地上写真測量の船位決定への応用—II.*

多目標利用の船位決定法および写真機
の保持の傾斜に対する補正

石尾 真弥・富山 哲夫

(1968 年 7 月 11 日受理)

Application of Terrestrial Photogrammetry to Determination
of Boat-Position—II.Introduction of Four or More Point Method and Correction
of Error due to the Inclination of Camera in Holding.

Shinya ISHIO** and Tetuo TOMIYAMA***

The photogrammetry with a common type camera has been proved to be actually useful for deciding boat-positions¹⁾. However, there were also observed, not a few times, considerably great errors of boat-positions, because of unexpected locations of three terrestrial objects chosen for surveying and the boat-position near on a circumference.

In order to avoid such impermissible errors, authors attempted to introduce the four or more point method²⁾ into the photogrammetry reported¹⁾. The modified method did not give any great errors as before, although the accuracy of survey itself did not differ from that of the three point method obtained under the best condition¹⁾. There are also proposed equations (1) and (5) for computing errors of angle and distance due to the inclination of camera in holding when photographs. The procedure for removing these errors was illustrated. The permissible inclination of camera was expressed as a space between the principal horizontal line and the coastal line on the negative film, and it was estimated to be less than 10% of the focal distance of camera-lens provided that the accuracy of survey was required to be within 0.5%. This accuracy may be understood by equation (8) and by referring Table 1.

前報では、普通写真機で船位を決定する場合の誤差と精度を述べ、この方法が十分に実用的であることを明らかにした¹⁾。しかし、撮影点と測量に利用した3目標物が思いがけなくも同一円周上に近く分布していたために、かなりの距離誤差を生ずることもまた認められた。このような誤差は、地点決定に3点法²⁾を採用する限り、少なからざる頻度で起こることは免れない。これに反して、4点あるいはそれ以上の多数点の目標物を測量に利用すれば、これら目標物が撮影点と同一円周上に存在する確率は非常に小さくなるので、地点決定をおこなっても、大なる距離誤差を生じないはずである。この多数点法²⁾は、六分儀法に応用した場合、原理的には有効であるが、多数の目標物間の測角には時間がかかり過ぎるか、これを免がれるには、観測者数を増すかせねばならぬので実用的ではないが、写真測量法に応用すれば、目標物が多くとも、測角資料は写真として瞬時に記録されるので、多数の地点決定には極めて適当しているものと考えられる。

本研究では、よつて、普通写真機による写真測量に多数点法を導入し、地点決定の精度を調べてみた。また、海上において起こり易い撮影時の写真機の傾斜に原因する測角誤差と距離誤差について検討を加え、それ

* 本研究の要は昭和 42 年 11 月、東大阪における日本水産学会秋季大会にて発表した。

** 九州大学農学部水産化学教室 (Lab. Fish. Chem., Fac. Agr., Kyushu Univ., Fukuoka, Japan)

*** 東京水産大学長 (President of Tokyo University of Fisheries, Minato-ku, Tokyo, Japan)

らを求める数式をえ、それらの誤差を減少させるための傾斜補正法を示した。さらに、与えられた測量精度を維持するための写真機の許容傾斜を知りえたので、これらについて報告する。

研究 方 法

一般に N 個の陸上目標物を測量に利用すれば、理論上 $N(N-1)/2$ 個の角度が観測点と目標物間に求められる²⁾。したがって、観測点 P を頂点とし、目標物との間にできる三角形、およびそれらの外接円の数も

Fig. 1. Intersections of circumscribed circles of triangles formed among the boat-position and terrestrial objects.

Intersection of circles I and II tend to give such a false boat-position as P' , if there is some error of angle measured. Intersection of circles III and IV scarcely give such the error, because of sufficient largeness of two angles at the intersection. The new method gives chance of taking choice of a desirable intersection as exemplified here.

