_z$ はそれぞれ x 軸, z 軸周りの回転変換を表す。 r', f' は衛星の動径および真近点離角である。基準軌道が円軌道の場合には、前述のように、基準軌道と衛星の真近点離角の基準が異なるため、

$$\Omega + \omega = \varpi \quad (11)$$

として、

$$r' = a + \left. \frac{\partial r_{ref}}{\partial a} \right|_{f=\varpi} \delta a + \left. \frac{\partial r_{ref}}{\partial e} \right|_{f=\varpi} \delta e \quad (12)$$

$$f' = f - \varpi + \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{f=\varpi} \delta a + \left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_{f=\varpi} \delta e + n\delta t_0 \quad (13)$$

と表すことができる。また、基準軌道が楕円軌道である場合には

$$\begin{aligned} r' = r_{ref} + \left. \frac{\partial r_{ref}}{\partial a} \right|_f \delta a + \left. \frac{\partial r_{ref}}{\partial e} \right|_f \delta e \\ + \frac{1}{n} \left. \frac{\partial r_{ref}}{\partial t_0} \right|_f n\delta t_0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$f' = f + \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_f \delta a + \left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_f \delta e + \frac{1}{n} \left. \frac{\partial f}{\partial t_0} \right|_f n\delta t_0 \quad (15)$$

とできる。式 (12)~式 (15) の各係数は以下のようにして求められる。

基礎式として

$$n(t - t_0) = E - e \sin E, \quad n = \sqrt{\mu/a^3} \quad (16)$$

$$r_{ref} = a(1 - e \cos E) \quad (17)$$

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \quad (18)$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin f}{1 + e \cos f} \quad (19)$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (20)$$

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \quad (21)$$

の関係を用いる。式 (16) の両辺を a, e, t_0 で偏微分し、式 (16)~式 (21) の関係式を用いて整理することで以下の式を得る。

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{3}{2} \frac{n(t - t_0)}{r_{ref}} \quad (22)$$

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \quad (23)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_0} = -\frac{n(1 + e \cos f)}{1 - e^2} \quad (24)$$

式 (17) の両辺を a, e, t_0 で偏微分し、式 (22)~式 (24) を代入することで、

$$\frac{\partial r_{ref}}{\partial a} = \frac{r_{ref}}{a} - \frac{3}{2} \frac{n(t-t_0)e \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial r_{ref}}{\partial e} = -a \cos f \quad (26)$$

$$\frac{\partial r_{ref}}{\partial t_0} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f \quad (27)$$

を得る．同様にして，式 (21) の両辺を a , e , t_0 で偏微分し，式 (22)～式 (24) を代入することで，

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{3}{2} \frac{n(t-t_0)a\sqrt{1-e^2}}{r_{ref}^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{(2+e \cos f) \sin f}{1-e^2} \quad (29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = -\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1+e \cos f)^2 \quad (30)$$

を得ることができる．

式 (25)～式 (30) を式 (12)～式 (15) に代入し r' , f' を得た後，式 (10) に代入することで衛星の位置ベクトルを得ることができ，更に

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{s/c} - \mathbf{r}_{ref} \quad (31)$$

から回転系における衛星の相対位置ベクトルを求めることができる．時刻 t のときの各要素を計算すると，基準軌道が円軌道の場合には

$$\begin{aligned} x &= -a\delta e \cos(f - \varpi) + \delta a \\ y &= 2a\delta e \sin(f - \varpi) + na\delta t_0 - \frac{3}{2}n(t-t_0)\delta a \\ z &= a\delta i \sin(f - \Omega) \end{aligned} \quad (32)$$

であり，基準軌道が楕円軌道の場合には

$$\begin{aligned} x &= -a\delta e \cos f + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \delta t_0 e \sin f \\ &\quad + \left(\frac{r_{ref}}{a} - \frac{3}{2} \frac{n(t-t_0)e \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \right) \delta a \\ y &= r_{ref}(2+e \cos f) \sin f \frac{\delta e}{1-e^2} + r_{ref} \delta \omega \\ &\quad + r_{ref} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0 (1+e \cos f)^2 \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{n(t-t_0)a\sqrt{1-e^2}}{r_{ref}} \delta a \\ z &= r_{ref} \delta i \sin(f - \Omega) \end{aligned} \quad (33)$$

