曳航索の近似算法について—Ⅲ.

三次元問題の近似法

宮崎 芳夫

(1972 年 6 月 17 日受理)

Studies on Approximate Formulas for Tension and
Configuration of the Towing Rope—III.
Method of Approximation of Three Dimensional Problems

Yoshio MIYAZAKI*

It is difficult to calculate theoretically the tension and the configuration of the towing ropes when such exhibit three dimensional motion. In this paper, a method of approximation is described to calculate the three dimensional problem, such as the tension at the warp of a two-boat trawl or the distance between the pair of otter boards of a trawl gear, using the loop functions of the basic catenary τ' , σ' , ξ' , η' . These are given by the formulas

$$\begin{aligned}\tau' &= |\operatorname{cosec} \theta| = \eta' + 1, & \sigma' &= |\cot \theta| = \sinh \xi', \\ \pm \xi' &= \ln \left| \cot \frac{\theta}{2} \right|, & \eta' &= |\operatorname{cosec} \theta| - 1 = \cosh \xi' - 1\end{aligned}$$

where θ is the inclination of the tangent of the basic catenary.

一様な流れの中において二次元的釣合の状態を保っている Rope または平面網地の形状と張力は、揚力が全く作用しない仮想材料 (a) がこの流れの中で描く Loop, すなわち Catenary curve を用いて近似的に計算できることを, 第 I, II 報^{1,2)}, および文献 3) (東京水産大学研究報告 Vol. 56, Nos. 1-2, March, 1970. 一様な流れの中に置かれたロープ, または平面網地の形状と張力について) において実例を用いて詳細に説明した。実際の海洋観測や漁業作業においては, 潮流や風向と異なる方向へ Depressor を曳航したり, 二艘曳網の曳索長と水深との関係を求める場合などのように, 曳索が三次元運動をしていることを考慮に入れなければならない状態も少なくない。本報においては, 二次元¹⁻³⁾ のときに用いた近似方法が三次元運動の場合にも拡張できるものと仮定し, 一様な流れの中で三次元的釣合を保っている仮想材料 (a) の Loop を一般の釣合の方程式より求め, これを用いて三次元的釣合の状態にある実在の Rope の形状, 張力を近似的に計算する方法を導いた。

釣合の方程式

流体中において任意の運動をしている伸びない均質, 柔軟な Rope の上の一定点から P 点までの長さを S とし, S と $S+dS$ との間の微小長さ dS に作用する外力の合ベクトルを $\mathbf{F} \cdot dS$, Rope の各点に働く S の増加する向きの張力のベクトルを $\mathbf{T}_E(S, t)$, Rope の単位長さの質量を M とすると, dS の部分の運動方程式は,

$$M \cdot dS \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F} \cdot dS + \mathbf{T}_E(S+dS, t) - \mathbf{T}_E(S, t) = \mathbf{F} \cdot dS + \frac{\partial \mathbf{T}_E}{\partial S} \cdot dS$$

* 東京水産大学 (Tokyo Univ. Fisheries, Minato-ku, Tokyo, Japan)

となるから、この Rope の一般運動方程式は、

$$M \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{T}_E}{\partial S} \quad (1)$$

と表わされる。ここで、 $\mathbf{r}(S, t)$ は P 点の位置ベクトルで $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S} \right| = 1$ である。

この Rope が釣合の状態を保っているときには $\mathbf{r}$ と $\mathbf{T}_E$ とは長さ S だけの関数になるから、(1) 式より一般の釣合の方程式、

$$\mathbf{F} + \frac{d\mathbf{T}_E}{dS} = 0 \quad (2)$$

が導かれる。いま、三次元的釣合の状態にある Rope の描く曲線 (Loop と呼ぶ) 上の一点 P において主法線を X 軸、陪法線を Y 軸、接線を Z 軸とする動座標軸を考え、この各軸の方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$ とすると (2) 式は、

$$\mathbf{F} + \frac{d\mathbf{T}_E}{dS} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{T}_E \cdot \frac{d\mathbf{t}}{dS} = 0$$

となるから、これに $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$ をそれぞれスカラー的に乗じ、曲率半径を r とすると、動座標 XYZ に関する一般の釣合の方程式、

