成長曲線について

On a Graphical Method of Determination of Parameters

contained in the Logistic Type Curves

吉原友吉 Tomoyoshi YOSHIHARA

(東京水産大学)

Last year E.A. Rasor gave a method which enables us to calculate the constants of the Logistic curve. On the other hand M. Masuyama remarked the method on a footnote of his paper and gave the name "Method of Difference Diagram". I devised the similar method a year before them, but did not published it. In 1946 L.A. Walford gave a new graphic method of describing the growth of animals. His method is to transform the growth curve into a straight line. By the three methods above-mentioned we can transform the Logistic curve into a straight line. Masuyama and Rasor considered nothing but the case when the slope of line is smaller than unit. If the line passes the origin or did not cross the bisector of coordinates axes in the first quadrant, the growth curve will not represented by the Logistic equation. I found that in these cases we have several types of the Logistic type curve which Wilson and Puffer classified in their paper. In § 2, I will show how to get the Logistic equation by solving the difference equation and why I can get the transformed line by plotting reciprocals of the growth data. Next, several types of the growth curve corresponding to each position of transformed line are presented. In § 3, the method of determining constants of the Logistic type curves by graphic method and hypothetical examples and an application are given.

§ 1. 緒論 Logistic 曲線 (以下 L 曲線と略す) は成長曲線として広く用いられ、種々な性質が研究されている、最近 Rasor (1949) は L 曲線の常数を図式で求める方法を発表した、同様な性質を増山 (1948) も述べている、著者も亦両氏より以前に同じ結果を得ていた。本報はこの点について述べたものである。Rasor の方法は直接常数の値が求められるが、図式を準備するに若干の手間を要する。増山は単に脚註に述べた事で詳しい性質については触れていない。本年井上は L 曲線の一つの拡張として、 $Y = L \cdot (1 + e^{a+bt})^{-n}$ を考え之について図式により常数を求める方法を発表した。 $n=1$ とすれば通常の L 曲線となる。

§ 2. 定差図、等時間隔 h で成長量 (体重、体長、個体数等) を測定し、 $f(x), f(x+h), \dots, f(x+ih)$ なる値を得たとし、直交座標軸 (u, v) 上に点列 $[f(x), f(x+h)], [f(x+h), f(x+2h)], \dots$ をとるときこれらの点列が一直線上に並ぶならば次の関係式が成立する。こゝに x は時間を表わす。

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & 1 \\ f(x+h) & f(x+2h) & 1 \\ f(x+2h) & f(x+3h) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ とおいて変形すると

$$\Delta f(x) \cdot \Delta f(x+2h) = [\Delta f(x+h)]^2$$

$g(x) = \log \Delta f(x)$ とおくと

(昭和 25 年 6 月 20 日受理)

$$g(x) + g(x+2h) = 2g(x+h) \quad (2)$$

この函数方程式の解は容易に求まり従つて

$$f(x) = a' + b' \cdot e^{-n/x} \quad (3)$$

を得る。ここに a' , b' , h' は常数である。

以上によつて、測定値が L 曲線で表わされるとき之を直線に変換することが出来る、 L 曲線の式として

$$y = L/(1 + e^{A-Bx}) \quad (4)$$

を用い且

$$z = 1/y \quad (5)$$

とおく、(4) が L 曲線を表わす爲には二つの条件

$$0 < L < \infty, \quad B < 0 \quad (6)$$

を満足せねばならない、

x の相隣る 3 つの値に対する y の値を y_0, y_1, y_2 として上記座標軸上に 2 点 $(1/y_0, 1/y_1)$ 及 $(1/y_1, 1/y_2)$ をとりこの 2 点を結ぶ直線と直線 $v=u$ との交点を Ω とする。(才 1 図) 又上記直線の方程式を