となり，基準衛星の近傍にある衛星の相対位置をケプラー軌道要素の差を用いて表すことができる．式 (32)，式 (33) を見ると，相対位置ベクトルが真近点離角の関数（三角関数）となっていることが分かる．

2.2 相対位置ベクトルとその内積（円軌道） 基準衛星が円軌道の場合を考えると．相対運動の式である式 (32) から分かるように δa の係数は時間に比例して増大する項を含んでおり， δa の存在はフォーメーションの崩壊につな

がるため

$$\delta a = 0 \quad (34)$$

でなければならない．今，式 (32) において

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta e \cos \varpi, \quad \beta = \delta e \sin \varpi, \quad \gamma = n\delta t_0 \\ \delta &= \delta i \cos \Omega, \quad \varepsilon = \delta i \sin \Omega \end{aligned} \quad (35)$$

となるように変数を変換すると相対位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = a \begin{pmatrix} -\alpha \cos f - \beta \sin f \\ 2\alpha \sin f - 2\beta \cos f + \gamma \\ \delta \sin f - \varepsilon \cos f \end{pmatrix} \quad (36)$$

とできる．これから相対位置ベクトルの内積を計算すると

$$\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{a^2} = p_0^{ij} + \sum_{k=1}^2 \left[p_k^{ij} \cos kf + q_k^{ij} \sin kf \right] \quad (37)$$

を得る．ここで， p_k^{ij} , q_k^{ij} は $\boldsymbol{\chi} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ の関数であり，

$$\begin{aligned} p_0^{ij} &= \frac{5}{2}\alpha_i\alpha_j + \frac{5}{2}\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j + \frac{1}{2}\delta_i\delta_j + \frac{1}{2}\varepsilon_i\varepsilon_j \\ p_1^{ij} &= -2(\beta_i\gamma_j + \beta_j\gamma_i) \\ p_2^{ij} &= -\frac{3}{2}\alpha_i\alpha_j + \frac{3}{2}\beta_i\beta_j - \frac{1}{2}\delta_i\delta_j + \frac{1}{2}\varepsilon_i\varepsilon_j \\ q_1^{ij} &= 2(\alpha_i\gamma_j + \alpha_j\gamma_i) \\ q_2^{ij} &= -\frac{3}{2}\alpha_i\beta_j - \frac{3}{2}\alpha_j\beta_i - \frac{1}{2}\delta_i\varepsilon_j - \frac{1}{2}\delta_j\varepsilon_i \end{aligned} \quad (38)$$

である． $\boldsymbol{\chi}$ は 6 自由度から $\delta a = 0$ の条件を除く 5 自由度で構成されている．式 (37) は f の最大 2 倍の周波数までの 5 項で構成されていることに注意されたい．

2.3 相対位置ベクトルとその内積（楕円軌道） 基準軌道が楕円軌道である場合には，式 (33) において，

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\delta e}{1-e^2}, \quad \beta = -\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \quad \gamma = \delta \omega \\ \delta &= \delta i \cos \Omega, \quad \varepsilon = \delta i \sin \Omega \end{aligned} \quad (39)$$

のような変数変換を行うと，相対位置ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r_{ref} \\ &\times \begin{pmatrix} -\alpha(1+e \cos f) \cos f - e\beta(1+e \cos f) \sin f \\ \alpha(2+e \cos f) \sin f - \beta(1+e \cos f)^2 + \gamma \\ \delta \sin f - \varepsilon \cos f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