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) + \frac{\mathbf{T}_E}{r} &= 0 \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}) &= 0 \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) + \frac{d\mathbf{T}_E}{dS} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{すなわち, } \left. \begin{aligned} F_x + \frac{\mathbf{T}_E}{r} &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_z + \frac{d\mathbf{T}_E}{dS} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

が得られる。ここで、この第二式、

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad \text{すなわち, } F_y = 0 \quad (4)$$

の関係は、釣合の状態においては dS に作用する合力 $\mathbf{F}$ が dS の接触平面内に含まれていることを示している。また、 P 点より微小長さ dS だけ離れた点 P' における接線単位ベクトルを $\mathbf{t}'$ とすると、

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}') = \mathbf{b} \cdot \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{t}}{dS} \cdot dS \right) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}) + \frac{1}{r} \cdot dS \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (5)$$

となるから、この Loop 上の P' 点における接線は P 点における陪法線と直角に交わる性質がある。

仮想材料 (a) の Loop

x 軸の正の方向から負の方向に向うような流れの中に Fig. 1 に示すように鉛直上方を正とする y 軸と、流れと直角、水平の方向に z 軸をもつ右手系の直交座標 $O-xyz$ を設ける。この流れの中において三次元的釣合の状態を保っている Rope 上の任意の一点 P における主法線を X 軸 (曲率中心の存在する方向を正)、陪法線を Y 軸、接線を Z 軸 (長さ S の増加する方向を正) とする右手系の動座標軸を考え、この各軸の x , y , z 軸に対する方向余弦を、

	X	Y	Z
x	l_n	l_b	l_t
y	m_n	m_b	m_t
z	n_n	n_b	n_t

と定めると、この場合の XYZ 座標に関する釣合の方程式は (3) 式から、

Fig. 1. Coordinate system for a towing rope in three dimensional motion.
S: length of Loop,
 θ : inclination of Tangent.

$$\frac{t}{r} + N - w \cdot m_n = 0 \quad (6)$$

$$B - w \cdot m_b = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dt}{dS} + T - w \cdot m_t = 0 \quad (8)$$

と導びかれる。ただし、式中の記号は第 I, II 報, および文献 3) に用いたものと一致させるために,

- N : 単位長さの Rope に作用する全流体力の主法線成分,
 B : 単位長さの Rope に作用する全流体力の陪法線成分,
 T : 単位長さの Rope に作用する全流体力の接線成分,
 w : 単位長さの Rope の流体中における重さ, t : 張力,
 r : 曲率半径, ($1/r = d\theta/dS$, $d\theta$ は微小長さ dS の両端における接線の交角),

としてある。この解を第 I 報および文献 3) の (3) ~ (6) 式にならつて表わすと,

$$\left. \begin{aligned} \ln \frac{t}{t_0} &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{T - w \cdot m_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{T/D_0 - \mu \cdot m_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \ln \tau \\ S &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \sigma \\ x &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0 \cdot l_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot l_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \xi \\ y &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0 \cdot m_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot m_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \eta \\ z &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0 \cdot n_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot n_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \zeta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。ここで θ_0 は Rope 上の一定点 P_0 における接線とある基準線との交角, t_0 は P_0 点における張力, D_0 は流れに直角に置かれた単位長さの Rope に作用する抗力, $\tau, \sigma, \xi, \eta, \zeta$ は Rope の張力と形状を与える無次元の函数で, Loop functions と称える。適当な条件を与えてこれらの式の積分をおこなえば、一様な流れの中で釣合の状態を保っている Rope の形状と張力がきまるわけであるが、この積分を一般の場合についておこなうためには Rope に作用している外力と、曲率および捩率との力学的関係が明らかにならなければならない。しかしながら、今までのところではこの Loop の性質を示す (4) および (5) 式のほかに、これらの関係を説明する理論も実験も見当たらないから、(9) 式の積分をおこなうためには Loop の性質を規定できるような仮定を採用する必要がある。ここでは、第 I 報および文献 3) で用いた二次元の場合の仮想材料 (a) に相当する三次元の場合の仮想材料、すなわち Fig. 2 に示すように、Rope の単位長さ当りの抗力 $-D_0$ に等しい抵抗をもつた小球を抵抗のない糸で等間隔に連結した材料 (a) を考え、これが x 軸に沿う一様な流れの中に置かれた場合の形状と張力を調べた。

この材料の微小長さ dS に作用する外力は流れの方向に働く流体力 $-D_0 \cdot dS$ と鉛直下方に働く流体

Fig. 2. External forces acting on an element of Ideal material (a) in three dimensional motion.

