非線形最適制御問題の宇宙船と飛行船への応用について^{*1} Application of a Nonlinear Optimal Control Algorithm to Spacecraft and Airship Control

藤 井 裕 矩^{*2, *3}・草 谷 大 郎^{*3}・渡 部 武 夫^{*3}・Andrew AN^{*4}
Hironori A. FUJII, Tairo KUSAGAYA, Takeo WATANABE and Andrew AN

Key Words: Nonlinear Optimization, Feedback Tracking, Control Synthesis, Spacecraft Control, Airship Control

Abstract : This paper presents a synthetic method that is based on both the algorithm of the geometry nonlinear feedback and nonlinear system optimal control of hierarchical differential feedback regulation. This method enables us to solve optimal feedback control problems without solving the Riccati Equations or adjoint vectors. Also, the method takes into consideration the avoidance of conjugate points, which is an important aspect of research in optimal control of nonlinear system. The present method is applied to two examples, one is a nonlinear attitude maneuver of spacecraft and the other is an airship optimal feedback tracking control. These applications have been studied numerically in order to show the performance of the present method applied to nonlinear optimal control for aerospace application.

1. は じ め に

航空宇宙機において、非線形最適制御の検討は重要な課題の一つである^{1~4)}。本稿では、このような非線形制御手法の応用に関してフィードバック線形化手法を用いた上に、さらに階層的微分フィードバック・レギュレーターを用いる非線形最適制御手法を提案し、宇宙船⁵⁾と飛行船⁶⁾の2例に適用して検討する。

宇宙船の例では、スペースシャトルが軌道上からの帰還のために、重力傾度安定化姿勢から後ろ向きの姿勢に90度のヨー・ロール姿勢変更する場合について、リアクション・ホイールとリアクション・ジェットを用いて行う制御問題を取り扱う。宇宙船の大角度スルー・マヌーバでは、非線形の運動方程式を扱わねばならず、このような問題を解決するためには、これまでの研究によると二つの有力な制御設計法がある⁷⁾：ひとつは、1) Liapunov 非線形制御器^{8~10)}を用いる方法であり、もうひとつは、2) スライディング制御手法を使った非線形ロバスト制御器^{11, 12)}を用いる方法である。制御則の設計において相対的な姿勢の運動方程式を用いると、トラッキング制御問題がレギュレータ問題に変換でき、レギュレータ問題はトラッキング制御問題よりも容易なので、設計問題として取り扱うことが簡単になる⁷⁾。

最適制御問題を解くにあたって、変分法が大きな役割を果たすことは言うまでもない。評価関数の一次微分をゼロにするように、最適解に関する一次の必要条件が導かれることはよく知

られている¹³⁾。Jo と Prussing は、Bolza 型の最適制御問題での弱局所最小のための十分条件を検討し、2次の必要条件と十分条件を適用する実際的な手順を展開している。そして、2次条件が成り立たず解析解が存在しないような例について、近似最適解を決定している¹⁴⁾。非線形系の制御は最近の過去20年間に於いて基本的な手法が大きく進歩した。フィードバック線形化はこのうちで最も魅力的なアプローチのひとつであり、与えられた非線形連続時間システムを新しい座標系での線形時変のシステムに変換し、その線形空間で設計を行うことによって、元の空間での非線形制御を求める手法である。この手法は、特に工業的な分野において応用が試みられてきている¹⁵⁾。

Bourdache-Siguerdidjane¹⁶⁾は最適フィードバック則を非線形システムに適用したとき、これが一次の準線形偏微分方程式を満たすことを示し、宇宙機の非線形姿勢制御の例に適用を試みている。これらの式は特性値を利用した手法などによって積分可能であるが、このとき最適フィードバック則は非線形フィードバック制御となる。この方法を、リアクション・ジェットおよびリアクション・ホイールを用いた、宇宙船の角運動量制御を行う燃料最小レギュレータ問題に適用し、運動は非線形でありながら線形状態量フィードバック則としてよく知られた解析解を直接求めることができることを示している。

飛行船の例では、姿勢を維持したまま進行方向に加速する弱い非最小位相系で表現されたシステムとしての最適制御問題を取り扱う。このような非線形制御の分野における最小位相非線形系を陽に線形化する理論は非常に複雑なものとなる。しかも、V/STOL 機では機体に働くモーメントのような制振力が弱く、わずかに非最小位相となるので、これらの理論を直接適用することはできない。非常に単純化した垂直離着陸機の

^{*1} © 2006 日本航空宇宙学会
平成18年7月5日原稿受理

^{*2} 東京都立科学技術大学

^{*3} 首都大学東京

^{*4} 北京航空航天大学

モデルを使った非最小位相系に着目した入力-出力線形化手法は深く検討されている。Hauser たちは動的な状態フィードバックによって近似的な入力-出力線形化に関する手法を提案し、モーメントと力のカップリングが増加するような性能が優雅に低下するような閉ループ系となることを示している¹⁷⁾。また、Fliess らは、非最小位相出力に対する平坦性を基礎とした制御設計法(a flatness based control synthesis)などを非線形系に適用した場合を検討している¹⁸⁾。

