重力傾度安定化された宇宙構造物の受動的な最適姿勢変更制御^{*1}

Optimal Passive Re-Orientation of Gravity-Gradient-Stabilized Space Structures

渡 部 武 夫^{*2}・藤 井 裕 矩^{*3}
Takeo WATANABE and Hironori A. FUJII

Key Words: Gravity Gradient, Electrodynamic Tether System, Optimal Control, Metric

Abstract : This paper is devoted to study the optimal control of re-orient the gravity-gradient-stabilized space structure from one equilibrium attitude to another attitude, which is to orient 180 degrees in rotation. The space structure on an orbit is assumed to be able to move a part of the mass in the direction of the axis of the minimum moment of inertia. Two analytical studies are applied to the present problem. One method employs an optimal control to minimize the length of the movement of the particle in the course of the re-orientation. The other one is the orthodox feedback control, which refers to the rotation angle of the system to define the control tension. The numerical result shows that the re-orientation trajectory in the minimum metric control is identical both for the movement.

1. は じ め に

宇宙テザーシステムに代表されるような、主質点、副質点からなる宇宙構造物は軌道上において重力傾度により最小慣性主軸方向に姿勢が安定する。また宇宙テザーシステムは巻き取ったまま収納し軌道上で展開することにより長大な構造を構成することができる利点がある。この特性を利用し、宇宙テザーシステムは重力傾度により安定化を要する大型宇宙構造物の構成要素としての利用や高層大気観測ミッションなどさまざまな応用案が考案され、多くの研究がなされてきた。

特に円軌道上における重力傾度安定化された宇宙構造物として着目した場合、その力学は基本的には遠心力とコリオリ力と重力が作用する回転中心力場における制御問題として取り扱われることが多かった。具体的には、主質点近傍から副質点を放出したあと、引力中心方向、または天頂方向の任意の平衡点まで展開する伸展制御問題、または逆に副質点に張力を与えて主質点近傍まで誘導する回収問題などである。これらは非線形制御問題としてその安定性や最適化に関する数多くの研究がなされている¹⁻⁴⁾。

一方、テザーシステムのテザー上に電流を流し理学観測ミッションを行う例や⁵⁻⁷⁾、地球磁場との干渉によるローレンツ力を推力に利用するエレクトロダイナミックテザー(EDT)推進といった応用も考案されている⁸⁻¹⁰⁾。これは、展開したテザーの両端にプラズマコンダクタを搭載することにより、電子を放出、収集し、周辺のプラズマを介した閉回路を形成する方法であり、

従来の化学推進に比べて非常に高い比推力をもつ推進システムとして期待されている。この EDT 推進システムにおいては、テザー上を流れる電流ベクトルの向きが推力の向きを決定するため、加速、減速の両方の推力を得るシステムを構築するには電流の向きが上下 2 方向に変更できる必要があり、プラズマコンダクタを加速用と減速用に二対搭載する必要がある。しかしながら、システムの姿勢、すなわちプラズマコンダクタの相対位置を任意に逆転することができれば第 1 図に示すように一対のプラズマコンダクタで加速減速が可能になりシステムの大幅な簡素化、軽量化が見込める。

この姿勢変更制御は、ある平衡点にある副質点を姿勢角にして 180 度逆向き別の平衡点まで導く非線形制御問題としてとらえることができ、これまでの伸展、回収問題に続く新しい Rest-to-Rest 問題と定義できる。本稿ではこの姿勢変更制御問題(逆転問題)に対して、リーマン距離を最短にする最適制御問題として解析をおこなった。これは、過去にテザーシステムの伸展回収問題に関する最適経路問題として Fujii らによって解析、報告されたもの¹¹⁾を本姿勢変更制御問題に適用したものである。具体的には、回転中心力場の力学系においてリーマン距離を定義することにより Vaconomic な力学系に変換し二点境界値問題に帰着させる手法を用いている¹²⁾。一方で単純なフィードバック制御による数値解析結果も合わせて行った。これは、副質点を天頂方向に導くために姿勢角に対応して PD 制御の目標値を変化させ、制御張力を発生させるものである。この制御張力により副質点を回収し、コリオリ力により後方に振らせたあと天頂方向の安定点付近ではまた初期のテザー長に戻すよう伸展する制御を、一連の流れとしておこなう。