$N(N-1)/2$ 個となる。これらの外接円の中には、互いに重なり合つて、地点決定には用をなさぬものもあるが、直角に近く交差して、船位の決定に好都合なものも存在する。例えば Fig. 1 に示すように、図中には 9 個の目標物が存在し、船位 P を頂点とする三角形の総数は 36 個となる。これらの三角形について外接円を画けば、 P を頂点とし、目標物 T , 194 高地, M および Hi との間に生ずる三角形の外接円は互いに重なり合つて、円周 I となる。したがつて、これら円周上の目標物, T , 194 高地, M および Hi を利用しても船位 P を求めえない。また, 268 高地, 228 高地および Hi と船位 P との間に生ずる三角形の外接円もまた重なり合つて円周 II となるので、この 3 目標のみからは同様に船位 P を求めることができない。しかし、円周 I と円周 II は、点 P および目標物 Hi の近くの 2 点で交差するから、これら 6 個の目標物を利用すれば、船位は P 点または Hi の付近の点上に求められることになる。しかし、これら 2 点間においては、両円の弧は著しく接近している。したがつて、測角値に幾分の誤差を含めば、船位はこれら 2

Fig. 2. Illustration of drawing angles between terrestrial objects in a negative picture projected.

Picture distance and M seen outside of the rectangular drawn in thin line are the real focal distance of camera-lens used and the times of enlargement of the negative picture projected, respectively. O and LL' represent the principal point and the principal horizontal line of the same picture. Angles KPH , HPT , TPA and so on are equal to real angles formed by every two lines drawn between the boat position where this picture was taken and the terrestrial objects K , H , T , A and so on.

点間を結ぶ弧の間に求められ、決定される船位は真の船位 P から著しく離れることになりかねない。このように、6 個の目標物を利用して船位決定が難しい場合もある。しかし、さらに目標物 H および A を利用すれば、これらの地点は船位 P とともに円周 III を与え、また、目標物 K と M を利用すれば、円周 IV をうることになり、船位 P は、円周 III と IV の唯一点の交点として求められるばかりでなく、両円周の交差によつてできる二角はいずれも大きな角度をもっているので、少々測角誤差によつても交点は移動しがたい特徴をもっている。よつてこの多数点法を船位決定に応用することにした。

多数目標物間の角度決定 写真中には多数の目標物が写っている。これら目標物間の角度を求める方法として、作図法と計算法があることは前報¹⁾で述べた。しかし、多目標の場合、計算法で多数の角度を求めても、これらを同時に三桿分度器上に設定できない。よつてこれらの角度はトレーシングペーパーなどの上に書き表わし、この紙片を三桿分度器と同様に操作するなどして船位を決定する外はない。そうであれば、直接、作図法で目標物間の角度をトレーシングペーパー上に求めた方が労が少ない。よつて本研究では次の方法をとつた。

Fig. 2 はトレーシングペーパーの上にフィルム中の陸上目標物の像を投影しているところを示す。最外側の細線は、 85×50 cm に載断したトレーシングペーパーの輪郭を示している。この寸法は、陰画の拡大倍率、船位決定に使用する海図の縮尺によつて適宜決める。ここでは陰画の拡大倍率が 8.38 倍、使用海図の縮尺が $1/10,000$ の場合について例示している。最初、このトレーシングペーパー上に LL' および OP によつて示す T 字形を書き入れる。この場合 LL' の長さは、拡大陰画面の幅より幾分長めにとる。 OP は LL' のほぼ中点から引いた垂線であり、その長さは使用写真機の画面距離と陰画の拡大倍率の積に等しくとる。写真機の画面距離の求め方は、前報¹⁾に述べたので、ここでは説明を省く。同じ図中の太線の矩形は、引伸器により投影された拡大陰画面を示す。写真機を水平に保つて撮影すれば、遠景の海岸線は実質上画面の主水平線を通る。海岸線が大体このように写っている陰画を引伸器で投影し、海岸線がトレーシングペーパー上の LL' 線と重なるように、また、海岸線の中心が点 O と一致するように、トレーシングペーパーの位置を整える。写真機的光束軸の傾きにより、画面の中の海岸線がある距離以上に主水平線を離れた場合の取扱いについては後述する。次にトレーシングペーパー上に投影された各目標物の頂点に印と記号をつける。このペーパーを平板上に移し、各目標物の頂点から LL' 線上に垂線を下ろし、それらの交点と P 点とを、Fig. 2 に示すように直線で結べば、ここに各目標物間の角度が求められる。これらの角度の大きさについての説明は前報で述べたので再度の説明は省く。

