る測定値を上廻る。

(3) 加熱した Kitol 中には 325 mμ に吸収の極大を有する物質以外に A 効力のあるものが生成するらしい。

本研究を行うに当り動物試験に関し御懇篤な御助言を戴いた佐橋博士及び飼料製造、動物飼育に盡力された石井清之助、福泉良子、荒井君枝の三氏に厚く謝意を表する。

文 献

- 1) Norris D. Embree and Edgar M. Shantz J. A. C. S. 65. 910. 1943
- 2) 佐橋, 中山, 平尾, 衣巻, 日水学 16. 46. 1950
- 3) N. T. Gridgeman, G. P. Gibson and J. P. Savage Analyst 73 No. 873. 662. 1948
- 4) K. A. Coward "The biological standardization of the Vitamins." London 1938

増殖に関する Pearl 係数に就いて

藤 田 博

(京都大学農学部水産学教室)

A Note on PEARL's Coefficient for the Increase of Bacteria in a Culture Medium.

by

Hiroshi FUJITA

In this short note, the author provides some remarks on the derivation of the rate equation for the increase of bacterin in a culture medium of finite dimension and attempts to clarify the significance of PEARL's coefficient in the rate equation.

§ 1. 有限な大いさの培養基内における微生物の増殖の過程が化学反応における自己触媒単分子反応と同一の様式であることはよく知られている所である。即ち、任意時刻における培養基内の微生物の数を N で表わすと、増殖率 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ は次の関係式で規定される:

$$(1) \quad \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \varepsilon - hN;$$

ここに ε, h は定数であつて、夫々、増殖係数、制限因子 (或は Pearl 係数と称えられる。培養基の大いさが十分大きくなると、 $h \rightarrow 0$ となる。従つて、Pearl 係数は培養基の大いさの有限なためにあらわれるもので、この係数のために生ずる増殖過程への影響は Pearl 効果と称せられている。

さて、(1) を導くに際しては通常次の様な考えが用いられている: 培養基の大いさが限りなく大きい時には増殖率 ε は一定、即ち、

$$(2) \quad \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \varepsilon$$

であるが、培養基の大いさが有限となると、 N の増大と共に微生物の攝り得る養分の濃度が減少する

昭和 25 年 8 月 7 日受理

であろうから、増殖率は一定 ε でなくなり、現存微生物数 N に関係してくるであろう。従つて、一般に、 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = f(N)$ (f は N の或る函数) と書けるが、第 1 近似として、 $f(N)$ を N の一次式で近似して、

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \varepsilon - hN$$

とすれば、(1) が導出されるとするのである [1]。

しかし乍ら、斯様な考えでは h の具体的な意味がはつきりとわからない。実際、培養基の大きさが大きくなる時、どのような形で $h \rightarrow 0$ となるかも知ることができない。そこで、著者は以下において、別の考えから (1) 式を導き、Pearl 係数 h の意味をもう少しはつきりさせてみようと思う。

§ 2. 有限な体積 V の培養基内で微生物が増殖する過程を考察する。今、一匹の微生物が単位時間に食を求めて動く体積を v 、時刻 τ における培養基内の養分濃度を $a(\tau)$ とすると、一匹の微生物が単位時間に攝取する養分は $\lambda va(\tau)$ で表わされる；こゝに $\lambda (0 < \lambda \leq 1)$ は或る定数とする。従つて、時刻 τ における微生物数を $N(\tau)$ とすれば、 $\tau=0$ から $\tau=t$ までに培養基からとりさられた養分の総量 $P(t)$ は

$$(3) \quad P(t) = \int_0^t \lambda va(\tau) N(\tau) d\tau$$

与えられる。 $t=0$ においては $a=a(0) \equiv a_0$ とすれば、時刻 t において培養基に残存する養分量 $Q(t)$ は

$$(4) \quad Q(t) = Va_0 - \int_0^t \lambda va(\tau) N(\tau) d\tau$$

で表わされるから、その濃度 $a(t)$ は、結局、次の式で与えられる：

$$(5) \quad a(t) = a_0 - \frac{\lambda v}{V} \int_0^t a(\tau) N(\tau) d\tau.$$

ところで、微生物の増殖率 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ は前述の λva なる量に関係するから、

$$(6) \quad \lambda va = G \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)$$