飛行船の運動に関する定式化は、通常の航空機と比較して機体周りの空気の運動による力、ならびに、浮揚部分の気体により生じる力が加わるために複雑になる¹⁹⁾。さらに飛行船においては実機に関するデータが少ないために運動方程式の設定が困難になる^{20), 21)}。本稿では、英国の AI 社が製造したスカイシップ 500 のデータを使用している²²⁾。

An らは、最適非線形フィードバック・レギュレーター理論に基づいた新しい幾何学的な非線形最適フィードバック・トレース法をヘリコプターの位置制御問題に適用し、空気力と同軸ヘリコプターの定常馬力推力のみを考えた最適トレーシングを検討した²³⁾。このフィードバック制御則により、ヘリコプターの、より精度の高い位置制御が行える。

本稿の目的は、宇宙機や飛行船の非線形姿勢制御を取り扱うために、非線形制御器の設計においてフィードバック線形化に基づいたアプローチを適切に応用する方法を示すことにある。筆者らは、先に幾何学的な非線形フィードバック・デカップリングのアルゴリズム²⁴⁾と階層的微分フィードバック・レギュレーション²⁵⁻²⁷⁾を用いて航空宇宙機の非線形最適制御を研究した^{5, 6)}。非線形フィードバック系を分割するアルゴリズムを用いると、入力と出力が互いに対応したいいくつかのシステムに分離できる。このとき、変換による物理的な意味が隠されるが追跡は可能であり、入出力の関連が陽に求まるので制御系の設計が容易になる。この得られた非線形制御系では、一般に非線形の随伴ベクトル、または、非線形の Riccati 方程式を解かなければならないという困難性がある。本稿ではこのような困難性を、1 入力-1 出力非線形系を階層的微分フィードバックによるレギュレータ問題として取り扱うことによって避ける。これによって、計算時間の大きな減少と計算精度の大きな向上を得ることができる。さらに、このようにデカップルさせ階層的微分手法を用いて解析することにより、非線形システムの最適制御で問題になる共役点を避けた最適軌道を求めることができる。条件の中から随伴ベクトルを消去することができ、解法を複雑にする非線形 Riccati 方程式を解く必要がないため、計算時間を大幅に減らし、しかも同時に高い精度を得る。さらに制御変数を陽に取り扱うことができ、一般的に非線形関数解析の局所解は凹関数に適用すると大域解に拡張することができ、凹関数での大域解を求めることができる。

また、航空宇宙機の非線形制御の例として、軌道から帰還操作のために大きくピッチ角を変更させるスペースシャトルの非線形運動と、地表面観測のためにピッチングと上下運動を拘束

した状態で等加速度水平飛行を行う飛行船の非線形運動について検討する。一般的な飛行船においては、大迎角を保ったまま飛行したり、大きな迎え角、または、横振り角操作が必要な場合がある。例えば大迎角を保持して飛行する場合として、推力変化を伴う離陸時や上昇時や降下時があげられる。また燃料を最大量搭載して飛行する場合には、ダイナミックリフトの一部を浮揚力として利用するためにノーズアップの状態レベルフライトしなければならない。また、この場合の帰還時に燃料がほとんど消費されれば、逆にノーズダウンを維持したままレベルフライトを行う必要も出てくる。さらにパッセンジャー搭乗やリモートセンシングの場合には、乗り心地やデータ取得のために、できるだけピッチ角を維持したままの飛行が求められる。次に、大迎角振りを用いる飛行としてゴーアラウンドの場合、また大横振りする場合として、着陸時の地表 15 m 付近の気流逆転層における横風(クロスウィンド)への対応などがあげられる。一般にゴーアラウンドは非常操作であり、ほとんど使われない操作と考えられがちであるが、飛行船の場合には、地表 15 m 付近の気流逆転層による影響を受けるため、しばしばゴーアラウンドが実施される。着陸操作においては、船体下面と地面との間の、推力によるベンチュリ効果を抑えるために推力最小で実施され、かつピッチ角はマイナスである。ここで低層の気流逆転層に出会うと、低速の機体はコントロール不能に陥るため、迅速にフルパワーとピッチアップにより制御力を回復させ、上空へ速やかに離脱し、旋回しなければならない。本稿で扱う飛行船の非線形姿勢制御はこのような場合を想定したものである。

2. 航空宇宙機の非線形運動

軌道から帰還操作のために大きくピッチ角を変更させるスペースシャトルにおいては、軌道上で天頂方向を指向している姿勢から帰還操作のために大きくピッチ角を変更させ、軌道速度方向と逆方向に 90 度姿勢を変更する非線形制御を検討する。シャトルはアクチュエータとしてスラスターリアクションホイールを持つものとする。

