楕圓罐の加熱に就て

岩 田 義 一

(水産講習所)

Temperature-Time Relation for Oval Cans during Heating.

Giiti IWATA

SYNOPSIS

Temperature-time relation for oval cans in heating was calculated with respect to their centre. For sufficiently large values of t , the time of heating, the following relation was obtained:—

$$\ln(\theta_e - \theta) = -\lambda \kappa t + \text{const.}$$

where

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{2c}\right)^2 + \frac{4}{l^2 \mu}$$

and

$$\mu = -0.3257 + 0.2572 \frac{a+b}{a-b} - 0.0076 \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \text{ for } 2 < \frac{a+b}{a-b} < 6.$$

θ : temperature at the centre of oval can, θ_e : retort temperature, κ : thermal diffusivity of the content, $2l$: focal distance of the ellipse, $2a$: major axis, $2b$: minor axis, $2c$: height of the can.

λ and μ for ordinary oval cans were calculated as shown in Table 1. The values of thermal diffusivity of some marine products, obtained by applying the above formula to the observational data, are listed in Table 2.

魚肉を調味液と共に詰めた罐を沸騰する水にて加熱するとき、その温度は $\theta_e = 100^\circ\text{C}$ に上昇してゆく。その仕方は罐の形により定性的な見當はつくが、以下に楕圓罐につき之を定量的に算出する。その結果は罐の中心温度を θ 、長軸を $2a$ 、短軸を $2b$ 、高さを $2c$ 、罐の内容物の温度傳導率を κ 、時間を t とするとき、充分時間がたてば次の關係が成立つ。

$$\ln(\theta_e - \theta) = -\lambda \kappa t + \text{const.} \quad (1)$$

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{2c}\right)^2 + \frac{4}{(a^2 - b^2)\mu}, \quad (2)$$

$$\mu = -0.3257 + 0.2572 \frac{a+b}{a-b} - 0.0076 \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2, \text{ 但し } 2 < \frac{a+b}{a-b} < 6 \quad (3)$$

直楕圓罐の熱傳導の計算 この λ , μ を求めるには、熱傳導の方程式を境界條件を充たすやうに解けばよい。加熱する前罐の温度は一様に θ_0 であり、表面では θ_e であるとして、 $\theta_e - \theta = u(\theta_e - \theta_0)$ できまる u をとるときは、熱傳導の微分方程式は

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4)$$

境界條件は初めに $u_{t=0} = 1$ 、表面では $u = 0$ となる。

座標の原點を罐の中心に、楕圓の長軸の方向に x 軸、短軸の方向に y 軸、高さの方向に z 軸をとり (第 1 圖)、 u は時間因子として $\exp(-\lambda \kappa t)$ を含むとすると (4) は次のやうになる。 λ は決定すべき常數である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = 0.$$

u を x, y の函数 $\varphi(x, y)$ と z の函数との積に分離し、 z の函数として罐の上下の面 $z = \pm c$ で 0 となる直交函数 $\frac{1}{\sqrt{c}} \sin \frac{n\pi}{2c}(z+c)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) をとると、

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\lambda - \left(\frac{n\pi}{2c} \right)^2 \right) \varphi = 0$$

この $\lambda - \left(\frac{n\pi}{2c} \right)^2$ を φ が楕円の縁で 0 となるやうに決定しなければならぬ。さて楕圓を共形寫像

$$x + iy = l \sin(\xi + i\eta), \quad x = l \sin \xi \cosh \eta, \quad y = l \cos \xi \sinh \eta \quad (5)$$

により第 2 圖の矩形に變形する。 l は焦點距離で $a = l \cosh \frac{\pi\alpha}{2}$, $b = l \sinh \frac{\pi\alpha}{2}$, $a^2 - b^2 = l^2$, $a + b = (a - b)e^{\pi\alpha}$ である。楕圓の縁は AB, CD に移る。微分方程式も又變形される。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \left(\lambda - \left(\frac{n\pi}{2c} \right)^2 \right) \frac{l^2}{2} (\cos 2\xi + \cosh 2\eta) \varphi = 0.$$