- D_0 : drag acting on material,
 w : weight of material in fluid,
 F : total external force,
 n : unit vector in direction of Principal normal,
 b : unit vector in direction of Binormal,
 t : unit vector in direction of Tangent.

中における重量 $-w \cdot dS$ だけで、小球相互の干渉が無視できるものとする、この二力の合力 $F \cdot dS$ は Loop 上のどの部分においても平行で相等しく、かつ、(4) および (7) 式に示されるように F は常に dS の接触平面内に含まれている。また、 dS の両端 P, P' における接線 t, t' は (5) 式で説明したように、どちらも P 点における陪法線 b と直角に交わるから、この接線 t, t' と外力 F とによつて決定される P, P' 点における接触平面は互に平行になる。しかるに、相隣れる接触平面は少なくとも二点を共有する性質があるから、この Loop 上の任意の点の接触平面はすべて同一平面上にある。すなわち、ここで取扱っている材料 (a) のように外力の合力がどの部分においても平行に働く場合の Loop は平面曲線によつて表わされるから、Loop 上の任意の点における陪法線 b の方向余弦 l_b, m_b, n_b は、この Loop を含む平面 γ の方向余弦にはわからない。いま、平面 γ の方程式が $l_b \cdot x + m_b \cdot y + n_b \cdot z = 0$ となるよう固定座標 xyz の原点の位置 O を定め、この平面と xy 平面との交線 $l_b x + m_b y = 0$ と y 軸との交角を ω_a とすると、材料 (a) の単位長さ

$$N = -D_0 \cdot l_n, \quad B = -D_0 \cdot l_b, \quad T = -D_0 \cdot l_t \quad (10)$$

であるから、これと (7) 式とから、

$$\mu = \frac{w}{D_0} = -\frac{l_b}{m_b} = \cot \omega_a \quad (11)$$

Fig. 3. Basic catenary on Plane γ .

S : length of Loop,

X : Principal normal,

Z : Tangent,

ω_a : rotative angle of basic catenary,

yO : direction of gravity.

の関係が得られる。これは、Fig. 3 にも示すように、この仮想材料 (a) の Loop を含む平面 γ 上には、材料の流体的特性を示す Current parameter $\mu^{(1-3)}$ によつて定まる一定角 Critical angle $\omega_a^{(1-3)}$ を傾斜角とする xy 平面上の直線 $x \cdot \sin \omega_a - y \cdot \cos \omega_a = 0$ が必ず含まれていることを意味している。

いま、この直線が Fig. 3 に示すように新座標の y' 軸となるように x, y 軸を z 軸の周りに ω_a だけ回転した新座標 $O-x'y'z$ を設けると、この新座標に対する平面 γ の方程式は、この平面と $x'z$ 平面との交線（これを x' 軸とする）と x' 軸との交角 γ を用いて、

$$x' \cdot \sin \gamma - z \cdot \cos \gamma = 0$$

と表わされるから、この平面に垂直な Loop の陪法線 Y の $x'y'z$ 座標に対する方向余弦 l_b'', m_b'', n_b'' は、

$$l_b'' = -\sin \gamma, \quad m_b'' = 0, \quad n_b'' = \cos \gamma$$

となる。また、Loop 上の任意の点における接線と y' 軸との交角を θ とすると、接線 Z の $x'y'z$ 座

標に対する方向余弦は、

$$l_t'' = \sin \theta \cdot \cos \gamma, \quad m_t'' = \cos \theta, \quad n_t'' = \sin \theta \cdot \sin \gamma,$$

となるから、動座標軸 X, Y, Z の $x'y'z$ 座標に対する各方向余弦は、

	X	Y	Z
x'	$l_n'' = -\cos \theta \cdot \cos \gamma$	$l_b'' = -\sin \gamma$	$l_t'' = \sin \theta \cdot \cos \gamma$
y'	$m_n'' = \sin \theta$	$m_b'' = 0$	$m_t'' = \cos \theta$
z	$n_n'' = -\cos \theta \cdot \sin \gamma$	$n_b'' = \cos \gamma$	$n_t'' = \sin \theta \cdot \sin \gamma$