数値解析の結果、最適経路による制御、フィードバック制御ともに、テザーの長さ・速度制御および張力制御によって重力

^{*1} © 2005 日本航空宇宙学会
平成 17 年 10 月 11 日原稿受理

^{*2} 東京都立科学技術大学院工学研究科航空宇宙工学専攻

^{*3} 東京都立科学技術大学 / 首都大学東京

傾度化された宇宙構造物の姿勢変更(逆転)制御が可能であること、および最適経路による姿勢制御が姿勢変更過程において対称で滑らかな軌跡を描くことを示した。

第1図 姿勢変更制御問題(逆転問題)の概念

2. 力学モデル

本稿では、重力傾度安定化された宇宙構造物を取り扱う。簡単のため、この宇宙構造物は、質量の無いテザーのような構造要素によってつながれた二質点で力学的にモデル化する。これらの2質点の一つ(これを主質点と呼ぶ)は他のもの(これを副質点と呼ぶ)より十分大きな質量を持ち、これらをつなぐ質量が省略できる構造要素は長さを変更することができ、その結果重力傾度が変化し受動的な姿勢変更制御が可能である。このモデルは、一つの慣性主軸周りの慣性モーメントが他の二つのものに比較して極端に小さいいわゆる細長い構造物であり、片方の質量が非常に大きな2つの衛星からなるテザー衛星はその最も典型的な例である。このような2つの質点でつながれた宇宙構造物のモデルを第2図に示す。ここで、構造物の質量の大部分は主質点からなると仮定しているため、主質点は軌道上にありと仮定できる。このとき主質点の位置を C 、 C を中心とする軌道座標を引力中心 O から外向きに X 軸、軌道進行方向に Y 軸として定義する。本研究では、軌道面外の姿勢運動が微小であると仮定し、このとき軌道面内の運動は分離できるため軌道面内の運動のみを取り扱うものとする。軌道は軌道角速度 Ω が一定の円軌道とし、構造物の軌道面内の姿勢角を θ 、二つの質点を結ぶ質量が無いと仮定した構造物の無次元化長さを $\ell(t)$ とする。ここで、 $\ell(t)$ は時間的に変化させることによって構造物の姿勢角を制御する。ここで時間 $t := \Omega \times (\text{実時間})$ 、は軌道角速度 Ω (rad/sec)によって無次元化された時間を示す。このとき、力学モデルの運動方程式は次のようになる。

$$\ell(t)\ddot{\theta} + 2\dot{\ell}(t)\dot{\theta} + 3\ell(t)\sin\theta\cos\theta + 2\dot{\ell}(t) = 0 \quad (1)$$

ここで、上付きのドットは時間微分を表し、時間の関数であるとして $\ell(t)$ と強調して表現した。式(1)はコリオリ力の項 $2\dot{\ell}(t)\dot{\theta}$ により双線形な非線形制御系となっている。

3. 姿勢変更制御問題(逆転問題)

重力傾度安定化された宇宙構造物は、姿勢角 θ が $\pm n\pi$ (ここで $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ は整数)のときに平衡点、すなわち、安定な姿勢を得る。したがって、一つの姿勢角 θ から $\ell(t)$ を変化させることによって元の、もしくは別の、平衡点に移動する姿勢を変更することができる。元の平衡点に移動させる場合は、テザー衛星の場合の伸展回収制御として特定することができ、文献¹¹⁾にてすでに発表済みである。本研究では、姿勢角 θ を0から π まで、すなわち引力中心(地球)方向に向いている副質点を、引力中心から外方向(天頂方向)に向ける姿勢制御を取り扱う。

第2図 力学モデルと座標系

4. リーマン距離を用いた解析

4.1 最適経路 一般に最小距離はユークリッド空間では直線になるが、ここで考える力学系は中心力場で回転する運動となるため、コリオリ力が作用し、かつ、このコリオリ力は、移動速度に依存するために求解は簡単ではない。本解析においては、リーマン距離を用いて次のように定義する平面内の経路の距離を評価関数 J とし、これを最小にするものを最適経路と考える。

$$J = (1/2) \int_{t=0}^{t=t_f} (\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2) dt \quad (2)$$

この評価関数は、副質点の最初と最後の位置を結ぶ軌道面上の曲線の長さを表しているため、その物理的な意味は明らかである。この最小のものは、副質点が姿勢変更を行う間に移動する距離が最小という意味で最適と考えることができる。ここで、