才 1 図 定 差 図

$$v = p + q \cdot u \quad (7)$$

とする。但 p 及 q は常数である。然るときは点 Ω の座標は $(1/L, 1/L)$ で与えられる。

もし n 個の測定値より $(n-1)$ 個の点を作れば

$$\begin{aligned} z_2 &= p + qz_1, \quad z_3 = p + qz_2, \\ &\dots\dots\dots z_n = p + qz_{n-1} \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。この p, q を最小自乗法で決定すれば

$$p = \frac{\sum z_j \cdot z_{j+1} \sum z_j - \sum z_{j+1} \cdot \sum z_j^2}{(\sum z_j)^2 - (n-1) \sum z_j^2} \quad q = \frac{\sum z_{j+1} \sum z_j - (n-1) \sum z_j \cdot z_{j+1}}{(\sum z_j)^2 - (n-1) \cdot \sum z_j^2} \quad (9)$$

となり、更に (4) を用いて変形すると

$$p = (1 - e^{-Bh})/L, \quad q = e^{-Bh} \quad \text{従つて} \quad L = (1-q)/p \quad (10)$$

を得る。直線 (7) が u 軸となす角を θ とすると

$$0 < \theta < 45^\circ \quad \text{即} \quad 0 < q < 1 \quad (11)$$

なる関係を得る。(11) は測定値が L 曲線で表わされる爲の条件である。増山に従い直線 (7) により L 曲線の常数を定める方法を定差図による解法と称する。

扱 Wilson and Puffer (1932) は L 曲線の式として

$$y = 1/(a + be^{-nx}) \quad (12)$$

を用いた。今 $c = e^{-nx}$ とおくと上式は $y = a + b \cdot c$ となる。時点 $0, x, 2x$ における値を z_0, z_1, z_2 とすると

$$z_0 = a + b, \quad z_1 = a + bc, \quad z_2 = a + bc^2 \quad (13)$$

が成立つ、且 $z_0 > z_1 > z_2$ である。上式を a, b, c について解くと

$$a = \frac{E}{D} = z_1 - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad b = \frac{(z_1 - z_0)^2}{D} = \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}, \quad c = \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_1} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (14)$$

但

$$\begin{aligned} x = z_0 - z_1 > 0, & \quad \beta = z_1 - z_2 > 0 \\ D = z_0 - 2z_1 + z_2, & \quad E = z_0 z_2 - z_1^2 \end{aligned} \quad (15)$$

両氏は D, E の符号により L 型曲線を次の如く分類した

- I $D > 0, E > 0$ Hypermalthusian with Saturation
- II $D > 0, E = 0$ Malthusian no Saturation
- III $D > 0, E < 0$ Hypermalthusian no Saturation
- IV $D = 0, E < 0$ Critical no Saturation
- V $D < 0, E < 0$ Hypercritical no Saturation

(15) を用いて各型に対する判定条件を求めると次の如くなる

	a	b	c	D	E
I	+	+	<1	+	+
II	0	+	<1	+	0
III	-	+	<1	+	-
IV	$-\infty$	$+\infty$	=1	0	-
V	+	-	>1	-	-

§ 3. 型の決定及例解

座標原点を o , u 及 v 軸上 o より z_0 なる距離にある 2 点を T 及 P' とし両軸の 2 等分線上に点 P をとり正方形 $OP'PT$ を作る, $T'P$ 上に $T'Q = z_1$ なる Q , OT' 上 $OT' = z_1$ なる T'' をとり T'' にて u 軸に垂線を立て OP との交点を Q' とし, OQ と $Q'T''$ との交点を R_0' , 又 Q より OP に平行に引いた直線と $Q'T''$ との交点を S' とする。点 Q の座標は (z_0, z_1) であるから Q の点 (z_1, z_2) を R' とすると, この点 R' が

- (i) 線分 $Q'R_0'$ 上にあれば オ I 型
- (ii) 点 R_0' と一致すれば オ II 型
- (iii) 線分 $R_0'S'$ 上にあれば オ III 型
- (iv) 点 S' と一致すれば オ IV 型
- (v) 線分 $S'T''$ 上にあれば オ V 型

であることが (15) 及 (16) を用いて容易にわかる。且以上の関係と L 曲線の式 (4) 及 (12) を対応させると

- (i) Ω の座標は $(1/L, 1/L)$ 即 (a, a) であるから之より a は直ちに求まる
- (ii) $a + b = z_1 + \alpha = z_0$ により b が求まる
- (iii) $c = \beta/\alpha$ から c が求まる

