相似の法則から見た罐詰形空間内の自然対流

岡 田 光 世

(水 産 講 習 所)

Natural Convection in the Can-shaped Space, Referred to the Laws of Similitude.

Mituyo OKADA

SYNOPSIS

In TANI's experiment,⁽¹⁾ it was shown that the heat-transference by convection into the glass model of cans, filled up with water, obeys a similar law of similitude to that of heat conduction. The present paper gives discussions on the deduction of general laws from various fundamental differential equations concerning the convection.

自然対流の問題は屢、相似の法則に照して取扱はれて來たが、多くは定常状態の熱傳達率が主題であつて、一般的に温度や運動速度の變化を取り入れた研究は甚だ少い。茲では先づ最も基本的な流體力學及び熱學の微分方程式から出發して此の問題の検討を試みる。

媒質の密度を ρ , 速度を w , 壓力を p , 粘性係数を η , 單位質量に働く外力即ち重力を g とすると、流體力學の運動の式は

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho [w \nabla] w = -\nabla p + \eta \nabla^2 w + \frac{1}{3} \eta \nabla \cdot \nabla w + g \rho. \dots\dots\dots (1)$$

連續の式は

$$\nabla(\rho w) = 0. \dots\dots\dots (2)$$

又温度を θ , 熱傳導度を λ , 比熱を c , 温度傳導度を $a = \lambda/c\rho$ とすると熱傳導の方程式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + [w \nabla] \theta = a \nabla^2 \theta. \dots\dots\dots (3)$$

外圍の温度を θ_e , 境界に於ける内方法線を n , 外部熱傳達率を α とすると境界條件⁽²⁾として

$$\alpha(\theta - \theta_e) = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial n}. \dots\dots\dots (4)$$

温度と運動との關係を求めるには以上の外媒質の示性式が必要である。今媒質の膨脹係數 β 及び壓縮率 κ を夫々

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_p, \quad \kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \dots\dots\dots (5)$$

と考へると、示性式は

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta d\theta + \kappa dp \dots\dots\dots (6)$$

(1) TANI, S.; This Bull., 8 (2), 1939, 76~78.

(2) 嚴密には此の外運動速度 w に關する境界條件も考へねばならない。

と書ける。之により (1) 式中の ∇p を $\nabla \rho$ と $\nabla \theta$ とで表はして

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho[w \nabla] = w - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho + \beta \nabla \theta \right) + \eta \nabla^2 w + \frac{1}{3} \eta \nabla \cdot \nabla w + g \rho, \dots \dots (7)$$

を得る。

擬て代表的長さ夫々 l', l なる相似の空間を占める 2 つの媒質を考へる。一方の量に ' を附けて表はす。始め内外の温度 θ_0 の分布が相似で静止してゐたと考へ、爾後幾何學的に相似な位置即ち

$$\frac{x'}{l'} = \frac{x}{l}, \quad \frac{y'}{l'} = \frac{y}{l}, \quad \frac{z'}{l'} = \frac{z}{l} \dots \dots \dots (8)$$

を満足する (x', y', z') , (x, y, z) に於ける温度 θ , 速さ w , が相似になる爲の條件を (7), (2), (3), (4) から求める。(2) は何の條件も與へない。(7) からは,

$$\frac{w't'}{l'} = \frac{wt}{l}, \dots \dots \dots (9), \quad \frac{w'l'\rho'}{\eta'} = \frac{wl\rho}{\eta} \text{ 又は } Re' = Re \dots \dots \dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa' g' \rho' l' &= \kappa g \rho l \\ \frac{\kappa' g' \rho' l'}{\beta' \theta'} &= \frac{\kappa g \rho l}{\beta \theta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11), \quad \left. \begin{aligned} \frac{\kappa' \eta' w'}{l'} &= \frac{\kappa \eta w}{l} \\ \frac{\kappa' \eta' w'}{l' \beta' \theta'} &= \frac{\kappa \eta w}{l \beta \theta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

を得る。(10) は Reynolds 數である。(11), (12) から κ', κ を消去すると

$$\beta' \theta' = \beta \theta \dots \dots \dots (13), \quad \frac{g' \rho' l'^2 \beta' \theta'}{\eta' w'} = \frac{g \rho l^2 \beta \theta}{\eta w} \dots \dots \dots (14)$$

更に (10) と (14) で w', w を消去すると

$$\frac{g' \rho' l'^3 \beta' \theta'}{\eta'^2} = \frac{g \rho l^3 \beta \theta}{\eta^2} \text{ 又は } Gr' = Gr \dots \dots \dots (15)$$

となつて Grashof 數を與へる。⁽¹⁾ (13) は嚴しい條件で嚴密には, β の等しい媒質では温度差の異なる場合は比較出来ない。(3), (4) からは (9) の外に

$$\frac{a't'}{l'^2} = \frac{at}{l^2} \dots \dots \dots (16) \text{ 及び } \frac{\alpha'l'}{\lambda'} = \frac{\alpha l}{\lambda} \text{ 即ち } Nu' = Nu \dots \dots \dots (17)$$

が得られ, (17) は Nusselt 數である。

尙最後に (9), (16) から $t' t$ を消去し、更に (10) を考慮すると、

$$\frac{w'l'}{a'} = \frac{wl}{a} \text{ 即ち } \frac{w'c'\rho'l'}{\lambda'} = \frac{wc\rho l}{\lambda} \text{ 又は } Pe' = Pe \dots \dots \dots (18)$$

$$\text{及び} \quad \frac{c'\eta'}{\lambda'} = \frac{c\eta}{\lambda} \text{ 即ち } Pr' = Pr \dots \dots \dots (19)$$

を得、夫々 Péclet 數及び Prandtl 數となる。

實際の場合、強制對流に於ては膨脹係數や壓縮率を考慮する必要がなく、從つて相似の法則は結局

$$\frac{\theta}{\theta_0} = F\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \frac{at}{l^2}, Nu, Re, Pe\right) \dots \dots \dots (20)$$

(1) (13), (14) から見ると (15) 中の $(\beta'\theta'), (\beta\theta)$ の冪數は任意に變へられる。

となる。自然対流に於ては (13) の條件は満足されないでも近似的に相似の状態が得られるものと考へられ、相似の法則として

$$\frac{\theta}{\theta_0} = F\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \frac{at}{l^2}, Nu, Gr, Pr\right) \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。速度が大きくなる場合は Re も考慮される。

水を充たした罐詰の模型について谷正二氏⁽¹⁾の實驗された結果によると自然対流が起る場合でも、單に熱傳導だけの場合と同様 (16) によつて對應する時刻を決めると、溫度の分布が近似的に相似になることが分つた。此の場合には (21) 中 Gr の項もあまり重要な影響を及ぼさないものと考へられる。

尙 (20), (21) が夫々從來の定常な對流の相似の法則⁽²⁾をも含むことは明かである。

(1) 谷 正二：本誌 8 (2), 昭和十四年, 76~78.

(2) 例へば NESSELMAN, K.; Zs. f. d. ges. Kälte-Ind., 45 (11), 1938, 201~205. HERMANN, R.; Phys. Zs. 33 (11), 1932, 452~454.