短 報

標識再捕による死亡係数の推定および
遺伝標識による混合群の混合比の
推定における部分尤度の有効性

平松一彦, 赤嶺達郎, 北田修一

(1994年9月16日受付)

Effectiveness of Partial Likelihood on Estimating
Fish Mortality Rates from Tag Recoveries and
the Stock Composition in the Mixed
Population Based on Genetic DataKazuhiko Hiramatsu,*¹ Tatsuro Akamine,*²
and Shuichi Kitada*³

キーワード: 最尤法, 標識再捕, 混合比

水産資源解析において, 最尤法を用いてパラメータが推定されることが多くなっている。¹⁾ 最尤推定値は数値的に求められることが多いが, 計算にはかなりの時間を要することがある。このため北田ら²⁾は標識再捕による死亡係数の推定において, 部分尤度を用いることにより計算の簡便化を計っている。一方, 岸野ら³⁾は遺伝標識による混合群の混合比の推定において, 部分尤度を用いて基準群と混合群からの誤差の影響を評価している。

北田ら²⁾は部分尤度を用いた推定結果と全尤度による推定結果を示しているが, 両者は極めてよく一致している。本論文では部分尤度と全尤度の推定法を比較・検討することにより, 特定の条件下では両者の推定量が一致することを示す。

部分尤度が使用されるのは, 尤度関数 L が未知パラメータ α と β について下記のように分解される場合である。

$$L(\alpha, \beta) = L_1(\alpha, \beta) \cdot L_2(\beta) \quad (1)$$

この時, まず部分尤度 L_2 を最大化する β を求め, 次にこの値を用いて残差尤度 L_1 から α を推定する。一方, 全尤度による推定では L を最大にする α と β を求める。すなわち部分尤度を用いる方法では

$$\frac{\partial \ln L_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \ln L_2(\beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (3)$$

より α と β の最尤推定量を求めるが, 全尤度の場合は,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (5)$$

から求める。ここで(4)式, (5)式に(1)式を代入すると

$$\frac{\partial \ln L_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \ln L_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial \ln L_2(\beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (7)$$

となる。(2)式, (3)式と(6)式, (7)式をそれぞれ比較すると, (2)式, (3)式を満たす α と β を $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ として

$$\frac{\partial \ln L_1(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta} = 0 \quad (8)$$

であれば両者が等しいことが分かる。ここで $(\partial f(\hat{x})/\partial x)$ は f を x で偏微分した後, $x=\hat{x}$ を代入することを意味する。 L_1 が

$$L_1(\alpha, \beta) = L_1(\phi(\alpha, \beta)) \quad (9)$$

のように, α と β の関数 ϕ の関数で表され, かつ

$$\frac{\partial \phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \alpha} \neq 0 \quad (10)$$

が成立すれば(8)式を満たすことを示すことができる。

(6)式より

$$\frac{\partial \ln L_1(\phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))}{\partial \phi(\alpha, \beta)} \frac{\partial \phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \alpha} = 0 \quad (11)$$

となるが, (10)式から

$$\frac{\partial \ln L_1(\phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))}{\partial \phi(\alpha, \beta)} = 0 \quad (12)$$

が成立する。この時

$$\frac{\partial \ln L_1(\phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln L_1(\phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))}{\partial \phi(\alpha, \beta)} \frac{\partial \phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta} = 0 \quad (13)$$

となり(8)式を満たす。

北田ら²⁾のモデル1と3, および岸野ら³⁾の残差尤度は,

$$\phi(\alpha, \beta) = \alpha \cdot f(\beta) \quad (14)$$

と表すことができ, さらに

$$\frac{\partial \phi(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \alpha} = \frac{\partial (\hat{\alpha} \cdot f(\hat{\beta}))}{\partial \alpha} = f(\hat{\beta}) \neq 0 \quad (15)$$

であるので, (9)式, (10)式の条件を満たす。このため部分尤度の結果は, 全尤度と等しくなる。一方, 北田

*¹ 遠洋水産研究所 (National Research Institute of Far Seas Fisheries, Orido, Shimizu, Shizuoka 424, Japan).

*² 中央水産研究所 (National Research Institute of Fisheries Science, Fukuura, Kanazawa, Yokohama, Kanagawa 236, Japan).

*³ 東京水産大学 (Tokyo University of Fisheries, Konan, Minato, Tokyo 108, Japan).

ら²⁾のモデル2は(8)式の条件を満たさないため, 両者の推定値は一致しない。

このように部分尤度を用いる場合, 残差尤度 L_1 が, (8)式あるいはその十分条件である(9)式と(10)式を満たせば, 全尤度の推定と同等である。部分尤度を用いた場合の標準誤差の推定量は近似式であるが, 北田ら²⁾の結果を見れば, 十分満足できる近似となっていることが分かる。このため, 尤度関数が上記の条件を満たす場合には, 部分尤度による解析は計算の簡便性および誤差要

因の評価の観点から, 有効な方法である。

数学的助言を頂いた遠洋水産研究所の竹内幸夫氏に感謝する。

文 献

- 1) 平松一彦: 遠洋水研報, **29**, 57-114 (1992).
- 2) 北田修一, 平松一彦, 岸野洋久: 日水誌, **59**, 609-613 (1993).
- 3) 岸野洋久, 北田修一, 平松一彦: 日水誌, **60**, 359-364 (1994).