多目標利用の船位決定 実際に海図上において地点を決定する場合には、Fig. 2 に示した目標物間の角度明示のトレーシングペーパーを三桿分度器のように操作して、ペーパー上の各目標物への方向線が、Fig. 3 に示すように、海図上のそれぞれの目標物を通過するような位置に置かねばならない。全方向線が全目標物を通過しえた時に、トレーシングペーパー上の点 P が、海図上に船位を示すこととなり、Fig. 2 の点 P' のように、4 本方向線が、それぞれの目標物の上を正しく通過しえても、2 本が通過していないような場合は、これを真の船位と看做してはならない。Fig. 3 には、このようにして決定しえた船位（矢印）と、決定に用いた写真の像間隔を例示しておいた。また、各矢印の間には、決定地点間の距離を示した。

撮影時写真機の傾斜に対する補正 海上では写真機を常に水平に保てるとは限らないから、遠景の海岸線を写しても、その海岸線は画面の主水平線より上方に写つたり、下方に写つたりする。その程度が著しい場合には、特に補正を要する。よつて以下に写真機が傾いた時に生ずる目標物の像間距離の歪みと補正についての著者らの方法、また、この補正を省略した場合の測角誤差、同じく船位誤差について述べ、最後に傾斜補正を要せぬ写真機の傾斜範囲について説明を加える。

Fig. 4 は、撮影時に写真機的光束軸が水平に保たれた時の海岸線の位置 LL' と、下方に傾いた時の位置 ll' とを示している。水平維持の時には、 LL' は画面の主水平線と一致するが、光束軸が下方に傾いた時の位置は主水平線より上方に写る。今、主水平線 LL' と ll' との間の距離を h とすれば、目標物の像 T と主点 O 上の目標物の像との間にできる $\angle TPO$ は、 ll' 線上の同じ目標物の像 T' と、先に主点 O 上に写

Fig. 3. Operation of the tracing paper—on which angles between objects were drawn—for finding the boat-position on a chart.

Open circles show positions of terrestrial objects and small solid circles with a mark of arrow represent the decided boat-positions, respectively. Bars demonstrate pictures which show intervals between images of objects marked. By these pictures, the boat-positions presented at the right hand side were determined.

つた目標物の像 O' との間にできる $\angle T'PO'$ とは互いに相等しいはずである。なぜならば、ある地点におけるレンズの光心と実在の2目標物との間にできる角度は、写真機の光束軸の傾斜と関係なく一定の値をとるからである。よつて、 $\angle TPO = \angle T'PO' = \alpha$ である。レンズの光心 P から主点 O までの距離をレンズの焦点距離 f に等しいとすれば、光心 P から O' までの距離は $\sqrt{f^2 + h^2}$ となるはずである。したがつて、 $\tan \alpha = TO/f = T'O'/\sqrt{f^2 + h^2}$ が成立する。ここに $f < \sqrt{f^2 + h^2}$ の関係にあるから、 $TO < T'O'$ が成立しなければならない。

すなわち、海岸線が画面の主水平線を離れて写る場合には、主水平線上に写る場合よりも、目標物の像間

Fig. 4. Comparison of intervals between images of terrestrial objects on the principal horizontal line LL' and those of same objects on the upper line ll' resulted from inclination of camera.

P : the optical center of camera-lens. f : the picture distance or the real focal distance of camera-lens. h : the space between LL' and ll' . O : the principal point. O' : the center of the line ll' which parallels the line LL' . Angle $TPO = \text{Angle } T'PO' = \alpha = \text{angle between certain tow objects}$. $\tan \alpha = OT/f = O'T'/(f^2 + h^2)^{1/2}$. Consequently $OT < O'T'$, also $KT < K'T'$ and $OM < O'M'$ can be proved.