時間と単調増加的に一対一対応する変数 τ を次のように定義する．

$$(dt/d\tau) := \ell(t) = \ell_0 \exp\left((1/2) \int_{t=0}^{t=\tau} u dt\right) \quad (3)$$

このとき，式(2)で表された評価関数は次のように変換することができ，Vaconomic な力学系の取り扱いが可能になる¹²⁾：

$$J = (1/2) \int_{\tau=0}^{\tau=\tau_f} [\ell'^2/\ell + \ell\theta'^2] d\tau \quad (4)$$

ここで $()'$ は，新しい時間変数 τ に関する微分を表す．この評価関数を，次のように書き直された運動方程式(1)の拘束の下で最小化する．

$$\ell(\tau)\theta'' + \ell'(\tau)\theta' + 3\ell(\tau)\sin\theta\cos\theta + 2\ell'(t) = 0 \quad (5)$$

4.2 二点境界値問題 いま，姿勢角 $q := \theta$ に対応する一般化運動量を $p := \theta'$ と定義する．

Vaconomic な力学系に対するラグランジュ関数 L^* は以下のよう求められる．

$$L^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell'^2}{\ell} + \frac{1}{2} \ell q'^2 \right) + \lambda_1(\tau)(q' - p) + \lambda_2(\tau) \left(p' + \frac{\ell'q'}{\ell} + 3\ell^2 \sin\theta\cos\theta + 2\ell' \right) \quad (6)$$

ここで $\lambda_1(\tau)$ と $\lambda_2(\tau)$ はラグランジュ乗数である．また，一般化された座標系 q, p ，および ℓ に対する一般化運動量はそれぞれ以下のように定義される．

$$\begin{aligned} p_q &:= \partial L^* / \partial q' = \ell q' + \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\ell'}{\ell} \\ p_p &:= \partial L^* / \partial p' = \lambda_2, \\ p_\ell &:= \partial L^* / \partial \ell' = \frac{\ell'}{\ell} + \lambda_2 \frac{\theta'}{\ell} + 2 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\lambda_1 = p_q - \ell q' - \lambda_2 \ell' / \ell$ ，そして $\lambda_2 = p_p$ である．また，対応するハミルトン関数は以下のように導出される．

$$H^* = p_q q' + p_p p' + p_\ell \ell' - L^* \quad (8)$$

よって最適経路は， q, p ，および ℓ の初期条件，および終端条件と以下のハミルトン方程式により支配される二点境界値問題を解くことにより生成される．これにより位相平面 (q, q') における起点 $(\theta=0, q'=0)$ から始まり，平衡点 $(\theta=\pi, q'=0)$ に達する最適経路，最短測地線が探索される．

$$\begin{aligned} q' &\equiv \frac{\partial H^*}{\partial p_q} = p \\ p' &\equiv \frac{\partial H^*}{\partial p_p} = -p_\ell p - \frac{3}{2} \ell^2 \sin 2q + \frac{p_p}{\ell} p^2 - 2p_\ell + 4p_p p + 4p_p \ell \\ \ell' &\equiv \frac{\partial H^*}{\partial p_\ell} = -p_p p - 2p_p \ell + p_\ell \ell \\ p_q' &\equiv -\frac{\partial H^*}{\partial q} = 3p_p \ell^2 \cos 2q \\ p_p' &\equiv -\frac{\partial H^*}{\partial p} = p_\ell p_p - \frac{p_p^2}{\ell} p - 2p_p^2 + \ell p - p_q \\ p_\ell' &\equiv -\frac{\partial H^*}{\partial \ell} = 3p_p \ell \sin 2q + 2p_p p_\ell - 2p_p^2 - \frac{1}{2} p_\ell^2 + \frac{1}{2} p^2 + \frac{p_p^2 p^2}{2\ell^2} \end{aligned} \quad (9)$$

4.3 数値解析結果 第3図(a)~(e)に式(9)に対する数値解析の結果を示す．今回の解析例では，二点境界値問題の境界条件は，初期条件と終端条件 $[p_{(t0)}, p_{(tf)}, q_{(t0)}, q_{(tf)}, l_{(t0)}, l_{(tf)}]$ を $[0, 0, 0, \pi, 1, 1]$ として与えており，所要時間は無次元化時間 2π で与えている．

