年令組成から推定された生残率の比推定による精度 計算法—I 魚体抽出が単純抽出であつた場合

田 中 昌 一

(東海区水産研究所)

The Method to Calculate Precision of Survival Rate
Estimated from Age-Composition, by Ratio Estimate—I.
A Method Applied to Random Sampling
Syoiti TANAKA

If, in a fish population, each age-group decreases at a uniform survival rate ρ from year to year between a -age to $a+k-1$ -age, the rate ρ can be estimated from sample by the formula

$$\rho' = \frac{n_{a+1} + n_{a+2} + \cdots + n_{a+k-1}}{n_a + n_{a+1} + \cdots + n_{a+k-2}},$$

where the terms $n_a, n_{a+1}, \cdots, n_{a+k-1}$ are the numbers of fish at ages $a, a+1, \cdots, a+k-1$ in the sample respectively.

Now, two variates x, y are given each individual of fish, and their values are defined as below:

Age of fish	Value of x	Value of y
(A) a	0	1
(B) $a+1 \sim a+k-2$	1	1
(C) $a+k-1$	1	0
(D) Others	0	0

Then ρ' is expressed as

$$\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\sum_{j=1}^n y_j}$$

This shows that ρ' is a ratio of sum of x and sum of y in the sample, and sampling error of ρ' can be estimated by the method of Ratio Estimate. The coefficient of Variation of ρ' ($C_{\rho'}$) is approximately

$$\left[\frac{1}{n(1-p_D)} \frac{(1-\rho)(1-\rho^k)(1+\rho^{k-1})}{\rho(1-\rho^{k-1})^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

where n is size of sample, and p_D is the proportion of D age-group in the population. When $k=2$ (survival rate of a -age fish to $a+1$ -age), this formula is reduced to

$$\left[\frac{1}{n(1-p_D)} \frac{(1+\rho)^2}{\rho} \right] \frac{1}{2}$$

These relations are illustrated in the Figure.

I まえがき

年令組成から生残率を計算する場合、その抽出誤差を見積る事は、抽出計画を設計し、或は得られた結果によつて議論する上にぜひ必要である。従つて今迄にも栗田¹⁾ 土井²⁾ 等により、この精度が論ぜられているが、いずれも単純任意抽出の場合について解かれている。しかし、実際に魚体抽出を行う場合、単純抽出による事はほとんど考えられず、多段抽出法その他によつてゐる。このため、あらゆる抽出法に適合する精度計算法を求める事が重要である。

ところで、特定の二年令群を比較する場合でも、又 Lea の方法によつて年々の生残率を求める場合でも結局はある二つの階級——一つ或は二つ以上の年令群を合せた階級で、この二つの階級は排反的でなくともよい——に属する魚の尾数又は割合の比をとることに帰着される。

ある階級に属する魚の数又は割合は、例えばこの階級に属する魚体には $x=1$ 、その他には $x=0$ を対応させる時、尾数は x の総和、割合は x の平均として表わされる。従つて二つの階級の場合には x, y を考え、上の如く x, y を定義すると、二つの階級に属する尾数又は割合の比は、 x, y の合計、或は平均の比として表わされる事になる。この和又は平均の比の標本分布については、比推定の問題として解かれているので、この公式を利用して、特定の抽出法によつて得られた生残率の推定値の精度が求められる。

ここで母集団を定義しなければならないが、この母集団は、年令組成から計算された ρ が真の生残率であらわすという生物学的条件を満たさなければならない。したがつて、当然海中の魚群体である。しかるに、我々が入手し得る魚体は商業的であるといふにかゝらず、漁獲という手段によつて海中からとり出された魚群体の一部にすぎないので、漁獲が確率的に行われていなければならない*。以上の条件は極めて厳格で、これを完全に満足する場合は実際にはあまり考えられないが、少くとも近似的に満されていると考えられる場合以外には利用出来ない。ただし、 ρ を生残率という生物学的意味からはなして、ただ二つの階級に属する魚体の割合の比と考えるならば、漁獲物そのものを母集団と定義する事も出来る。

この方法は任意抽出以外の場合にも適用出来るのであるが、以下に於ては先ず、任意抽出の場合について述べる。

II Lea の方法によつて求めた生残率の精度

ある独立した魚群体において、各年令群の生残率が ρ に等しく、しかも年々の変動もなく、又毎年の添加量が同じであるとする、母年令組成は等比級数的分布となり、 ρ はこの級数の公比としてあらわれてくる。この性質を応用して年令組成から ρ が計算される。たとえば、今 a 才から $a+k-1$ 才の間で年令組成が等比級数的に減少していたとすると、各年令群の尾数を $N_a, N_{a+1}, \dots$ の如くあらわして、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{N_{a+1}}{N_a} = \frac{N_{a+2}}{N_{a+1}} = \dots = \frac{N_{a+k-1}}{N_{a+k-2}} \\ &= \frac{(N_{a+1} + N_{a+2} + \dots + N_{a+k-2}) + N_{a+k-1}}{N_a + (N_{a+1} + N_{a+2} + \dots + N_{a+k-2})} \end{aligned} \quad (1)$$