とおくことができるであろう。こゝに G は引数の或る函数であるが、その函数形は微生物の種類、養分の種類、温度、 pH などによつて定まる生物学的なもので、培養基の幾何学的な量にはよらないと考えられる。(6) を (5) に入れれば、

$$(7) \quad G \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) = a_0 \lambda v - \frac{\lambda v}{V} \int_0^t G \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{d\tau} \right) N d\tau$$

を得る。

これが N と t の関係を与える一般式であつて、与えられた G の下にこれを解くことによつて増殖過程が追求できる。

§ 3. さて、(7) が (1) の形の増殖方程式を与えるには G がどんな形でなければならないかを調べてみよう。今、(1) の形の式が成り立つとすれば、(7) は

$$(8) \quad G(\varepsilon - hN) = a_0 \lambda v - \frac{\lambda v}{V} \int_{N_0}^N \frac{G(\varepsilon - hN)}{\varepsilon - hN} dN$$

となる。この両辺を N で微分すれば、

$$\frac{dG(\varepsilon - hN)}{N(\varepsilon - hN)} = - \frac{\lambda v}{V} \frac{dN}{\varepsilon - hN}$$

が得られる。これを積分して、積分定数を C とおけば

$$G(\varepsilon - hN) = C(\varepsilon - hN)^{\frac{\lambda v}{Vh}},$$

或は

$$(9) \quad G\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right) = C\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right)^{\frac{\lambda v}{Vh}}$$

よつて、(7) が (1) の形の方程式を与えるには増殖率 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ が一匹の微生物の養分攝取速度 λva と次の様な関係になければならない;

$$(10) \quad \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = C'(\lambda va)^{\frac{Vh}{\lambda v}} \quad (C': \text{定数}).$$

逆に、(9) 或は (10) なる関係があれば、(7) は (1) 型の式を与えることも証明される。実際、(7) を t で微分することによつて、

$$(11) \quad \frac{d}{dt} G\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right) = -\frac{\lambda v}{V} G\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right) N$$

が成立する。しかるに、(9) なる関係があれば、

$$\frac{d}{dt} G\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right) = G\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right)^{\frac{\lambda v}{Vh}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right) / \frac{1}{N} \frac{dN}{dt},$$

従つて、(11) と比較することによつて、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right) = -h \frac{dN}{dt}$$

となる。これを積分すれば、正に (1) 型の式を得る。

従つて、(1) 型の増殖様式は、一匹の微生物の増殖速度が養分濃度の任意な一つのべき乗に比例するという場合にのみあらわれるのであつて、そのべき数を α とすると、Pearl 係数 h は

$$(12) \quad h = \frac{\lambda v}{V} \alpha$$

なる形に表わされる。しかるに、§.2 で注意した様に、一般に (6) なる関係式、従つて、(9) 或は (10) なる関係式は生物学的なものであるから、べき数 α は V によらないものとみなされる。しかし、 λ 及び v も一応生物学的な因子と考えられるから、それに対する V の影響は無視することが許されるであらう。よつて、結局、Pearl 係数 h は培養基の幾何学的な因子に関しては単に $\frac{1}{V}$ に比例する量であると考えることができる。従つて、§1 で述べた様に、 $V \rightarrow \infty$ の時 $h \rightarrow 0$ となることも埋解される。

最後に、著者は御懇篤なる御注意を与えられ、原稿を御校閲下さつた東京工業大学教授小松勇作博士に厚く御礼申し上げる。

文 献

(1) 小 松 勇 作: 数理生物学概論 (1950), 中山書店