本研究における最適経路生成制御による副質点の経路を第3図(a)に示す．軌道面内の X-Y 座標系において主質点から見て引力中心方向の平衡点から天頂方向の平衡点まで，経路の前半と後半に関してほぼ対称で滑らかな最適経路で結ばれている．システムの姿勢角とその時間微分，すなわち， (q, q') の位相平面に写像した最適経路を第3図(b)に示す．

最適経路生成制御に要する制御力の時間履歴を第3図(c)に示す．縦軸は長さ方向に関する無次元化張力を示している．テザー衛星のような構造を仮定した場合，テザーは押すことができないため，制御力すなわちテザー張力は常に正でなくてはならない．本制御則においては制御を行う期間内に関して制御力は常に正であり，条件を満たしているといえる．長さ ℓ の時間変化は第3図(d)に示す．縦軸に無次元化長さ，横軸に無次元化時間を示している．長さ ℓ の変化は，その過程の始まりから終端で1になるまでなだらかである．また姿勢変更過程の前半と後半においてほぼ対称な形状となっている．この特徴は位相平面において起点となる平衡点からスタートしもう一方の平衡点にたどり着く最適軌道生成の結果によるものである．第3図(e)は姿勢角の時間履歴を示している．位相平面における最適軌道は，なだらかな角度の時間応答という形でよい特長を示しているといえる．

第3図 (a) 軌道面内運動

第3図 (b) 姿勢角位相平面表示における最短経路

第3図 (c) テザー張力の時間履歴

 第3図 (d) 長さ ℓ の時間履歴

第3図 (e) 姿勢角の時間履歴

5. フィードバック制御による姿勢変更制御

5.1 テザー張力制御 上記の最適経路を求める計算結果に対して、副質点の運動を一般的なフィードバックによるテザー張力制御で制御する場合について示す。式(1)に示した運動方程式において姿勢角はテザー長およびその時間微分により影響を受け制御されるが、テザー長を張力制御するために、新たに以下の式を導入する。

$$\ddot{\ell}(t) - 2\ell(t)\dot{\theta} - \dot{\theta}^2 - 3\ell(t)\cos^2\theta = -\hat{T} \quad (10)$$

ここで $\hat{T}$ は $\hat{T} = T / m\Omega^2$ により無次元化されたテザー張力である。引力中心方向の平衡点にある副質点を天頂方向に逆転させるために、制御張力は以下のフィードバック制御を適用して与えるものとする。

$$T(t, \theta) = (K_p(\ell_{com}(\theta) - \ell(t)) - K_d\dot{\ell}(t)) - 3m\Omega^2\ell(t)\cos^2\theta \quad (11)$$

ここで

$$\ell_{com}(\theta) = \frac{1}{2}\ell_0(1 - \cos\theta) \quad (12)$$

は、副質点を天頂方向に導くために姿勢角に対応して設定される指令長さであり、この制御張力により一旦テザー長を減少さ

せ、コリオリ力により副質点を振らせたあと天頂方向の安定点付近ではまた初期のテザー長に戻すような張力を発生させる．
 K_p , K_d はそれぞれフィードバックゲインである．本研究ではこれらのゲインは $K_p = 0.004$, $K_d = 0.5$ と設定した．このフィードバック制御自体は、制御手法としてはオーソドックスなものではあるが、前述の最適経路設計の結果と比較することは興味深いといえる．

5.2 数値解析結果 第4図(a)は軌道面内の動きを示している．フィードバック制御により副質点は天頂方向の平衡点に誘導されているが、最適経路の結果(第3図(a))と比較し、姿勢変更の前半と後半が非対称の挙動を示しているのがわかる．同様に第4図(b)に示す姿勢角の位相平面表示でも、通過する経路が非対称であることがわかる．これらのことは、前述の最適経路解析の結果が、リーマン距離における最短経路を通っていることをよく表している．第4図(c)はフィードバック制御における制御張力の時間履歴を表している．本研究で用いた制御則では最適経路の結果に比べて序盤で大きな張力を発生させているのが読み取れ、フィードバック制御ではシステムにかかる負担が増える可能性がある．また、第4図(d)、第4図(e)はそれぞれ長さ ℓ と姿勢角の時間履歴を示しているが、最適経路の結果と比較し、早い時間で天頂方向の平衡点に達し、収束に向かう様子が確認できるものの、長さ ℓ においてオーバーシュートが見られる．それぞれの結果において式(2)で定義した評価関数、リーマン距離 J を比較すると、フィードバック制御による結果 $J_{fb} = 279.3$ に対して最適軌道を用いた結果では $J_{opt} = 46.8$ となることを確認した．