* 原点 O を通る Y 軸は z' 軸に一致する。

である。ただし、 ω_a , γ , θ , S などの正、負は Fig. 3 に示すように、

ω_a : (+ y 軸と + y' 軸との交角。) + y 軸を基準とし、+ z の側より見て時計回りに測るときを正。

γ : (+ x' 軸と + x 軸との交角。) + x' 軸を基準とし、+ y' の側より見て時計回りに測るときを正。

θ : (+ y' 軸と + Z 軸との交角。) + y' 軸を基準とし、+ Y (+ z') の側より見て時計回りに計るときを正。

S : (平面 γ 上にある Loop の長さ。) + z' の側より見て反時計回りに増加する方向の正。

と定める。次にこれらの方向余弦を変換式、

$$\begin{aligned}x &= x' \cdot \cos \omega_a + y' \cdot \sin \omega_a \\y &= -x' \cdot \sin \omega_a + y' \cdot \cos \omega_a \\z &= z'\end{aligned}$$

を用いて xyz 座標の方向余弦に変換すると、

$$\begin{array}{c|c|c|c} & X & Y & Z \\ \hline x & l_n = -\cos \theta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega_a \\ & + \sin \theta \cdot \sin \omega_a & l_b = -\sin \gamma \cdot \cos \omega_a & l_t = \sin \theta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega_a \\ & & & + \cos \theta \cdot \sin \omega_a \\ y & m_n = \cos \theta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega_a \\ & + \sin \theta \cdot \cos \omega_a & m_b = \sin \gamma \cdot \sin \omega_a & m_t = -\sin \theta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega_a \\ & & & + \cos \theta \cdot \cos \omega_a \\ z & n_n = -\cos \theta \cdot \sin \gamma & n_b = \cos \gamma & n_t = \sin \theta \cdot \sin \gamma \end{array} \quad (12)$$

と表わされる。したがって、 l_b , m_b , n_b を方向余弦とする平面 γ の方程式は、

$$x - y \cdot \tan \omega_a - z \cdot \cot \gamma \cdot \sec \omega_a = 0$$

となる。以上の方向余弦を (9) 式に代入し (10), (11) 式を用いて積分すると、一様な流れの中で三次元的釣合の状態を保っている仮想材料 (a) の Loop functions τ_a , σ_a , ξ_a , η_a , ζ_a を決定することができる。この式中における変数は θ だけで、 ω_a と γ は材料の流体的特性と初めの条件とによつてきまる常数と考えてよいから、まず (9) の第一式より、

$$\begin{aligned}\ln \frac{t}{t_0} &= \ln \tau_a = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{T/D_0 - \mu \cdot m_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{l_t \cdot m_b - l_b \cdot m_t}{l_n \cdot m_b - l_b \cdot m_n} d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-n_n}{n_t} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \cdot \sin \gamma}{\sin \theta \cdot \sin \gamma} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \cot \theta d\theta\end{aligned}$$

ここで、 $\theta_0 = 90^\circ$ のとき ($t = t_0$, S , x , y , $z = 0$), $\theta = 0^\circ$ のとき (t , S , x , y , $z = \infty$) とすると、

$$\ln \tau_a = \ln |\operatorname{cosec} \theta|, \quad \tau_a = |\operatorname{cosec} \theta|$$

が得られる。この τ_a を用いて、

$$\begin{aligned}S &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_a}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_a \cdot m_b}{l_n \cdot m_b - l_b \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_a \cdot m_b}{n_t} d\theta \\ &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \sin \omega_a \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{|\sin \theta| \cdot \sin \theta} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \sin \omega_a \cdot \cot \theta \\ &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \sin \omega_a \cdot \sigma' = \kappa \cdot \sigma' = \kappa \cdot \sigma_a, \\ x &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_a \cdot l_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_a \cdot l_t \cdot m_b}{n_t} d\theta \\ &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \sin \omega_a \cdot \left(\cos \gamma \cdot \cos \omega_a \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{|\sin \theta|} d\theta + \sin \omega_a \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta}{|\sin \theta| \cdot \sin \theta} d\theta \right) \\ &= \kappa \cdot (\xi' \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega_a + \eta' \cdot \sin \omega_a) = \kappa \cdot \xi_a, \\ y &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_a \cdot m_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_a \cdot m_t \cdot m_b}{n_t} d\theta \\ &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \sin \omega_a \cdot \left(-\cos \gamma \cdot \sin \omega_a \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{|\sin \theta|} d\theta + \cos \omega_a \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta}{|\sin \theta| \cdot \sin \theta} d\theta \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa \cdot (-\xi' \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega_a + \eta' \cdot \cos \omega_a) = \kappa \cdot \eta_a, \\
z &= \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{\tau_a \cdot n_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\Theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{\tau_a \cdot n_t \cdot m_b}{n_t} d\Theta \\
&= \frac{t_0}{D_0} \cdot \sin \omega_a \cdot \left(\sin \gamma \cdot \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{1}{|\sin \Theta|} d\Theta \right) = \kappa \cdot (\xi' \cdot \sin \gamma) = \kappa \cdot \xi_a.
\end{aligned}$$