となる．内積を計算すると

$$\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_{ref}^2} = p_0^{ij} + \sum_{k=1}^3 \left[p_k^{ij} \cos kf + q_k^{ij} \sin kf \right] \quad (41)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
p_0^{ij} &= \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5}{2} \right) \alpha_i \alpha_j + \left(\frac{e^4}{2} + \frac{7e^2}{2} + 1 \right) \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j \\
&\quad - \left(\frac{e^2}{2} + 1 \right) (\beta_i \gamma_j + \beta_j \gamma_i) + \frac{1}{2} \delta_i \delta_j + \frac{1}{2} \varepsilon_i \varepsilon_j \\
p_1^{ij} &= \frac{5}{2} e \alpha_i \alpha_j + \left(\frac{7e^3}{2} + 4e \right) \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j \\
&\quad - 2e (\beta_i \gamma_j + \beta_j \gamma_i) \\
p_2^{ij} &= \left(\frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \right) \alpha_i \alpha_j + \left(\frac{e^4}{2} + \frac{5e^2}{2} \right) \beta_i \beta_j \\
&\quad - \frac{1}{2} e^2 (\beta_i \gamma_j + \beta_j \gamma_i) - \frac{1}{2} \delta_i \delta_j + \frac{1}{2} \varepsilon_i \varepsilon_j \\
p_3^{ij} &= -\frac{e}{2} \alpha_i \alpha_j + \frac{e^3}{2} \beta_i \beta_j \\
q_1^{ij} &= -\left(\frac{e^2}{2} + 2 \right) (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) + 2(\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \\
q_2^{ij} &= -2e(\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) + \frac{e}{2} (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\delta_i \varepsilon_j + \delta_j \varepsilon_i) \\
q_3^{ij} &= -\frac{e^2}{2} (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i)
\end{aligned} \tag{42}$$

である。式 (41) を見ると円軌道の場合と異なり、 $\cos$ と $\sin$ の振動項は $k=3$ まで存在し、項の総数が 7 項となっていることが分かる。これが楕円軌道と円軌道の違いである。

3. 内積を利用した軌道設計法

前節で求めた内積を利用した軌道設計を考える。

3.1 衛星間距離を一定に保つ軌道 一般に楕円軌道上では衛星間の相対位置関係は衛星が軌道上を移動するに従って大きく変化するため、直感的には衛星間距離を一定に保つことは難しいと考えられる。しかし、実は式 (41) を用いることによって軌道全周にわたって衛星間の距離をほぼ不変とする軌道を設計することが可能である。以下では、衛星間距離がほぼ一定に保たれる条件を解析的に示すことにする。

衛星間の距離を D に保つことを考える。このとき式 (41) において $i=j$ とし、

$$p_0 + \sum_{k=1}^3 (p_k \cos kf + q_k \sin kf) = \frac{D^2}{r_{ref}^2} \tag{43}$$

を満たせばよいことが分かる。式 (2) を用いると上式の右辺は

$$\begin{aligned}
\frac{D^2}{r_{ref}^2} &= \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \frac{D^2}{p^2} + \frac{2eD^2}{p^2} \cos f \\
&\quad + \frac{e^2 D^2}{2p^2} \cos 2f
\end{aligned} \tag{44}$$

と変形できるから、条件は

$$\begin{aligned}
p_0 &= \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \frac{D^2}{p^2}, \quad p_1 = \frac{2eD^2}{p^2}, \quad p_2 = \frac{e^2 D^2}{2p^2} \\
p_3 &= q_1 = q_2 = q_3 = 0
\end{aligned} \tag{45}$$

第1図 衛星間距離

となる。設計すべき軌道パラメータが $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ の 5 つであるのに対し条件式が 7 つであるため一般的には解は存在しない。そこで、高次の振動項は局地的にしか影響を及ぼさないと仮定し、 p_3, q_3 に関する条件式を無視することで以下のような解が解析的に求まる。

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0, \quad \beta = \pm \frac{2D}{p} \frac{1}{\sqrt{7e^2 + 8 \pm 4\sqrt{3e^4 - 9e^2 + 4}}} \\
\gamma^2 &= \left(\frac{3e^4}{4} - \frac{9e^2}{4} + 1 \right) \beta^2, \quad \delta^2 = \left(-\frac{3e^4}{4} + 3e^2 \right) \beta^2 \\
\varepsilon &= 0,
\end{aligned} \tag{46}$$