海岸線が Fig. 5 の l_1l_2 に示すように、主水平線 LL' に対して傾いている場合には、主点 O と l_1l_2 の間の最短距離 h と等しい距離をもち、かつ LL' に平行な海岸線 ll' と同じ扱いをすればよい。なぜならば、主点を中心とする同心円上の各点は、レンズの光心 P から等距離にあり、 O の紙背に存在が仮定できるレンズの光心 P との間のできる直線 PM' は PM に等しく、また $Pa'' = Pa'$, $Pb'' = Pb'$ および $Pc'' = Pc'$ の関係にあり、これらの辺の挟角の間には $\angle M'Pa'' = \angle M'Pa'$, $\angle M'Pb'' = \angle M'Pb'$, また $\angle M'Pc'' = \angle M'Pc'$ の関係があり、ここに考えることのできる $\triangle PM'a''$ と $\triangle PM'a'$, $\triangle PM'b''$ と $\triangle PM'b'$, また $\triangle PM'e''$ と $\triangle PM'e'$ の各組の三角形は合同となる。よつて $a''b'' = a'b'$, $b''c'' = b'c'$ となり、両海岸線上の画像間隔は全く相等しくなるからである。

この補正値は、トレーシングペーパー上の T 字形の PO の長さに加える値であるから、この値の増加分はただちに船位誤差の増大と関係しているように見えるが、陰画の拡大倍率を縮め、それが 1 となる場合の補正値の大きさを、作図によつて検分すると、意外に小さい値に変化することに気付く。しかし、この補正

Fig. 5. Treatment of such a picture—on which the image of coastal line is inclined—for deciding the boat-position.

LL' : the principal horizontal line, l_1l_2 : the inclined coastal line on which images of terrestrial objects are present, ll' : the coastal line being parallel to LL' . The l_1l_2 can be treated just as the ll' .

の距離が大となる。したがつて、このような写り方をした陰画を、普通の陰画と同様に、トレーシングペーパーの LL' 線上に投影して地点決定をおこなうと、目標物間の角度が実測値よりも大きくなり、決定地点は真の地点よりも目標物側に近寄ることになる。このような誤差の発生を防ぐには、トレーシングペーパー上の P と O' の間の距離を $m \times f$ ではなく、 $m \times \sqrt{f^2 + h^2}$ とすべきことは明白である。しかし、実際に地点決定をおこなう時は、平方根の煩雑な計算を避けたい。このために $f + \Delta f = \sqrt{f^2 + h^2}$ と置き、両辺を自乗し、 Δf^2 項を省けば、 $\Delta f = h^2/2f$ となるから、 PO の長さに $m \times h^2/2f$ を加え、これを PO' として、作図法により測角値を求めれば良い。ただしここに m は陰画の拡大倍率を示す。

値の大小に関係なく、補正角度は一定の値をとる。よつてこの補正値は船位誤差そのものの大きさを示すのではなく、測角値を補正するためのものであることがわかる。

本研究においてはこのような補正法によつて撮影時の写真機保持の傾斜による誤差を補正し、測角試料とした。

結果ならびに考察

地点決定の精度 多目標を利用すれば、理論上船位は海図上に唯1点として示されるはずであるが、実際には各種の微小誤差が入り込むために、同一船位について多数回の決定を試みると、決定地点はある散らばりをもつた多数の点として海図上に示される。例えば、1/10,000 縮尺の海図上で、目標物からの距離を異にする13地点について、各地点10回ずつの地点決定をおこなつた結果は、Table 1に示す値からわかるように、1/10,000 縮尺の海図上で求めた船位は、すべて半径1.35 mmより3.10 mm、平均1.91 mmの小円内に集中した。この事実は、著者らの方法によれば、100%の信頼度をもつて31 mより小さな半径をもつ円内に船位の決定ができることを示す。また、Table 1の第4欄に示すように、目標物Aと船位間の距離に対する距離誤差の比をとれば、その値は1/141から1/299の間に変動し、平均値は1/200となる。よつて、起こりうる船位誤差は、船位と最短距離にある目標物の距離の0.5%程度と評価される。