したがって、三次元的釣合の状態にある仮想材料 (a) の Loop functions は、

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= |\operatorname{cosec} \Theta| = \tau', \\ \sigma_a &= \cot \Theta = \sigma', \\ \xi_a &= \xi' \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega_a + \eta' \cdot \sin \omega_a, \\ \eta_a &= -\xi' \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega_a + \eta' \cdot \cos \omega_a, \\ \zeta_a &= \xi' \cdot \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。この式に含まれている τ' , σ' , ξ' , η' は第 I, II 報および文献 3) で用いた Catenary curve の Loop functions,

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= |\operatorname{cosec} \Theta| = \eta' + 1, \\ \sigma' &= |\cot \Theta| = \sinh \xi', \\ \pm \xi' &= \ln \left| \cot \frac{\Theta}{2} \right|, \\ \eta' &= |\operatorname{cosec} \Theta| - 1 = \cosh \xi' - 1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と全く同一であり、 ω_a および γ は材料の流体的特性と初めの条件とから定められる $0^\circ \sim 90^\circ$, および $0^\circ \sim \pm 180^\circ$ の範囲の一定値であるから、(13) 式で与えられる仮想材料 (a) の Loop は Fig. 4 に示すように、 xy 平面上にある Catenary curve が y' 軸のまわりに回転したときにできる回転面と平面 γ とが交わったときに現われる切口の曲線にほかならな

Fig. 4. Surface revolution of catenary curve.

い。また、この Loop 上の任意の点における張力の Loop function τ_a は (8) 式を積分して、

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{S_0}^S D_0 \cdot l_t dS + \int_{S_0}^S w \cdot m_t dS = D_0 \cdot x + w \cdot y, \\ \frac{t}{t_0} &= \tau_a = 1 + \frac{D_0}{t_0} \cdot x + \frac{w}{t_0} \cdot y = 1 + \sin \omega_a \cdot \xi_a + \mu \cdot \sin \omega_a \cdot \eta_a \end{aligned} \quad (15)$$

とも表わすことができるが、これも二次元の場合の τ_a と全く同一の形式であるから、一様な流れの中で一般の釣合の状態にある仮想材料 (a) の形状と張力を求めるには、(14) 式で与えられる σ' , ξ' , η' の函数表を用意すれば十分である。

近似方法の要約

この仮想材料 (a) に関する解析結果を応用して一様な流れの中で三次元的釣合の状態にある実在の Rope の形状や張力を求めるには、第 I, II 報および文献 3) で用いた二次元のときの近似方法が三次元の場合にも拡張できるものと仮定すると、次に説明するような近似方法にしたがつて計算すればよい。

1. x 軸の正の方向から負の方向に向う一様な流れの中に、鉛直上方を正とする y 軸、流れと直角、水平の方向に z 軸をもつ右手系の直交座標 $O-xyz$ を設ける。この流れの中において釣合の状態を保っている Rope の描く Loop は、常に $y = x \cdot \cot \omega$ であらわされる xy 平面上の直線 y' を軸とする平面 γ の上の Catenary curve で表わされるものとし、この Loop の形状および張力を与える Loop functions σ , ξ , η , ζ および τ を (13), (15) 式より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \cot \theta = \sigma' \\ \xi &= \xi' \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega + \eta' \cdot \sin \omega \\ \eta &= -\xi' \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega + \eta' \cdot \cos \omega \\ \zeta &= \xi' \cdot \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\tau = 1 + \lambda \cdot \sin \theta_c \cdot \xi + \mu \cdot \sin \theta_c \cdot \eta \quad (17)$$