地表面観測のためにピッチングと上下運動を拘束した状態で等加速度水平飛行を行う飛行船については、ピッチングと上下運動を拘束した状態で、飛行速度を 0~20 m/s (65.61 ft/s)まで、300 秒間の等加速度レベルフライトを行う場合の非線形運動を検討する。一般的な飛行船は、重心と浮心と推力中心が一致していないため、大きなピッチング振動を生じやすく、リモートセンシングや旅客輸送の場合には、これらの振動が生じないように加減速することが望まれる。このような、特に大きなピッチング振動や上下運動が生じやすい加速時への対応を検討する。

2.1 スペースシャトルの非線形運動 ここでは、まずスペースシャトルにおける角運動量制御問題⁹⁾を考える。

第1図のようなスペースシャトルに、リアクション・ジェットとリアクション・ホイールを搭載して制御を行う場合の姿勢運動の方程式は、角運動に関する運動方程式となり、

$$\begin{aligned}
 \text{ピッチ: } & I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y)(\omega_y - \omega_0)\omega_z + C_x \dot{\Omega}_x - C_y \Omega_y \omega_z + C_z \Omega_z \omega_y = T_x \\
 \text{ヨー: } & I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x \omega_z + C_y \dot{\Omega}_y - C_x \Omega_x \omega_z + C_z \Omega_z \omega_x = T_y \\
 \text{ロール: } & I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x)(\omega_y - \omega_0)\omega_x - C_x \Omega_x \omega_y + C_y \Omega_y \omega_x + C_z \dot{\Omega}_z = T_z
 \end{aligned} \quad (1)$$

で示される。

ここで、 $I_s (s = x, y, z)$ はシャトルの各機体軸まわりの慣性モーメント、 $\omega_s (s = x, y, z)$ は各々シャトルのピッチ、ヨー、ロールの角速度、 $T_s (s = x, y, z)$ はスラスター (リアクション・ジェット) によるトルク、 ω_0 はシャトルの軌道角速度、 $\Omega_s (s = x, y, z)$ はシャトル機体軸でのホイール角速度であり、各軸に取り付けられたホイールの慣性能率を $C_s (s = x, y, z)$ とする。

さらに、 ψ, θ, ϕ をシャトル機体軸オイラー角とおけば、(1) 式は、(2) 式のように記述できる。

第1図 スペースシャトル

$$\begin{aligned}
 & C_x \dot{\Omega}_x + C_z \Omega_z \{-\omega_0 (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta\} \\
 & - C_y \dot{\Omega}_y \{-\omega_0 (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) - \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta\} \\
 & + (I_z - I_y) \{-\omega_0 (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) - \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta\} \\
 & \quad \{-\omega_0 - \omega_0 (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta\} \\
 & + I_x (\omega_0 \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi - \omega_0 \dot{\psi} \cos \theta \cos \psi - \ddot{\theta} \psi \cos \theta + \ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta) \\
 & = T_x + 3\omega_0^2 (I_z - I_y) \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi \\
 & C_y \dot{\Omega}_y - C_x \Omega_x \{-\omega_0 (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) - \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta\} + C_z \Omega_z \{-\omega_0 \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta\} \\
 & + (I_x - I_z) \{-\omega_0 (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) - \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta\} (-\omega_0 \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \\
 & + I_y [-\ddot{\phi} \sin \phi - \ddot{\theta} \psi \sin \phi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \omega_0 \{\dot{\phi} (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \\
 & \quad + \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \sin \psi + \dot{\psi} (-\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi)\} + \ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \sin \phi \cos \theta] \\
 & = T_y - 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \cos \phi \cos \theta \sin \theta \\
 & C_z \dot{\Omega}_z - C_y \Omega_y \{-\omega_0 \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta\} + C_x \Omega_x \{-\omega_0 (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta\} \\
 & + (I_y - I_x) (-\omega_0 \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \{-\omega_0 - \omega_0 (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta\} \\
 & + I_z [-\ddot{\phi} \cos \phi - \ddot{\theta} \psi \cos \phi \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta - \omega_0 \{\dot{\phi} (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \theta \sin \psi) \\
 & \quad + \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta \sin \psi + \dot{\psi} (\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi)\} - \ddot{\theta} \sin \phi + \ddot{\psi} \cos \phi \cos \theta] \\
 & = T_z - 3\omega_0^2 (I_y - I_x) \sin \phi \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 飛行船の非線形運動 飛行船に関しては、運動方程式から状態方程式を導き、階層的微分手法により最適制御を検討する。ここでは、第2図のような在来型の低層軟式飛行船²²⁾を例に扱う。

この飛行船は、全長 50 m、エンベロープ容積 5,131 m³ であり、制御入力として推進機 (推力 T) がゴンドラ後部に搭載されている。また、推進機の推力方向角 μ がベクター機構により変更できる (ベクタード・スラスター)。尾翼は十字配置で、水平安定板には制御板 (エレベーター: 制御角 δ_e) が取り付けられている。