第4図 (a) 軌道面内運動(フィードバック)

第4図 (b) 姿勢角位相平面表示における経路(フィードバック)

第4図 (c) テザー張力の時間履歴 (フィードバック)

 第4図 (d) 長さ ℓ の時間履歴 (フィードバック)

第4図 (e) 姿勢角の時間履歴(フィードバック)

6. ま と め

円軌道上において重力傾度安定化された宇宙構造物に対して、最小慣性主軸方向に質量を移動させ、その変形により構造物の姿勢を変更させる制御問題についての数値解析を行った。リーマン距離を用いた解析により最短経路を求め、副質点を、主質点から見て引力中心方向の平衡点から天頂方向の平衡点へと逆転させる二点境界値問題として取り扱った。また、同様の姿勢変更問題、姿勢角を参照するフィードバック制御による張力制御を適用し、数値解析例を示し最適経路の結果と比較した。数値解析の結果、最適経路による制御、フィードバック制御ともにテザーの長さ・速度制御および張力制御によって姿勢変更(逆転)制御が可能であること、および最適経路による姿勢制御が姿勢変更過程において対称で滑らかな軌跡を描き、評価関数であるリーマン距離による比較でもその距離が短いことを示した。

参 考 文 献

- 1) Fujii, H. A., Uchiyama, K. and Kokubun, K.: Mission-Function Control of Deployment / Retrieval of Tethered Subsatellite: In-Plane and Out-of-Plane Motions, *J. Guid. Control Dynam.*, **14** (1990), pp. 471-473.
- 2) Fujii, H. A. and Anazawa, S.: Deployment / Retrieval Control of Tethered Subsatellite through an Optimal Path, *J. Guid. Control Dynam.*, **17** (1994), pp. 1292-1298.
- 3) Fujii, H. A. and Ishijima, S.: Mission Function Control of Deployment and Retrieval of a Subsatellite, *J. Guid. Control Dynam.* **12** (1989), pp. 243-247.
- 4) Netzer, E. and Kane, T. R.: Deployment and Retrieval Optimization of a Tethered Satellite System, *J. Guid. Control Dynam.* **16** (1993), pp. 1085-1091.
- 5) Fujii, H. A., Takegahara, H., Oyama, K., Sasaki, S., Yamagiwa, M., Kruijff, M., Van der Heide, E. J., Sanmartin, J. R. and Charro, M.: A Proposed Bare-Tether Experiment on Board a Sounding Rocket, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, at the Providence, RI, August 16-19 2004.
- 6) Lorenzini, E., and Sanmartín, J.: *Electrodynamic Tethers in Space*, Scientific American, August (2004), pp. 50-57.
- 7) Sanmartin, J. R., Charro, M., Elaskar, S., Pelaez, J., Tinao, I. and Hilgers, A.: Final Report for ESA Contract, Floating Bare Tether as Upper Atmosphere Probe, Febr. 2004.
- 8) 山極芳樹, 竹ヶ原春貴, 小境正也, 大西健夫, 田原弘一: エレクトロダイナミックテザー, *日本航空宇宙学会誌*, **52** (2004), pp. 101-107.
- 9) Williams, P., Watanabe, T., Blanksby, C., Trivailo, P. and Fujii, H. A.: Libration Control of Flexible Tethers Using Electromagnetic Forces and Movable Attachment, *J. Guid. Control Dynam.* **27** (2004), pp. 737-744.
- 10) Peláez, J. and Lorenzini, E. C.: Libration Control of Electrodynamic Tethers in Inclined Orbit, *J. Guid. Control Dynam.* **28** (2005), pp.269-279.
- 11) Fujii, H. A. and Kojima, H.: Optimal Trajectory Analysis for Deployment/Retrieval of Tethered Subsatellite using Metric, *J. Guid. Control Dynam.* **26** (2003), pp.177-179.
- 12) Arnold, V. I. ed.: *Dynamical Systems III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.