* もし漁業が確率的に行われているならば、漁獲物そのものを母集団と考える事が出来る。なぜならば、漁獲物は極めて大きな標本であるため、この様な条件のもとでは海中の母集団に等しいと考えられるから。

これを, a 才を A , $a+1$ 才 $\sim a+k-2$ 才を B , $a+k-1$ 才を C , 他を D と四つの階級にわけたとすると上の (1) 式は

$$\rho = \frac{N_B + N_C}{N_A + N_B} = \frac{P_B + P_C}{P_A + P_B} \quad (2)$$

となる。但し N_A 等は各階級の尾数, P_A 等は割合を示す。ここで, この母集団から大きさ n の標本を任意抽出した時, この ρ に対して

$$\rho' = \frac{n_B + n_C}{n_A + n_B} = \frac{P_B' + P_C'}{P_A' + P_B'} \quad (3)$$

なる標本量を考える。 n_A, P_A' 等は標本における各階級の尾数及び割合をあらわす。

ここで x, y を次の様に定義する。

j -魚体の属する階級	j -魚体の x の値: x_j	j -魚体の y の値: y_j
A	0	1
B	1	1
C	1	0
D	0	0

(4)

この様にすると,

$$\left. \begin{aligned} N_A + N_B &= \sum_{j=1}^N y_j = Y & P_A + P_B &= Y/N = \bar{y} \\ N_B + N_C &= \sum_{j=1}^N x_j = X & P_B + P_C &= X/N = \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがって, 母生残率 ρ は

$$\rho = \frac{N_B + N_C}{N_A + N_B} = \frac{P_B + P_C}{P_A + P_B} = \frac{X}{Y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \equiv z \quad (6)$$

標本については

$$\left. \begin{aligned} n_A + n_B &= \sum_{j=1}^n y_j' = y' & P_A' + P_B' &= y'/n = \bar{y}' \\ n_B + n_C &= \sum_{j=1}^n x_j' = x' & P_B' + P_C' &= x'/n = \bar{x}' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ρ の推定値 ρ' は

$$\rho' = \frac{n_B + n_C}{n_A + n_B} = \frac{P_B' + P_C'}{P_A' + P_B'} = \frac{x'}{y'} = \frac{\bar{x}'}{\bar{y}'} \equiv z' \quad (8)$$

この z' , 即ち ρ' の分散は, 比推定の公式³⁾により

$$V(z') = z'^2 \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n} \left[\frac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\bar{y}^2} - 2 \frac{\text{Cov}(x, y)}{\bar{x}\bar{y}} \right] \quad (9)$$

で与えられる。この式中の σ_x^2 等は x, y の定義から

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 / N = (P_B + P_C) - (P_B + P_C)^2 \\ \sigma_y^2 &= \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2 / N = (P_A + P_B) - (P_A + P_B)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

共変量についても同様に

$$\text{Cov}(x, y) = \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) / N = \sum_{j=1}^N x_j y_j / N - \bar{x} \bar{y}$$

となるが, $x_j y_j$ は階級 B に属する魚体についてのみ 1 となり, 他は 0 となるので, 結局

$$\text{Cov}(x, y) = P_B - (P_B + P_C)(P_A + P_B) \quad (11)$$

となる。これらを (9) に代入して整理すると

$$V(\rho') = V\left(\frac{P_B' + P_C'}{P_A' + P_B'}\right) \doteq \left(\frac{P_B + P_C}{P_A + P_B}\right)^2 \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{P_A + P_C}{(P_B + P_C)(P_A + P_B)} \quad (12)$$

変異係数であらわせば

$$C_{\rho'^2} = \frac{V(\rho')}{\rho^2} \doteq \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{P_A + P_C}{(P_B + P_C)(P_A + P_B)} \doteq \frac{1}{n} \frac{P_A + P_C}{(P_B + P_C)(P_A + P_B)} \quad (13)$$

等比級数の和を使って, P_A, P_B, P_C を ρ であらわすと

$$1 - P_D = P_A + P_B + P_C = P_A + P_A(\rho + \rho^2 + \dots + \rho^{k-2}) + P_A \rho^{k-1}$$

であることから

$$\left. \begin{aligned} P_A &= (1 - P_D)(1 - \rho) / (1 - \rho^k) \\ P_B &= P_A \rho (1 - \rho^{k-2}) / (1 - \rho) = (1 - P_D) \rho (1 - \rho^{k-2}) / (1 - \rho^k) \\ P_C &= P_A \rho^{k-1} = (1 - P_D) \rho^{k-1} (1 - \rho) / (1 - \rho^k) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となるので

$$\left. \begin{aligned} P_A + P_B &= (1 - P_D)(1 - \rho^{k-1}) / (1 - \rho^k) \\ P_B + P_C &= (1 - P_D) \rho (1 - \rho^{k-1}) / (1 - \rho^k) \\ P_A + P_C &= (1 - P_D)(1 - \rho)(1 + \rho^{k-1}) / (1 - \rho^k) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