制御出力として、ピッチングと水平・上下方向の縦運動を、第2図のように考えると、飛行船の縦の運動方程式は、

第2図 飛行船

$$\begin{aligned}
\text{機首方向: } & (m - X'_u)\dot{u} + (ma_z - Z'_w - X'_q)\dot{q} + (m - X'_{qw})qw - ma_x q^2 \\
& = X_e + X'_u u + X'_w w + [X'_q - (m - Z'_w)W_e]q + X'_\delta \delta_e + X'_t \delta_t + T_e \cos \mu - (mg - B) \sin(\theta_e + \theta) \\
\text{縦方向: } & (m - Z'_w)\dot{w} - (ma_x + Z'_q)\dot{q} + (m - Z'_{qu})qu - ma_z q^2 \\
& = Z_e + Z'_u u + Z'_w w + [Z'_q + (m - X'_w)U_e]q + Z'_\delta \delta_e - T_e \sin \mu + (mg - B) \cos(\theta_e + \theta) \\
\text{ピッチ方向: } & (ma_x - M'_u)\dot{u} - (ma_x + M'_w)\dot{w} + (I_y - M'_q)\dot{q} \\
& = M_e + M'_u u + M'_w w + [M'_q - ma_x U_e - ma_z W_e]q + M'_\delta \delta_e + M'_t \delta_t + T_e (d_z \cos \mu - d_x \sin \mu) \\
& \quad - (mga_z + Bb_z) \sin(\theta_e + \theta) - (mga_x + Bb_x) \sin(\theta_e + \theta) \\
& \quad \dot{\theta} = q
\end{aligned} \tag{3}$$

のように求まる⁶⁾。

ここで、 X と Z は、それぞれ x 軸と z 軸方向の力； M は y 軸周りのトルク； U は機軸方向速度； W は縦軸方向速度； U_e, W_e は定常飛行速度の x 軸、 z 軸方向の成分； u, w, q は各々、 x 軸、 z 軸方向の微小変化速度、 y 軸周りの微小変化角速度； θ は y 軸周りのピッチ角； I_y は y 軸周りの慣性モーメント； m は飛行船質量； g は重力加速度； B は浮力； a_x, a_z は、基準点であるエンベロープの容積中心から質量中心までの距離の、それぞれ x 軸、 z 軸方向成分； b_x, b_z は、基準点から浮力中心までの距離の、それぞれ x 軸、 z 軸方向成分； d_x, d_z は、基準点から推力中心までの距離の、それぞれ x 軸、 z 軸方向成分を表す。さらに微分記号は、 $X'_u \dot{u} := (\partial X / \partial u) \dot{u}$ のように定義されており、空力微係数や雰囲気気体の効果を表す。また δ_e と δ_t は、エレベータ舵角とトリム位置からのスロットル・レバー角である。ただし、 $|\delta_e| \leq 15[\text{deg}]$ とした。

この時のトリムの状態は、

$$\begin{aligned}
X_e + T_e - (mg - B) \sin \theta_e &= 0 \\
Z_e + (mg - B) \cos \theta_e &= 0 \\
M_e + T_e d_z - (mga_z + Bb_z) \sin \theta_e - (mga_x + Bb_x) \cos \theta_e &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

で示される。

3. 制御アルゴリズムの検討

3.1 簡単なモデル検討 本稿で検討する飛行船の運動は弱い非最小位相系の非線形制御問題となる。今、飛行船の縦運動の方程式を線形化して空気を省略し、質量中心と浮力中心が z 軸上にあるなどの仮定をして簡単化すると、このシステムが非最小位相系であることがわかる。すなわち、この簡単なモデルは、 x 方向の見かけの質量を m_x 、 z 方向の見かけの質量を m_z とし、

$$\dot{u} = (T / m_x) := u_1 \tag{5}$$

$$\dot{w} = -2(T / m_z) \mu := u_2 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -[(mga_z + Bb_z) / I_y] \sin(\theta_e + \theta) \\
&\quad + (dz / I_y) u_1 + (dx / 2) u_2 + (mM'_\delta / I_y) \delta_e
\end{aligned} \tag{7}$$

のように書くことができ、ゼロダイナミクスが

$$\ddot{\theta} = -[(mga_z + Bb_z) / I_y] \sin(\theta_e + \theta) \tag{8}$$

と表される振り子運動となり、安定ではあるが漸近安定でないことがわかる。通常の飛行船では $(mga_z + Bb_z)$ の項は正であるが、非常に特殊な場合として宙返りができるような飛行船では負の値をとることがある。このときは、振り子運動のような単に漸近安定でない安定な運動でなく、平衡状態 $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 0)$ が不安定化し、平衡状態 $(\dot{\theta}, \theta) = (0, \pi)$ が漸近的には安定でない安定な平衡点となる。いずれにしても、このような漸近安定性が保証されないゼロダイナミクスを持つ非線形システムは非最小位相系と呼ばれフィードバック線形化手法ではよい結果が得られない^{14, 17, 18)}。このため、本稿では非線形制御の応用に関してフィードバック線形化手法を用いた上に²⁴⁾、さらに階層的微分フィードバック・レギュレーターを付加した解析を行う^{25, 26)}。