前報¹⁾では、測角誤差から計算によつて船位誤差を求めた。特に大きな誤差は写真測量に固有なものとは看做し難かつたので、それらを除外して船位誤差の平均値を求めた結果、その値は19.1 mであつた。ここでは求められた船位誤差の全平均値が19.1 mであり、両者は相等しい。船位と目標物間の距離は、両観測時共通したものではないから、船位誤差をもつてただちに地点決定の精度を比較しえないが、前回においては、船位から最短距離にある目標物まで約5 km、今回は6 kmである。また、観測地点の選び方に多少の相違はあるが、観測値が互いに比較しえぬ程異なつた条件でもない。この事実を考慮すれば、ここに述べた多目標利用の作図的船位決定法は、概ね最良条件下の3目標利用による船位決定法と変らぬ精度をもつものと言える。

写真機光束軸の傾斜による測角誤差 先に撮影時写真機が傾斜した場合の補正法を述べた。したがつて、

Table 1. Error and accuracy in determining boat-position by terrestrial photogrammetry with a common type camera in making use of four or more point method.

Station	Distance from object A* (m)	Error expressed as radius of circle (m)	Accuracy or Error/Distance (%)	
1	1900	13.5	0.71	1/141
2	2400	13.5	0.56	1/178
3	2780	13.7	0.49	1/203
4	3050	13.7	0.45	1/223
5	3275	20.0	0.61	1/164
6	3560	17.5	0.49	1/204
7	4055	21.5	0.53	1/189
8	4260	17.0	0.40	1/250
9	4625	23.5	0.51	1/197
10	4935	31.0	0.63	1/159
11	5230	20.3	0.39	1/258
12	5775	19.3	0.33	1/299
13	6200	23.8	0.38	1/260
av. 19.1 m			av. 0.50%	1/200

* The location of object A is shown in Fig. 3.

この補正をしなければ当然測角誤差を生ずる。その大きさは次のようにして知ることができる。今, Fig. 4 の $T'OP$ の面を TOP の面上に重ね合わせ, これを真上から見れば, Fig. 6 に示す図形となる。すなわち, 主点 O から h の高さに写った海岸線 ll' は, O から $h^2/2f$ だけ離れた点 O' を通ることになる。よつて, 主点 O を通る海岸線 LL' 上の点 T は, 点 O' を通る海岸線 ll' 上では PT の延長線上点 T' に存在することになる。それにもかかわらず, ll' 上の目標物間の測角を LL' の位置で実施すれば, すなわち, 高さ h についての補正をおこなわぬとすれば, 点 T' は LL' 線上で点 T'' の位置を占めることとなり, 測角値は実際の角度 α よりも $\Delta\alpha$ だけ大きな値となる。ここで点 T'' から, PT' 線上に垂線 $T''X$ を下ろせば,

$$T''X/T'T'' = \sin \alpha, \quad T''X/PT'' = \sin \Delta\alpha \doteq \Delta\alpha$$

Fig. 6. Extent of picture distance $PO (= f)$ for rectifying the inclination of camera in holding.

If the inclination can be expressed as space h as shown in Fig. 4, the extent OO' should be equal to near $h^2/2f$. If this rectification is omitted, the error of angle $\Delta\alpha$ can occur and it can equal to $1/2 \cdot (h^2/f^2) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ as expressed by equation (1). Images of the coastal lines ll' and l_1l_2 in Fig. 5 should be arranged on line ll' in this figure and should be connected with point P by straight lines for obtaining correct angles between objects.

の関係をうる。したがつて, $\Delta\alpha = (T'T''/PT'') \times \sin \alpha$ となる。また, $T'T'' = \Delta f = h^2/2f$, $PT'' = \sqrt{f^2 + (f \cdot \tan(\alpha + \Delta\alpha))^2}$ なる係関がある。ここでは $\Delta\alpha$ 微小角の故をもつて, $\tan(\alpha + \Delta\alpha) \doteq \tan \alpha$ とおきうる。よつて $PT'' = \sqrt{f^2 + (f \cdot \tan \alpha)^2} = f \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = f \cdot \sec \alpha$ となる。したがつて

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \{(h^2/2f)/f \cdot \sec \alpha\} \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} (h^2/f^2) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (1) \end{aligned}$$

の関係をうる。この (1) 式によつて, 傾斜補正を省略した時に生ずる測角誤差を計算できる。また, この測角誤差に伴つて船位誤差も入ることになるが,

Fig. 7. Geometrical illustration of error of distance due to error of angle $\Delta\alpha$ brought about by inclination of camera in holding.