これを (12)(13) に代入して

$$V(\rho') \doteq \rho^2 \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n(1-P_D)} \frac{(1-\rho)(1-\rho^k)(1+\rho^{k-1})}{\rho(1-\rho^{k-1})^2} \quad (16)$$

$$\doteq \rho^2 \frac{1}{n(1-P_D)} \frac{(1-\rho)(1-\rho^k)(1+\rho^{k-1})}{\rho(1-\rho^{k-1})^2} \quad (16')$$

$$C_{\rho'^2} \doteq \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n(1-P_D)} \frac{(1-\rho)(1-\rho^k)(1+\rho^{k-1})}{\rho(1-\rho^{k-1})^2} \quad (17)$$

$$\doteq \frac{1}{n(1-P_D)} \frac{(1-\rho)(1-\rho^k)(1+\rho^{k-1})}{\rho(1-\rho^{k-1})^2} \quad (17')$$

ここで, $n(1-P_D)$ は n 尾の標本中での生残率の計算に必要な A, B, C の階級に属する魚体の数, 即ち有効標本数の期望値である。このことは, 生残率の計算に関係のない D 階級を含めて標本抽出を行ったために, その分だけ精度が下つた事を示している。

以上の結果は母数を含んでいるので, これらが未知の場合には, 達成精度は標本より推定しなければならない。たとえば

$$C_{\rho'^2} \sim \frac{1}{n} \frac{P_A' + P_C'}{(P_B' + P_C')(P_A' + P_B')} = \frac{n_A + n_C}{(n_B + n_C)(n_A + n_B)} \quad (18)$$

となる。但しこれは $C_{\rho'^2}$ の不偏推定にはならない。

年令組成が等比級数的分布をしていない時には, 一つ一つの年令を比較して, それぞれの生残率を求めるが, この場合には, 上の式で $k=2$ とすればよい。即ち (16)(17) は

$$V(\rho'_a) = V\left(\frac{P_{a+1}}{P_a}\right) \doteq \rho \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n(P_a + P_{a+1})} \frac{(1+\rho)^2}{\rho} \doteq \rho \frac{1}{n(P_a + P_{a+1})} \frac{(1+\rho)^2}{\rho} \quad (19)$$

$$C_{\rho'}^2 = \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n(P_a + P_{a+1})} \frac{(1+\rho)^2}{\rho} = \frac{1}{n(P_a + P_{a+1})} \frac{(1+\rho)^2}{\rho} \quad (20)$$

となる。

Ⅲ 精度の図的表示

実際の魚体調査においては、母集団* は一般に大きく、有限母集団修正は不用であるから (16')(17') によつて、有効標本数の期望値 $n(1-P_D)$ 母生残率 ρ 、及び対象になっている年令の範囲 k によつて与えられる。今 (17') 式を

$$C_{\rho'} = F(\rho, k) / \sqrt{n_e} \quad n_e = n(1-P_D)$$

$$[F(\rho, k)]^2 = \frac{(1-\rho)(1-\rho^k)(1+\rho^{k-1})}{\rho(1-\rho^{k-1})^2}$$

とあらわすと、 $F(\rho, k)$ は母集団により決定される量で、これが与えられると n_e と $C_{\rho'}$ との関係が決定される。今横軸に ρ をとり、 k をいろいろかえて $F(\rho, k)$ を図示し、又 n_e にしたがつて縦軸の尺度をかえて目盛つておけば、この母数と標本数と精度との関係を図式で求める事が出来る。第1図では、左側が $F(\rho, k)$ を与える図で、右側にこの $F(\rho, k)$ の時の $C_{\rho'}$ と n_e との関係を示した。 n_e は対数尺で目盛つてある。たとえば k が 4 で ρ が 0.3 であるとする、まず左側の図によつて $F(\rho, k)$ が 1.58 である事を知り、これを右にのばして、 $C_{\rho'}$ が 5% とした時、約 1000 尾の有効標本数が必要であることがわかる。

Fig 1. Relation between $F(\rho, k)$, n_e and $C_{\rho'}$. Left part of this figure gives $F(\rho, k)$ according to various ρ and k , and right part shows various scales of ordinate according to n_e . For example, when $\rho=0.3$ and $k=4$, value of $F(\rho, k)$ is 1.58, and therefore if samples more than 1000 are taken out, precision of ρ' ($C_{\rho'}$) should be less than 5%.

* この母集団は 22 頁脚註によつて、漁獲物と考えてよい。

文 献

- 1) S. KURITA: 日水会誌, **14**, 1~12 (1948).
- 2) 土井長之: 日水会誌, **14**, 97~104 (1948).
- 3) 斎藤金一郎, 浅井晃: “標本調査の設計”, 1版, 培風館, 東京, (1951), pp. 227~228.