或は $\lambda = \left(\frac{n\pi}{2c} \right)^2 + \frac{4}{l^2 \mu}$, $J = 2(\cos 2\xi + \cosh 2\eta)$ として

$$\mu \Delta \varphi + J \varphi = 0. \quad (6)$$

結局之を解くのである。その爲に矩形内で境界條件を満足する直交函数で展開する方法をとる。 $\eta = \pm \frac{\pi}{2} \alpha$ で 0 となる直交函数は $\sin \frac{q}{\alpha} \left(\eta + \frac{\pi}{2} \alpha \right)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$ での直交函数は $\sin p \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right)$, $\cos p \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right)$ であるが楕圓では AD は真中から折れて 2 つに重るのであるから、温度の連續を考えると、これらの任意の組合せはとれない。つまり $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ で φ は η の偶函数、 $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ は η の奇函数でなくてはならない。そのために次の 2 通りしかとりえない。

$$\sin p \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{2q}{\alpha} \left(\eta + \frac{\pi}{2} \alpha \right), \quad \cos p \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{2q+1}{\alpha} \left(\eta + \frac{\pi}{2} \alpha \right)$$

或は一つにまとめて

$$\phi'_{pq} = \sin \left(p\xi + \frac{p+q}{2} \pi \right) \sin q \left(\frac{\eta}{\alpha} + \frac{\pi}{2} \right), \quad p, q = 0, 1, 2, 3, \dots$$

所で加熱前温度が罐内一様なのだから $\varphi(\xi, \eta)$ は ξ, η につき偶函数である。故に p が偶数、 q が奇数のものだけ入用で次の如くおく。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{pq} &= \frac{2}{\pi \sqrt{\alpha}} \cos 2p\xi \cos \frac{2q+1}{\alpha} \eta & p=1, 2, 3, \dots \\ \phi_{0q} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\alpha}} \cos \frac{2q+1}{\alpha} \eta & p=0. \end{aligned} \right\} q=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

さて (6) を解くのは

第 1 圖

$$\int (\mu \Delta \varphi + J \varphi) \phi_{pq} dS = 0, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

から φ をきめるのと同様である。但し積分は第 2 圖の矩形につき行ふ。なぜならば、この関係から、 $\mu \Delta \varphi + J \varphi$ を ϕ_{pq} で展開すれば係数は全部 0、故に恒等的に 0 でなければならないから。 φ を ϕ_{rs} で展開して $\varphi = \sum a_{rs} \phi_{rs}$ とし、之を (8) に代入して

$$\mu \sum a_{rs} \int \Delta \phi_{rs} \cdot \phi_{pq} dS + \sum a_{rs} \int J \phi_{rs} \phi_{pq} dS = 0.$$

茲に $\int \phi_{rs} \phi_{pq} dS = \delta_{pr} \delta_{qs}$, $\int \Delta \phi_{rs} \cdot \phi_{pq} dS = -\epsilon_{rs} \delta_{pr} \delta_{qs}$, $\epsilon_{rs} = 4r^2 + \left(\frac{2s+1}{\alpha}\right)^2$,
 $\int J \phi_{rs} \phi_{pq} dS = \delta_{[p-r],1} \delta_{qs} + (-1)^{q-s} \delta_{pr} \gamma_{q-s, q+s-1}$, $\gamma_{rs} = \frac{2 \sinh \pi \alpha}{\pi \alpha} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} \right)$

但し $\int J \phi_{0s} \phi_{pq} dS = \sqrt{2} \delta_{p1} \delta_{qs}$, δ_{pq} は $p=q$ のとき 1, その他のとき 0 を表はす。

その結果 μ は次の無限行列 A の固有値として定まり、無数に存在する。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{rr} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{02r-1}}{\epsilon_{0r}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon_{0r} \epsilon_{1r}}} & & \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon_{0r} \epsilon_{1r}}} & \frac{\gamma_{02r-1}}{\epsilon_{1r}} & \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{1r} \epsilon_{2r}}} \\ & \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{1r} \epsilon_{2r}}} & \frac{\gamma_{02r-1}}{\epsilon_{2r}} & \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{2r} \epsilon_{3r}}} \\ & & \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{2r} \epsilon_{3r}}} & \frac{\gamma_{02r-1}}{\epsilon_{3r}} \end{pmatrix}$$

$$A_{rs} = A_{sr} = (-1)^{r-s} \gamma_{-s, r+s-1} \left(\frac{\delta_{jk}}{\sqrt{\epsilon_{jr} \epsilon_{ks}}} \right).$$