P : the boat position, P' : the false boat position, Line PO : the extent of the line connecting principal point of negative film in camera and optical center of camera-lens. T : the position of real object, T' : the false position of same object caused by no rectification. ds : the error of distance which equal to $s \cdot \Delta\alpha / \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

その大きさをも知ることができる。

写真機光束軸の傾斜による船位誤差 Fig. 7 に示すように、写真機の光束軸の傾斜により、 α なる測角値に対して、 $d\alpha$ なる誤差角度を生じたとすれば、これに伴う船位誤差 ds は (2) 式によつて表わされる。すなわち、 $\triangle PT'P'$ について、

$$ds/\sin d\alpha = ds/d\alpha = T'P'/\sin(\alpha - d\alpha) \doteq T'P'/\sin \alpha \quad (2)$$

が成立する。しかるに $\triangle OP'T'$ については、

$$T'P'/\sin \angle R = T'P' = (s - ds)/\sin(\angle R - \alpha) = (s - ds)/\cos \alpha \quad (3)$$

が成立する。(2) 式の $T'P'$ に (3) 式の $(s - ds)/\cos \alpha$ を代入すれば、

$$ds/d\alpha = (s - ds)/\cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (4)$$

が求められ、この式からまた、

$$ds = s \cdot d\alpha / (\cos \alpha \cdot \sin \alpha + d\alpha) \doteq s \cdot d\alpha / \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

の関係をうる。よつて、写真機光束軸の傾斜補正をしなければ、ここに示す ds の船位誤差が入ってくるわけである。しかし、このような誤差が入つてきても、それが十分に小さければ問題にする必要はない。すなわち、ある程度の傾斜は許容されるわけであり、その限界は次のようにして知ることができる。

写真機光束軸の許容傾斜 普通写真機で船位を決定する場合の精度は、既述のように約 0.5% である。したがつて $ds/s = 0.005$ を許容の精度とすれば、ここに (1) および (5) 式から

$$ds/s = 0.005 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{f^2} \quad (6)$$

(6) 式が導かれ、この式から (7) 式が導かれる。

$$h = 0.1 \times f \quad (7)$$

すなわち、ここに写真機の光束軸の傾斜に対し、補正を必要としない h の限界値は (7) 式で与えられた。すなわち、傾斜が許容される h の大きさは、使用レンズの焦点距離の 10% と言える。一般には、要求測量精度を ds/s とすれば、許容傾斜 h は (8) 式で示される。

$$h = 1.4 \times f \times (ds/s)^{1/2} \quad (8)$$

いずれにしても、写真測量の精度をよくするためには、写真機光束軸の水平維持が重要なことは上述の諸点から明白であり、殊に焦点距離の小さな広角レンズの場合は特別の留意が必要である。

要 約

1. 多数点法の導入により、3点法を利用する場合に生ずる大なる距離誤差は生じなくなり、測量の精度は、3点法における最良条件下にえられる精度と常時等しくなった。
2. 撮影時、写真機光束軸の傾斜により生ずる測角誤差と距離誤差とを求める式 (1) および (5) をえた。
3. 写真機光束軸の傾斜補正法を示した。また、許容傾斜を陰画面上の主点と海岸線像間の距離 h で表わす時、許容 h は $1.4 \times f \times (ds/s)^{1/2}$ に等しいことを示した。ただし ds/s は許容船位誤差、 f は使用レンズの焦点距離を示す。

文 献

- 1) 石尾真弥・富山哲夫: 34, 1000~1008 (1968).
- 2) R. ROBINSON ROWE: *Proc. of A. S. C. E.*, 64, 1103~1113 (1938).
- 3) B. HALLERT: *Photogrammetry*, McGraw-Hill Book Comp. Inc., N. Y., Toront, London (1960).
- 4) 米谷栄二・山田善一: 新版測量学一般論, 丸善, 東京 (1965).
- 5) 酒井 進: 地文航海学, 海文堂, 東京 (1953).