斯くて L 型曲線の常数を図式によつて決定することが出来る。而して I 型のみが L 曲線を表わし

オ 2 図

II 型はマルサスの法則を III 型以下は L 曲線に類似するが x の有限値で y が ∞ になる点で異なっている。詳細は才 1 表の例に示す如くである。尙 Walford (1946) も他の型の成長曲線を図式で扱う方法を発表しているので結局合計 7 種の成長曲線を図式によつて解くことが出来る。更に本来は死亡法則を表わす Makeham の式 $-d\log l/dx = a + b \cdot c^x$ 及び Gompertz の式 $y = y_0 e^{a + b \cdot c^x}$ は成長法則としても用いられることがあるがこれらの式にも $a + b \cdot e^{-nx}$ の型の項を含んでいることに注意すれば $a + b e^{-nx}$ の型の式の常数を図式で簡易迅速に決定出来ることは種々な点で便益を与えることと思われる。近年 L 曲線の常数決定法として計算図表を用いる方法 (Spurr and Arnold 1948) や前記 Rasor の方法等が発表されているが何等の準備を要せず簡便に実施出来る点で本篇の方法は優れている。併し後出例解に示す如く精度の稍良くないのが欠点である。

Table 1.

Hypothetical examples of various types of the Logistic type curve where $\alpha = z_0 - z_1$, $\beta = z_1 - z_2$, $D = \alpha - \beta$, $a = z_0 - b$, $b = \alpha^2/D$, $c = \beta/\alpha$ Examples of type IV and V are arranged by the order of $z_1 > 1/2$, $z_1 = 1/2$, $z_1 < 1/2$ and y_1 accordingly z_0 are equal to unit always.

Type	y	y	z	z	α	β	D	a	b	c	Formulas
I	1.5	2	2/3	1/2	1/3	1/6	1/6	1/3	2/3	1/2	$y = 3(1 + 21 - x)^{-1}$
II	1.5	9/4	2/3	4/9	1/3	2/9	1/9	.0	1	2/3	$y = 1.5^x$
III	1.5	2.4	2/3	5/12	1/3	1/4	1/12	-1/3	4/3	3/4	$y = 3(-1 + 4 \cdot 3 \cdot 4 x)^{-1}$
IV-1	1.5	3	2/3	1/3	1/3	1/3	0	$-\infty$	$+\infty$	1	$y = (1 - x/3)^{-1}$
V-1	1.5	9	2/3	1/9	1/3	5/9	-2/9	3/2	-1/2	5/3	$y = 2(3 - (5/3 x)^{-1})$
IV-2	2	∞	1/2	0	1/2	1/2	0	$-\infty$	$+\infty$	1	$y = (1 - x/2)^{-1}$
IV-3	3	(-3)	1/3	(-1/3)	2/3	2/3	0	$-\infty$	$+\infty$	1	$y = (1 - (2x/3))^{-1}$
V-2	2	(-2)	1/2	(-1/2)	1/2	1	-1/2	3/2	-1/2	2	$y = 2 \cdot 3 - 2x)^{-1}$

Table 2.

The growth of population of United States since 1760.

t	x	$y(\times 10^8)$	$z = 1/y$
1790	0	3.9292	0.25582
1800	1	5.3084	18939
10	2	7.2399	13885
20	3	9.6385	10431
30	4	12.8660	07770
40	5	17.0695	05858
50	6	23.1919	04312
60	7	31.4433	03188
70	8	38.5584	02573
80	9	50.1558	01994
90	10	62.9477	01589
1900	11	75.9946	01316
10	12	91.9723	01083
20	13	105.7106	00943
30	14	122.7750	00812
40	15	131.6693	00760