と近似する。(17) 式に含まれる摩擦係数 λ は第 II 報の Table 3, または文献 3) の Table 5 の数値をそのまま用いる。これらの Loop functions から S, x, y, z および t を求めるには次の関係を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \text{Loop constant} = \frac{t_0}{D_0} \cdot \sin \theta_c, \\ S &= \kappa \cdot \sigma, \quad x = \kappa \cdot \xi, \quad y = \kappa \cdot \eta, \quad z = \kappa \cdot \zeta, \quad t = \tau \cdot t_0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

上式中に含まれている θ_c, γ, θ および ω は以下の方法によつて定める。

2. Critical angle θ_c は $S = \infty$ の位置における y 軸と Rope の交角で、二次元の場合と同様、第 II 報の Fig. 3 または文献 3) の Fig. 21 に示した $\mu \sim \theta_c$ 曲線を用いて決定する。ここで、(11) 式から $\mu = \text{Current parameter} = \frac{w}{D_0} = \cot \omega_c$, また、 $0^\circ \leq \theta_c \leq 90^\circ$ とする。

3. Rope の任意の点における接線と x, y, z 軸との交角を $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ とすると方向余弦は、 $l_x = \cos \theta_x, m_x = \cos \theta_y, n_x = \cos \theta_z$ となる。これと (12) 式から平面角 γ , およびその点における Catenary curve の傾角 θ を求める次の関係が導びかれる。

$$\left. \begin{aligned} \cot \gamma &= \frac{\cos \theta_x \cdot \cos \omega - \cos \theta_y \cdot \sin \omega}{\cos \theta_z} \\ \sin \theta &= \frac{\cos \theta_x \cdot \cos \omega - \cos \theta_y \cdot \sin \omega}{\cos \gamma} \\ \cos \theta &= \cos \theta_x \cdot \sin \omega + \cos \theta_y \cdot \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 γ, θ および S の正、負のとりきめは仮想材料 (a) の場合と同一である。(Fig. 3 参照)

4. 回転角 ω は Fig. 5 に示すような曳航状態にしたがつて次のように定める。

〔I〕の曳航状態のとき。 $(\theta_c + 180^\circ \geq \theta_y \geq 90^\circ)$

$$\omega_I = \theta_c + (\omega_c - \theta_c) \cdot |\cos \varepsilon|$$

〔II〕の曳航状態のとき。 $(90^\circ \geq \theta_y \geq \theta_c)$

$$\omega_{II} = \theta_c - (\omega_c - \theta_c) \cdot |\cos \varepsilon|$$

〔III〕の曳航状態のとき。 $(180^\circ \geq \theta_y \geq \theta_c, \text{ または全域})$

$$\omega_{III} = \frac{1}{2} \times (\omega_I + \omega_{II}) = \theta_c$$

ここで、 $\cos \varepsilon$ は

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \theta_x \cdot \cos \theta_c - \cos \theta_y \cdot \sin \theta_c}{\cos \theta_z} \quad (20)$$

によつて計算されるものとする。また、回転は常に Fig. 3 に示す $+\omega_c$ の向きにおこなわれるものとし、その範囲は $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ である。二次元の場合と同様これを“回転の規則”と称える。

以上の近似方法は $r=0$ とすると第 I, II 報および文献 3) で述べた二次元の場合の近似方法に完全に一致するから、Catenary curve の Loop functions を与える函数表を用意すれば、任意の曳航状態にある曳

Fig. 5. Three dimensional towing states [I], [II] and [III].

航索の形状や張力が計算できる。しかしながら、この計算法は (16), (17) 式からも明らかなように、まだかなり煩雑で実用的ではない。次報においては文献 3) に詳細に発表した A B C Table を用いてこの計算過程を簡略にするとともに、実測値との比較を試みたい。

文 献

- 1) 宮崎芳夫: 本誌, **36**(1), 48-57 (1970).
- 2) 宮崎芳夫: 同誌, **36**(1), 58-67 (1970).
- 3) 宮崎芳夫: *J. Tokyo Univ. Fish.*, **56** (1-2), 49-117 (1970).