3.2 非線形システムのデカップリング²⁴⁾ いま、アフィン非線形システムを

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\
y &= h(x)
\end{aligned} \tag{9}$$

とする。ここで、 $x \in R^n$ 、 $u \in R^m$ 、 $y \in R^p$ 、 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ は、なめらかなベクトル場であり、多様体上に位置付けられ、システムは次の条件のときデカップリングできる。

(9)式において、 m 入力、 m 出力($m = p$)であり、かつ点 x_0 において相対次数 $[r_1, r_2, \dots, r_m]$ を持つとすれば、

$$\begin{aligned}
1) \quad L_{g_j} L_f^k h_i(x) &= 0 \\
&\quad (\text{すべての } 1 \leq i, j \leq m \text{ において } k < r_i - 1)
\end{aligned}$$

$$2) \quad A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

($x = x_0$ において、非特異行列)

となる。ただし、出力 y は状態量 x に等しく、入力数 m は状態量の数 n に等しいとすれば、システムは次のフィードバック制御則を用いてデカップルさせられる。

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{10}$$

さらに、 $\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x)$ 、 $\beta(x) = A^{-1}(x)$ であり、

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{G_0} L_B^{-1} h_1(x) & \cdots & L_{G_m} L_B^{-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{G_0} L_B^{-1} h_m(x) & \cdots & L_{G_m} L_B^{-1} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} L_B^0 h_1(x) \\ \vdots \\ L_B^m h_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{と}$$

おく. したがって, (9)式は,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \quad (11)$$

$$y = x$$

のように書き直せる. ここで,

$$B(x) = f(x) + g(x)\alpha(x) \quad (12)$$

$$G(x) = g(x)\beta(x)$$

と定義すれば, (9)式の状態方程式は

$$\dot{x} = B(x) + G(x)v \quad (13)$$

と, 単純な記述になる.

3.3 最適非線形フィードバック制御^{25~27)} トラッキング制御問題で, 出力 (x) と参照出力 (x_r) の誤差 e を,

$$e = x - x_r \quad (14)$$

と定義する. また, 参照出力 x_r を,

$$x_r = q(t) \quad (15)$$

とする.

ところで, 階層微分法²⁵⁾によれば,

$$\dot{x} = F(x(t), u(t)) \quad (16)$$

$$y = h(x(t))$$

における最適問題の評価関数 J は Bolza 型¹⁴⁾で,

$$F = [F^1, F^2, \dots, F^n]^T \quad \text{とおけば,}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F^0(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(t_f)) \quad (17)$$

ただし, t_f は終端時間である. ここで, 最適制御におけるハミルトニアンは

$$H = \sum_{k=0}^n p_k F^k(x, u) \quad (18)$$

であり, $x \in R^n$ と $u \in R^m$ は, 多様体上のなめらかなベクトル場とする.

したがって, 最適必要条件は,

$$\frac{\partial H}{\partial u} := H_{u_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (19)$$

であり, $\frac{d^s H_{u_i}}{dt^s} = 0 \quad (s=0, 1, 2, \dots)$ としても得ることができる.

さらに, ベクトル場 $A := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=0}^n \bar{F}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ と定義すれば,

$$\frac{dH_{u_i}}{dt} = [p, [A, \bar{F}_{u_i}]] = 0 \quad (20)$$

ただし, $[X, Y] = XY - YX$ は Lie 括弧積であり,

$$\bar{F} = [F^0, F^1, \dots, F^n], \quad F_{u_i} := \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_i} \quad \text{とする.}$$

(17)式において, (13)式のように, u の代わりに v を用いて評価関数を書き換えれば,

$$J = \Phi(x_{t_f}) + \int_{t_0}^{t_f} (e^T Q e + v^T R v) dt \quad (21)$$

となる. ただし, $F^0 = e^T Q e + v^T R v$. また, Q は n 次元, R は

m 次元の重み行列である. この結果, (18)式のハミルトニアンも拡張し,

$$H = \langle \tilde{p}, \tilde{F} \rangle = \sum_{k=0}^n p_k F^k(\bar{x}, v) \quad (22)$$

ただし, $\tilde{F} = [F^0, F^1, \dots, F^n]$, $x \in R^n, v \in R^m$ や $\bar{x} = (x_0, x)$ は, 多様体上の滑らかなベクトル場である. さらに, (19)式の最適必要条件を書き直すと,

$$\frac{dH_{v_i}}{dt} = \langle \tilde{p}, [A, \tilde{F}_{v_i}] \rangle = 0 \quad (23)$$

となる.