ただし解は

$$e < \sqrt{\frac{1}{6}(9 + \sqrt{33})} \approx 0.7366 \tag{47}$$

の条件下においてのみ存在する。 $D = 100[\text{km}]$ としたときの相対距離の履歴の例を第1図に示す。具体的な軌道要素は第1表に示している。

第1表 衛星間距離を固定する軌道の軌道要素

	Case 1		Case 2	
	Mother	Daughter	Mother	Daughter
$R_p[\text{km}]$	Re+1000	Re+1000	Re+1000	Re+1000
$R_a[\text{km}]$	Re+5000	Re+5000	Re+20000	Re+20000
$a[\text{km}]$	9378	9378	16878	16878
e	0.2133	0.2133	0.5629	0.5629
$i[\text{rad}]$	0	-0.0021	0	-0.0042
$\Omega[\text{rad}]$	-	0	-	0
$\omega[\text{rad}]$	-	6.2779	-	6.2805
$\delta t_0[\text{sec}]$	-	-7.5153	-	-8.7731

基準軌道の離心率 e が小さいときはほぼ衛星間距離を一定に保つことができるが、離心率が大きくなると高次振動

項の影響が現れてずれが生じる．ただ離心率が非常に大きくならない限り，ずれは十分小さい．

$e \rightarrow 0$ とした場合に，解は基準衛星と同一軌道上で位相のみが異なる軌道へと収束することが分かる．これは式 (37) を用いた場合の条件

$$p_0 + \sum_{k=1}^2 (p_k \cos kf + q_k \sin kf) = \frac{D^2}{r_{ref}^2} \quad (48)$$

の解の一つになっている．

本研究では解を解析的に得ることができたが，他文献で衛星間の距離を不変とする軌道について，これとは別のアプローチで， $e \geq 0.7366$ の場合でも衛星間距離を維持する軌道について紹介されている^{2, 3)}．

3.2 直交性に着目した軌道設計 (円軌道) $\delta a = 0$ のとき，衛星の相対位置ベクトルは基準衛星を中心とし，その周りを周回するように変化する．今，円軌道上を周回する基準衛星とその近傍を運動する 2 つの衛星 (衛星 1 と衛星 2) を考える．このとき，衛星 1 と衛星 2 の基準衛星に対する相対位置ベクトル $\mathbf{r}_1$ ， $\mathbf{r}_2$ が直交を維持し，かつそのノルム r_1 ， r_2 が常に等しいという 2 つの条件

$$\mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_2 \Rightarrow \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0 \quad (49)$$

$$r_1 = r_2 \quad (50)$$

を同時に満たす軌道パラメータを見つけることができれば，その 2 つのベクトルの線形結合により任意の平面幾何形状に対し相似形状を常に維持し続ける軌道パラメータを設計することが可能である．

式 (49) より，

$$p_0^{12} = p_1^{12} = \dots = q_2^{12} = 0 \quad (51)$$

式 (50) より

$$p_0^{11} = p_0^{22}, \quad p_1^{11} = p_1^{22}, \quad \dots, \quad q_2^{11} = q_2^{22} \quad (52)$$

の計 10 個の条件式が発生する．これに対し軌道パラメータは $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の 10 個であるため完全に解くことができ，解は δe_1 と ϖ_1 を自由パラメータとして，

$$\alpha_1 = \delta e_1 \cos \varpi_1, \quad \beta_1 = \delta e_1 \sin \varpi_1, \quad \gamma_1 = 0$$

$$\delta_1 = \mp \sqrt{3} \delta e_1 \sin \varpi_1, \quad \varepsilon_1 = \pm \sqrt{3} \delta e_1 \cos \varpi_1 \quad (53)$$

$$\alpha_2 = -\delta e_1 \sin \varpi_1, \quad \beta_2 = \delta e_1 \cos \varpi_1, \quad \gamma_2 = 0$$

$$\delta_2 = \mp \sqrt{3} \delta e_1 \cos \varpi_1, \quad \varepsilon_2 = \mp \sqrt{3} \delta e_1 \sin \varpi_1 \quad (54)$$

(複合同順) のように得ることができる．これによって衛星 1 と衛星 2 の相対位置ベクトルは回転座標系でそれぞれ

$$\mathbf{r}_1 = a \delta e_1 \begin{pmatrix} -\cos(f - \varpi_1) \\ 2 \sin(f - \varpi_1) \\ \pm \sqrt{3} \cos(f - \varpi_1) \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{r}_2 = a \delta e_1 \begin{pmatrix} -\cos(f - (\varpi_1 + 90^\circ)) \\ 2 \sin(f - (\varpi_1 + 90^\circ)) \\ \pm \sqrt{3} \cos(f - (\varpi_1 + 90^\circ)) \end{pmatrix} \quad (56)$$