オ 1 表は $y_0=1, y_1=1.5, y_2=2 \sim 9$ に対し上記 5 種の曲線の得られることを示している。

オ 2 表は L 曲線の例として屢々米国の人口増加が用いられるので他の研究との比較の爲掲げた、年次を t , この原点を t_0 , 時間間隔即調査間隔を h とし

$$x=(t-t_0)/h, \quad t_1=t_0+h, \quad t_2=t_1+h \quad (17)$$

とおくと, (14) は次の如くなる

$$z=1/y=a+b \cdot e^{-\alpha x}=\left(z_1-\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)e^{-(t-t_1)/h} \quad (18)$$

本例では $h=10, t_0=1790$ として定差図(オ 3 図)を画くと直線 QR' に対し $\theta=36.05$ となつて常数 α を正確に決定出来ない(オ 3 図 (i)) 然るに (10) より

$$\tan\theta=q=e^{-\beta h}$$

であるから h を大にすれば θ は小さくなる, 依つて, $h=50, t_0=1830, t_1=1880, t_2=1930$ として定差図を画き

$$a=0.055, b=0.0722, c=0.192,$$

$$\alpha\beta/(\alpha-\beta)=0.0144$$

を得る(オ 3 図 (ii))。これより L 曲線の式として

$$y=1/(0.0055+(0.0144)(0.192)$$

$$(t-1830)/50)=182/(1+e \times p[3.928-0.330(t-1790)/10]) \quad (19)$$

直接 (14) を用いて計算すれば

$$y=1/(0.00507+(0.01486)(0.2045)(t-1880)/50)=196.85/(1+exp.(3.932-0.3174(t-1790)/10)) \quad (20)$$

両者の計算値を比較すれば下表の如くである。

年次 t	1790	1830	1880	1930
x	0	4	9	14
人口 y	3.929	12.866	50.156	122.775
式 (19)	3.51	12.45	50.4	121.2
式 (20)	3.785	12.857	50.085	122.94

x の整数値に対しては定差図より容易に y の値が求まるが x の非整数値に対しても次の如くして y の値を図式により求められる。

$$\text{先ず線分 } \Omega R', \Omega Q \text{ を } \alpha, \beta \text{ で表わすと } \Omega R':\Omega Q=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}:\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\beta}{\alpha}$$

である。一般に点 $R^{(m)}$ の座標を (Z_m, Z_{m+1}) とすれば $Z_m=a+b \cdot e^m, Z_{m+1}=a+b e^{m+1}$ であるから

$$\Omega R^{(m)}=[(b \cdot e^{m+1})^2+(b \cdot e^m)^2]^{1/2}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$$

故に $\Omega R^{(m+1)}:\Omega R^{(m)}=\beta/\alpha$ 。により m の整数値に対しては容易に点 $R^{(m)}$ が図上に求まる。(オ 3 図 階段曲線 (iii))。又 m が整数でないとき例えば調査年度の中央年 $x=m+1/2$ における値は

オ 3 図

$$\Omega R^{(m+1/2)} : \Omega R^{(m)} = \Omega R^{(m+1)} : \Omega R^{(m+1/2)} = \sqrt{\beta/a}$$

より

$$\Omega R^{(m+1/2)} = [\Omega R^{(m)} \cdot \Omega R^{(m+1)}]^{1/2}$$

と求まる。

(文 献)

Rasor, E. A. The fitting of Logistic curve by mean of a nomograph. J. Amer. Stat. Assoc. 44 (No. 248), 1949, 548-553.

Walford, L. A. A new graphic method of describing the growth of animals. Biol. Bull. 90 (2), 1946, 141-147.

Wilson, E. B. and R. R. Puffer. Least squares and law of population growth. Proc. Amer. Acad. Art and Sci. 68, 1932, 285-382.

Spurr, W. A. and D. R. Arnold. A short-cut method of fitting a Logistic curve. J. Amer. Stat. Assoc. 1948.

増山元三郎 Masuyama, M., 非心型 Laugevin 氏確率方程式の中の常数の図式推定法とその臨床医学的応用. 統計数理研究. 2(2). 1948. 30-32.

井上国勝 新しい生長曲線の作製とその曲線のあてはめ 日本数学会 昭和 25 年度会講演.