随伴ベクトル $\tilde{p}$ は常に零とならず, $m=n$ の正方形の場合,

(19)式と(23)式から, 最適必要条件は, 行列式が

$$\begin{vmatrix} F_{v_1}^0 & \cdots & \cdots & F_{v_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{v_n}^0 & \cdots & \cdots & F_{v_n}^n \\ [A, F_{v_i}]^0 & \cdots & \cdots & [A, F_{v_i}]^n \end{vmatrix} = 0, \quad (i=1, \dots, n) \quad (24)$$

のときであるから, 最適制御フィードバック則は, 第(24)式を解けば,

$$\begin{aligned} & \{F_{v_i}^0 - F_{v_i}^T [I \otimes (F_v^{-T} F_v^0)]\} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} F \right] \\ & = F_{v_i}^T F_v^{-T} F_v^0 - F_{v_i}^0 + \{F_{v_i}^T [I \otimes (F_v^{-T} F_v^0)]\} F \\ & \quad - F_{v_i}^0 F + F_v^T F_v^0 - F_v^T F_v^T F_v^0 \end{aligned} \quad (25)$$

となる. ただし, $\otimes$ は, クロネッカー積であり, $P \in R^{p \times r}$ と $Q \in R^{m \times q}$ において $P \otimes Q = p_{ij} Q$. T は転置記号, I は n 次元単位行列が, 得られる.

共役点 (Conjugate Points) の問題に関しては多くの議論がなされている¹⁴⁾が, このような手法をとれば, 考慮せずにすむ.

結局, (25)式と(13)式の, 最適フィードバック則とデカップルにより, 非線形フィードバック最適トラッキング制御の式は,

$$\dot{v} = -R^{-1} G^T B^T G^{-T} R v + R^{-1} G^T Q e \quad (26)$$

$$\dot{x} = B(x) + G(x)v$$

となる.

これは準線形の偏微分方程式であり, コーシーの問題として知られている. 参照出力が既知であれば, 最適性の計算において共役点を避けることができる.

4. 解析と結果

4.1 スペースシャトルの非線形制御への応用 (2)式の運動方程式から, 非線形デカップリング制御は,

$$\dot{v} = -R^{-1} B^T R v + R^{-1} Q e \quad (27)$$

$$\dot{x} = B(x) + v$$

となる. ここで, $[r_1, r_2, r_3] = [1, 1, 1]$ は相対次数; $A(x) = G(x) = I$ (単位行列); $v = [v_1, v_2, v_3]$ はデカップリングするような新たな入力; $e = (e_1, e_2, e_3) = x - x_r$; Q と R を重み行列とする.

スペースシャトルの物理量として, $I_x = 1.53 \times 10^5$ [kg·m²],

$I_y = 1.61 \times 10^5 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$, $I_z = 0.16 \times 10^5 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$, $C_x = 1.3558 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$,
 $C_y = 0.0271 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$, $C_z = 1.6270 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$,
 $\mu_E = 3.9865 \times 10^5 \times 10^9 \text{ [m}^3/\text{s}^2]$, $\omega_0 = 7.29 \times 10^{-5} \text{ [rad/s]}$,
 $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$, $\dot{\Omega}_x = \dot{\Omega}_y = \dot{\Omega}_z = 0$, $T_x = T_y = T_z = 0$ を用いる。

このとき、評価関数

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(x - x_f)^T R (x - x_f) + u^T Q u] dt \quad (28)$$

の最適化を考える。ここで、 $u = [T_x, T_y, T_z, \dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z]^T$ は制御入力値、 x_f は参照目標値、 $x = [\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^T$ は出力値であり、 $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1, 10, 10, 10)$, $R = \text{diag}(10, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$, $x_f = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ を与えて検討を行う。

数値シミュレーションとして、参照軌道 $\phi_r(t) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{t}{t_f} \pi \right) \right\} \right]$ と、終端における $t_f = 60 \text{ [sec]}$, $\theta_r(t) = 0$ を、それぞれ用いた。この参照軌道の時間履歴を第3図に示す。また ϕ, θ, ψ の時間履歴を第4図に、リアクション・ホイールによる制御入力 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ とリアクション・ジェット

による制御入力 T_x, T_y, T_z の時間履歴を、第5図と第6図に、それぞれ示す。

シャトルは、約60秒間で、軌道速度方向と逆向きに90度変更していることがわかる。

第3図 参照軌道の時間履歴

4.2 飛行船の非線形への応用 飛行船の制御入力として、エレベータ角、推力、ベクター角（偏向推力角）を与え、ピッチングと縦運動をゼロで拘束した状態において、5分間で飛行速度を $0 \sim 20 \text{ m/s}$ (65.61 ft/s) まで、等加速度でレベルフライトする条件でのトラッキング最適制御のシミュレーションを行う。ピッチングと、水平・上下方向のみの運動を考え、

第4図 オイラー角の時間履歴

第5図 リアクション・ホイールの角速度（制御入力）の時間履歴

第6図 リアクション・ジェット（制御入力）の時間履歴

誤差を $e = x - x_r = \left[U - \frac{65.61}{300}t, w, q, \theta \right]^T$, 制御力を $u = [T, \mu, \delta_e]^T$ とし, この時の評価関数

$$J = \int_0^{t_f} (e^T Q e + u^T R u) dt \quad (29)$$

の最適化を検討した. ここで, x_r は参照出力, x は出力とし, 初期時間 $t_0 = 0$, 終端時間 $t_f = 300$, $Q = \text{diag}(0.1, 0.01, 0.001, 0.1)$, $R = \text{diag}(0.1, 0.01, 0.01)$ を, 各々与えている.