第 2 図 相似な幾何形状を維持する軌道 (円軌道周り)

と表すことができる． $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ の外積をとると

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (2a\delta e_1)^2 \begin{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \quad (57)$$

と一定値をとり，衛星が回転座標系の xy 平面を y 軸周りに $\pm 60^\circ$ 回転させてできる平面上 (以後これを運動面と呼ぶ) を運動することが分かる．運動面に投影した衛星 1 の位置ベクトル $\mathbf{r}'_1$ は

$$\mathbf{r}'_1 = 2a\delta e_1 \begin{pmatrix} \cos(-(f - (\varpi_1 - 180^\circ))) \\ \cos(-(f - (\varpi_1 - 180^\circ))) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

となる．また，衛星 2 の位置ベクトルは，式 (58) の ϖ_1 を $\varpi_1 + 90^\circ$ に置き換えたものに相当する．式 (58) を見ると，衛星 1 が運動面上で $\varpi_1 - 180^\circ$ を初期位相として原点を中心に角速度 n (基準軌道の平均運動) で時計回りに円運動を行うことが分かる．衛星 2 についても同様のことが言える．このことから，式 (49) と式 (50) の条件が完全に満たされており，このような軌道を用いることで相似な幾何形状 (この場合完全に合同な幾何形状) を維持することが可能であることが分かる．

回転座標系から見た衛星の運動の様子を第 2 図に示す．先に述べたように， y 軸の周りに 60° 回転させた面上を衛星が円運動している．このような軌道の存在は過去に確認されておりレコード盤軌道という名前で紹介されている⁴⁾．

3.3 直交性に着目した軌道設計 (楕円軌道) 前節では円軌道近傍の相対運動において，幾何形状が維持される軌道配置の設計方法について論じた．本節では前節と同じ方法を用い，楕円軌道近傍の相対運動において，衛星群の配置が相似な幾何形状を維持する軌道パラメータの設計法について論じる．

前節同様に楕円軌道上を周回する基準衛星とその近傍を運動する 2 つの衛星 (衛星 1 と衛星 2) に対し，式 (49) と式 (50) の 2 つの条件を考える．この 2 つの条件は，式 (41) と式 (42) を用いて

$$p_0^{12} = p_1^{12} = \dots = q_3^{12} = 0 \quad (59)$$

$$p_0^{11} = p_0^{22}, \quad p_1^{11} = p_1^{22}, \quad \dots, \quad q_3^{11} = q_3^{22} \quad (60)$$

の計14の式で表される．これに対し，変数は軌道パラメータ χ_1 と χ_2 の10個であるため，条件過多となり一般的に解は求まらない．実際にこの14の条件を満たす解は，衛星1と衛星2の軌道が基準衛星の軌道と一致するもののみであり，14の全ての条件を満たす有意な軌道パラメータは存在しない．そこで条件を少し緩めて

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \approx 0, \quad r_1 \approx r_2 \quad (61)$$

が成り立つことを条件とし，14式の中で幾つかの成り立つべき式を選択し，それを用いて軌道パラメータを決定することとする．まず，最も高次の振動項である p_3 および q_3 に関する条件式の影響は局所的にしか現れないと仮定して無視することとする．また式(61)を満たすベクトルが1つの平面を張ることから，2つの自由パラメータが存在することを考慮し p_0 の2条件式も除くと，残りの計8式の条件を満たす軌道パラメータとして

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\sigma \cos \phi, \quad \beta_1 = \frac{1}{e} \sigma \sin \phi \\ \gamma_1 &= -\frac{1}{e} \left(\frac{e^2}{4} + 1 \right) \sigma \sin \phi \\ \delta_1 &= \pm \sqrt{3 - \frac{e^2}{4}} \sigma \sin \phi \\ \varepsilon_1 &= \mp \sqrt{3 - \frac{e^2}{4}} \sigma \cos \phi \end{aligned} \quad (62)$$