$[r \neq s]$

A_{rr} は対角線とその両側だけ 0 でなく、 A_{rs} は対角行列である。共に次数は無限である。 A_{rr} も A_{rs} も A も皆エルミット行列である。対角線上に並ぶ行列のみ考へるときは、 $A_{rr}(r=1, 2, 3, \dots)$ が μ の固有値を提供する。 A_{rr} の固有値の計算は簡単である。連分數法によればよい。尤も収斂を速くさせるには簡単な工夫を附加する。その他の行列を考へるときは今得たものを第一近似として μ を計算してゆく。エルミット行列 H の固有値が無限にあり、大きさの順に $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \dots$, その固有解が $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ であるとき、任意の點 $f = \sum a_k \varphi_k$, $a_i \neq 0$ に H を繰返し施してゆくときは

$$H^n f = \sum a_k \rho_k^n \varphi_k$$

$n \rightarrow \infty$

$$H^n f / H^{n-1} f \rightarrow \rho_1 \quad \left(\because \left(\frac{\rho_k}{\rho_1} \right)^n \rightarrow 0 \right)$$

$$\rho_1^{-n} H^n f \rightarrow a_1 \varphi_1$$

によつて ρ_1 と φ_1 とが計算できる。 f として φ_1 に近いものをとれば極めて速かだし、更に又 φ_2 に近いものから φ_1 -成分を減じたものとつて計算すれば ρ_2, φ_2 が得られる。かうして行けば勞力は正確な結果を引出す。

A の固有値を大きさの順に $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ とし、 $\lambda_{mn} = \frac{4}{l^2 \mu_m} + \left(\frac{n\pi}{2c}\right)^2$ とすればこの λ_{mn} は求むる所のものである。 λ_{mn} は大きくなるにつれ、それを含む項は急速に消え失せ、時間が充分たてば最小の λ 即 $\left(\frac{\pi}{2c}\right)^2 + \frac{4}{l^2 \mu_1}$ のみ有力になる。

精圓罐への應用 μ_1, λ を種々の罐型につき計算すれば第 1 表のやうになる。

(3) はかうして計算した μ を $(a+b)/(a-b)$ の二次式として表はしたもので第 3 圖の如く大略直線になる。

ついでに、これらの罐を用ひた橋本常隆⁽¹⁾、及び O. W. LANG⁽²⁾ の實驗から内容物の溫度傳導率 κ を算出すると第 2 表となり、他の場合に求められた水産食品のそれと大體一致してゐる。

この計算は終始岡田光世教授の御指圖による。同氏並に御援助を得た奥野前囑託に深謝する。

第 3 圖

第 1 表

罐 型	一 號 罐	二 號 罐	1-lb. oval.	1/2-lb. oval
2 a	15.9 cm	15.3 cm	6 6/16 inch	5 14/16 inch
2 b	10.75	9.55	4 3/16	3 8/16
2 c	3.65	3.05	1 8/16	1 3/16
l	5.858	5.977	2.359	2.408
α	0.5232	0.4658	0.4370	0.5011
$(a+b)/(a-b)$	5.1747	4.3217	4.8285	3.9473
μ	0.8023	0.6443	0.7396	0.5717
λ	0.8861	1.2347	0.8250	1.2796

第 2 表

罐 型	一 號 罐	1-lb. oval			1/2lb. oval.
内 容	トマトサーデン詰換	サ バ	イ ワ シ	イ ワ シ	イ ワ シ
		切 身	油 燐	トマトソース	油 燐
$\kappa \ 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{sec}$	1.108	1.29	1.01	1.22	1.09
實 驗 者	橋 本	O. W. LANG			

(1) 橋本常隆：加熱殺菌に依る罐内壓力の變化と新加熱殺菌法の研究 罐詰時報，18 (11)，1939，44~52.

(2) LANG, O. W.: Thermal process for canned marine products, Univ. Calif., Publ. Publ. Health, 2 (1), 1935, 1~182.