飛行船の物理量として, $m = B = 13,100$ [lb], $I_y = 627,600$ [slug×ft], $a_x = 0$ [ft], $a_z = 17$ [ft], $b_x = 0$ [ft], $b_z = 6.6$ [ft], $d_x = 0$ [ft], $d_z = 25$ [ft], $X'_u = -0.06m$, $Z'_w = -1.01m$, $X'_q = 0$, $X'_u = -0.0326$, $X'_w = -0.0388$,

$X'_q = 3.01$, $X'_\delta = 0.703$, $X'_\theta = 1.55$, $Z'_q = 0$, $Z'_u = -0.0046$, $Z'_w = -0.284$, $Z'_q = 15.5$, $Z'_\delta = -1.92$, $M'_u = M'_w = M'_q = 0$, $M'_u = -0.0001$, $M'_w = 0.0001$, $M'_q = -0.361$, $M'_\delta = -0.088$, $M'_\theta = -0.133$ を与えるものとする.

第7図が結果であり, この時の制御入力の時履歴を第8図に示す.

終端速度までの等加速度運動を行わせているため, 出力 U は, ほぼ直線的に増加している. その影響が, 他出力へ若干見られるが, 絶対量は小さい. 飛行船の可動部分, 例えばエレベーター角 ± 15 度の制約や, 鉛直航空測量によるピッチ角 ± 3 度などの条件は, クリアしていると判断できる.

第7図 速度(U, W)とピッチ角(θ)の時履歴

第8図 制御入力(T, μ, δ_e)の時履歴

5. 提案した非線形制御手法の特徴

数値解析の結果, 本稿で提案した非線形制御手法は, 以下のような特徴があることがわかった.

- (1) デカップルにより, 大きなシステムを分割して計算することができ, 計算速度と信頼性の向上が見込める.
- (2) 随伴変数を消去したため2点境界値問題や, 複雑な非線形リッカチ方程式を解く必要がない.
- (3) システムの参照出力を与えることにより, 共役な点を見つけることができる. ただし参照出力の求め方には, まだ議論の余地がある.
- (4) テイラー展開などによるフィードバック制御法の数値解

よりも, 計算時間の短縮と精度の向上が期待できるため, 現在より複雑なシステムへの応用も期待できる.

- (5) 完全な線形化を図ることにより, 実在の世界が非線形になり, 評価関数の意味を考えると, 線形制御以上に慎重にならなければならない.
- (6) 重み行列の設定が難しく, 試行錯誤する時間を要する.

6. まとめ

非線形フィードバック制御における階層的微分最適手法を基礎とした, 制御アルゴリズムの提案を行い, 航空宇宙機の非線形制御の例として, 軌道から帰還操作のために大きくピッチ角を変更させるスペースシャトルの非線形運動と, 地表面観測の

ためにピッチングと上下運動を拘束した状態で等加速度水平飛行を行う飛行船の非線形運動へ応用し、最適なフィードバック制御問題を解いた。

この制御アルゴリズムは、テイラー展開・緩和法などを用いるよりも、シンプルで計算時間も短くてすみ、精度も向上させるものである。また、トラジェクトリーコントロールやスピンアップ問題などのより複雑な非線形問題にも応用が可能であるといえる。