(衛星2の軌道パラメータは上式に関して $\phi \rightarrow \phi + 90^\circ$ としたもの)を得る．ここで σ , ϕ は自由パラメータである． σ は位置ベクトルのノルムに関するスケールファクターであり，後に示すが ϕ は相対位置ベクトルのある平面上での偏角を示している．式(62)のような軌道パラメータをもった衛星の位置ベクトルは

$$\frac{\mathbf{r}_1}{r_{ref}\sigma} = \begin{pmatrix} (1 + e \cos f) \sin(f - \phi) \\ (2 + e \cos f) \cos(f - \phi) + \frac{e}{4} \cos \phi \\ \pm \sqrt{3 - \frac{e^2}{4}} \cos(f - \phi) \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\frac{\mathbf{r}_2}{r_{ref}\sigma} = \begin{pmatrix} (1 + e \cos f) \cos(f - \phi) \\ -(2 + e \cos f) \sin(f - \phi) - \frac{e}{4} \sin \phi \\ \pm \sqrt{3 - \frac{e^2}{4}} \sin(f - \phi) \end{pmatrix} \quad (64)$$

となる．

第3図と第4図に式(63)と式(64)によって得られた2つの相対位置ベクトルのなす角とそれぞれのノルムの履歴をプロットしたものを示す．条件は

- Case1: $a = 2.5R_e$, $e = 0.2$, $\sigma = 0.002$, $\phi = 0^\circ$
- Case2: $a = 20R_e$, $e = 0.9$, $\sigma = 0.001$, $\phi = 45^\circ$

である．このときの子衛星の軌道要素を第2表に示す．

図を見ると相対位置ベクトルのなす角は 90° を中心に振動するが，離心率が大きくなると 90° からのずれも大きく

第3図 位置ベクトルのなす角とノルム (Case 1)

第4図 位置ベクトルのなす角とノルム (Case 2)

第2表 相似な幾何形状を維持する軌道の軌道要素

	Case 1		Case 2	
	Daughter1	Daughter2	Daughter1	Daughter2
δe	-0.00192	0	-0.000134	0.000134
δi [rad]	0.00346	0.00346	0.00167	0.00167
Ω [rad]	4.712	0	5.498	0.785
$\delta \omega$ [rad]	0	-0.0101	-0.000945	-0.000945
δt_0 [sec]	0	-30.0	-4.695	-4.695

なることが分かる．しかしながら第4図の場合でも遠地点付近で 13° 程度のずれが生じている他は概ね $\pm 8^\circ$ の範囲内に収まっており，式(49)の条件をほぼ満たしていることが分かる．また相対位置ベクトルのノルムも衛星1と衛星2でほぼ等しくなっており，式(50)の条件も満たされていることが分かる．ただし円軌道の場合と異なり，衛星1と衛星2の相対位置ベクトルのノルムはほぼ等しくなるものの，そのノルムが軌道一周にわたって一定値をとるわけではない．即ち円軌道周りのフォーメーションフライトでは，合同な2次元幾何形状を維持できるが，楕円軌道周りの場合には合同ではなく相似な2次元幾何形状の維持になる．

第5図 衛星の運動面

第7図 運動面上の相対運動

 第6図 運動面と xy 平面のなす角

衛星の相対運動についてももう少し詳しく調べるため、式 (63) と式 (64) を用いて $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ の外積を計算すると

$$\frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{(r_{ref}\sigma)^2} = \left(4 + \frac{3}{2}e \cos f\right) \begin{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{3-e^2/4}}{2} \\ 0 \\ \frac{1+e \cos f}{2} \end{pmatrix} \quad (65)$$

を得る。よって衛星1と衛星2が σ , ϕ の値に関わらず回転座標系の xy 平面を y 軸周りに回転させてできる平面上 ($x'y$ 平面, 以下これを運動面と呼ぶ) で運動していることが分かる。ただし、その回転角 ψ は前節のように一定ではなく回転の大きさは近地点で最小値、遠地点で最大値をとり、基準軌道の軌道周期の間に両者の間を1往復する (第5図)。また、回転角の最小値、最大値は離心率 e にのみ依存し、第6図のようになる。最大値は $e=0$ で 60° で e が大きくなるとともに増加し、 $e=1$ で 90° になる。また最小値は 60° から約 40° へと減少していく。離心率0では回転角は一定値 60° をとり、前節の結果と一致する。

次に、運動面上における衛星の位置と σ , ϕ の関係について考える。運動面に投影した衛星1の相対位置ベクトル

$\mathbf{r}'_1$ は以下のように書くことができる。

$$\frac{\mathbf{r}'_1}{r_{ref}\sigma} = 2 \begin{pmatrix} \xi \cos(\phi - f) \\ (1 + \frac{e}{2} \cos f) \sin(\phi - f) - \frac{e}{8} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

ただし、

$$\xi = \sqrt{1 + \frac{e^2}{16} + \frac{e}{2} \cos f + \frac{e^2}{8} \cos 2f} \quad (67)$$

である。

式 (66) で表される相対位置ベクトルを調べると、以下のような性質があることが分かる。

- 1) 衛星は、近地点での初期位相 ϕ の方向にほぼ軸対称で、近地点で基準衛星からの距離が最小、遠地点で最大となるような曲線上を基準軌道1周期の間に1周する。
- 2) 衛星が描く軌道の形状は ϕ によらず概ね相似であり、 σ はその軌道の大きさを決定する。
- 3) 衛星位置ベクトルの x' 軸からの偏角はほぼ $\phi - f$ に一致する。即ち衛星は基準衛星の周りを角速度 n (基準軌道の平均運動) で周回する。

第7図に $a = 20R_e$, $e = 0.9$, $\sigma = 0.001$, $\phi = 45^\circ$ のときの衛星1と衛星2の相対位置ベクトルを運動面に投影したものを示す。前述の性質を満たしつつ衛星が運動している様子が分かる。またこの2), 3)の性質を利用することで運動面上において、任意の2次元幾何形状の相似性を軌道全周にわたって維持し続けることが可能である。近地点 $f = 0^\circ$ において運動面上に衛星をある (x', y') の位置に配置したい場合には、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2a\sigma(1-e) \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{e}{2} + \frac{3e^2}{16}} \cos \phi \\ (1 + \frac{3e}{8}) \sin \phi \end{pmatrix} \quad (68)$$

の関係から σ, ϕ を決定し、式 (39) と式 (63) から得られる関係式

第8図 E形状の維持

$$\begin{aligned}
 \delta e &= -(1 - e^2)\sigma \cos \phi, \quad \delta t_0 = -\frac{1}{e} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \sigma \sin \phi, \\
 \delta \omega &= -\frac{1}{e} \left(\frac{e^2}{4} + 1 \right) \sigma \sin \phi, \quad \delta i = \sqrt{3 - \frac{e^2}{4}} \sigma, \\
 \Omega &= \phi \mp 90^\circ
 \end{aligned} \tag{69}$$

から衛星の軌道要素を決定できる．第8図に，運動面上に投影した‘E’の編隊形状の維持の例を示す．幾何形状の大きさは近地点付近では小さく，遠地点付近では大きくなるが，衛星群が相似な幾何形状を全周にわたって維持していることが確認できる．

4. ま と め

本研究では，基準軌道の近傍で線形化した衛星の相対位置ベクトルの内積に注目し，制御することなしに衛星間の相対位置関係を維持することが可能な軌道の設計法について述べた．結果として長楕円軌道上のフォーメーションフライトにおいて，近似的にはあるが

- 1) 相対距離を軌道全周に渡って保つ軌道
- 2) 2次元的な幾何形状の相似性を軌道全周維持する軌道が存在し，解を解析的に求めることができた．但し，1)と2)を組み合わせた軌道，即ち，辺長が軌道全周で変化しない正三角形等を維持する軌道等は楕円軌道上では不可能である．

参 考 文 献

- 1) 夏目耕一：群衛星の幾何的配置を凍結する軌道設計法，東京大学工学系研究科修士論文，2001
- 2) Tan, Z. and Bainum, P.: An Improved Strategy for Maintaining Constant Distance between Satellites in an Elliptically Orbiting Constellation, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2001.
- 3) Bainum, P., Strong, A. and Tan, Z.: Techniques for Deploying Elliptically Orbiting Constellations in Along-Track Formation, IAC-02-A.2.05, 2002.
- 4) Nakasuka, S., Kawakatsu, Y., Ninomiya, T., Fujiwara, T. and Nakamura, T.: Study on the Relative Motion and Orbit Design for Clustered Satellites, Proceedings of 4th Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics, 1994, pp. 88-92.