非線形制御に関し、航空宇宙機分野における研究は活発に取り組まれており、この分野での活用を更に検討していきたい。

参 考 文 献

- 1) Devaud, E., Harcaut, J.-P. and Siguerdidjane, H. : Three-Axes Missile Autopilot Design: From Linear to Nonlinear Control Strategies, J. Guid. Control Dynam., **24**, 10 (2001), pp. 64-71.
- 2) 三平満司:非線形システム制御理論の展望, 計測と制御, 42(2003), pp. 786-788.
- 3) Schaft, V.D. : Port-Controlled Hamiltonian Systems: Towards a Theory for Control and Design of Nonlinear Physical Systems, 計測と制御, **39**(2000), pp. 91-98.
- 4) 日本機械学会編:制御システム, 機械工学便覧デザイン編, β 6, 日本機械学会, 2006.
- 5) An, A., Xu, K., Fujii, H.A., Kusagaya, T., Kojima, H. and Iwasaki, M. : Nonlinear Optimal Control in Space Satellite Application, American Astronautical Society, AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Quebec Canada, July 30-August 2 2001, Paper AAS 01-366.
- 6) Kusagaya, T., Fujii, H.A., Sakamoto, T., Kojima, H. and Watanabe, T. : Nonlinear Optimal Control Applied to Longitudinal Motion of an Airship, AIAA's 3rd Annual Aviation Technology, Integration, and Operations (ATIO), Denver Colorado, 17-19 Nov. 2003, lighter-than-air/balloon systems Paper No. 30.
- 7) Xing, G. Q. and Parvez, S. A. : Nonlinear Attitude State Tracking Control for Spacecraft, J. Guid. Control Dynam., **24**(2001), pp. 624-626.
- 8) Fujii, H. and Ishijima, S. : Mission-Function Control for Slew Maneuver of a Flexible Space Structure, J. Guid. Control Dynam., **12**(1989), pp. 858-865.
- 9) Fujii, H. and Ishijima, S. : Mission-Function Control for Deployment and Retrieval of a Subsatellite, J. Guid. Control Dynam., **12**(1989), pp. 243-247.
- 10) Hall, C. D., Tsiotras, P. and Shen, H. : Tracking Rigid Body Motion Using Thrusters and Momentum Wheels, AIAA Paper 98-4471, Aug. 1998.
- 11) Sira-Ramirez, H. and Fliess, M. : A sliding Mode Control Approach to Predictive Regulation, Int. J. of Control Theory and Advanced Technology, **10**, 4part3(1995), pp. 1297-1316.
- 12) Dwyer, T. A. W. and Ramirez, H. S. : Variable-Structure Control of Spacecraft Attitude Maneuvers, J. Guid. Control Dynam., **11**, 3(1988), pp. 262-269.
- 13) Bryson, A. E., Jr. and Ho, Y. C. : Applied Optimal Control, Hemisphere Publishing Cooperation, 1975.
- 14) Jo, J. W. and Prussing, J. E. : Procedure for Applying Second-Order Conditions in Optimal Control Problems, J. Guid. Control Dynam., **23**(2000), pp. 241-250.
- 15) Abdulgalil, F. and Siguerdidjane, H. : Nonlinear Control Design for Suppressing Stick-Slip Oscillations in Oil Well Drillstrings, 5th IEEE Asian Control Conference ASCC' 04, Melbourne, July 2004, Paper 188.
- 16) Boudache-Siguerdidjane, H. : On Application of a New Method for Computing Optimal Nonlinear Feedback Controls, Optimal Control Applications & Methods, **8**(1987), pp. 397-408.
- 17) Hauser, J., Sastry, S. and Meyer, G. : On the Design of Nonlinear Controllers for Flight Control Systems, 89-3489-CP, 1989, pp. 546-555.
- 18) Fliess, M., Sira-Ramirez, H. and Marquez, R. : Regulation of Non-Minimum Phase Outputs: a Flatness Based Approach: In Perspectives in Control, Theory and Applications, Normand-Cyrot D(ed.), Springer, London, 1998, pp. 143-163.
- 19) Cook, M. V. : Stability and Control, Airship Technology : Cambridge Aerospace Series 10, Cambridge University Press, 1999, pp. 73-105.
- 20) Azinheira, J. R., de Paiva, E. C. and Bueno, S. S. : Influence of Wind Speed on Airship Dynamics, J. Guid. Control Dynam., **25**(2002), pp. 1116-1124.
- 21) Gomes, S. B. V. : An Investigation of the Flight Dynamics of Airships with Application to the YEZ-2A, Ph. D. Dissertation, College of Aeronautics, Cranfield Univ., Cranfield, Engrand, U.K., Oct(1990).
- 22) Jex, H. R. and Gelhausen, P. : Pre and Post Flight Test Models Versus Measured Skyship-500 Control Responses, AIAA 7th Lighter-Than-Air Technology Conference, AIAA CP879, Monterey CA, August 17-19 1987, pp. 87-99.
- 23) An, D., Hu, Z. and Song, S. : Geometry Nonlinear Optimal Feedback Tracing in Helicopter Positioning Control, ICAS, Paper ICAS-94-7.7.3, 1994, pp. 2566-2573.
- 24) Isidori, A. , Nonlinear Control System - An Introduction -, Springer-Verlag, 1989.
- 25) Fliess, M. : Lie Brackets and Optimal Nonlinear Feedback Regulation, Preprints of IFAC 9th World Congress, 1984, pp. 1489-1493.
- 26) Fliess, M. : On a Possible Connection Between Volterra Series and Nonlinear Optimal Control, Proceedings of Conference in International Science Series, 1983, pp. 402-407.
- 27) Kowski, M. : Bases for Lie algebras and a continuous CBH formula, Geometry and Algebra of Nonlinear Control Systems, National Science Foundation DMS 00-72369, 2004, pp. 1-6.