コイラー巻き取り装置のモデリングと制御

平田 光男*・江田 明浩*・古屋 賢一*²・児島 晃*²・増田 士朗*²・浅野 一哉*³

Modeling and Control of Bimodal Coiler System

Mitsuo HIRATA, Akihiro EDA, Kenichi FURUTA, Akira KOJIMA, Shiro MASUDA and Kazuya ASANO

Synopsis : The coiler system is a final part of hot rolling process. The torque of the mandrel and the force imposed on the pinch roll are cooperatively controlled in order to suppress the tension fluctuation when the steel plate leaves the final stand. In this paper, the coiler system is modeled as a bimodal hybrid system, and two control methods are applied. The effectiveness of the proposed methods are evaluated by simulation.

Key words : bimodal coiler system; hybrid model; final-state control; LQ control.

1. はじめに

コイラー巻き取り装置は、Fig. 1に示すようにタンデムミルを通過した圧延材をマンドレルにより高速に巻き取る装置である。通常、圧延材を安定的に巻き取るために、最終スタンドとマンドレル間の圧延材の張力が一定になるよう、マンドレルに一定のトルクが付与されている。しかし、圧延材が最終スタンドを抜けた瞬間に、張力は急激に減少するため、この張力変動により、巻き取りが乱れてしまうことがある。そのため、最終スタンドとマンドレル間にピンチロールを設け、ピンチロールによって付与される張力を適切に制御することで、張力変動を抑える必要がある。このとき、コイラー巻き取り装置の特性は、圧延材が最終スタンドを抜ける前後で異なることから、ハイブリッドシステム¹⁾としてモデリングできる。

そこで、本論文では、Fig. 1に示すコイラー巻き取り装置のハイブリッドモデルを導出し、コイラー巻き取り制御の問題設定を行ったあと、複数の制御法を適用し、圧延材が最終スタンドを抜ける際の過渡特性を評価する^{2,3)}。

Fig. 1. Coiler system.

2. 状態空間モデルの導出

コイラー巻き取り装置のモデリングにあたり、Fig. 1において、圧延材が最終スタンドF7を抜ける前をMode 1、抜けた後をMode 2と定義し、各モードの状態方程式を導出する。その際、制御入力にはマンドレルの駆動トルクの目標値 T_M^{ref} [Nm]とピンチロールによって付与される張力の目標値 F_p^{ref} [N]とする。一方、観測出力はマンドレルの角速度 ω_M [rad/s]とピンチロールとマンドレル間の張力 σ_{PM} [N]とする。よって、入力ベクトル u および出力ベクトル y は次式となる。

$$u = \begin{bmatrix} T_M^{\text{ref}} \\ F_p^{\text{ref}} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \omega_M \\ \sigma_{PM} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

なお、 T_M^{ref} に対して実際のトルクは遅れなく生じるものとし、ピンチロールによって付与される実際の張力 F_p [N]については F_p^{ref} に対して一次遅れ特性を持つものと仮定する。また、モデリングの際に必要な物理パラメータをTable 1にまとめた。なお、物理パラメータの値については、板幅1200 mm、板厚1.2 mm、F7とピンチロール間の距離150 mを仮定し、鉄の密度 $7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とヤング率 $203 \times 10^9 \text{ Pa}$ を用いて求めた。また、マンドレルの慣性モーメント J_M や半径 R_M などは、通常、圧延材を巻き取るに従って変化する時変パラメータであるが、ここでは、Mode 1からMode 2へ切り替わるごく短い時間の動作を議論することから、定数と仮定した。

Mode 1

Fig. 2(a)に示すように、最終スタンドF7のワークロールが送り出す板速を v_p [m/s]とする。一方、ピンチロールと

平成21年10月30日受付 平成21年12月12日受理 (Received Oct. 30, 2009; Accepted Dec. 12, 2009)

* 宇都宮大学大学院電気電子システム工学専攻 (Graduate School of Engineering, Utsunomiya University, 7-1-2 Yoto Utsunomiya 321-0904)

* 2 首都大学東京大学院システムデザイン専攻 (Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University)

* 3 JFE スチール株式会社スチール研究所 (Steel Research Laboratory, JFE Steel Corporation)

Table 1. Definition of physical parameters.

Symbol	Description	Value	Unit
G_{fe}	Density of iron	7.8×10^3	[kg/m ³]
E_s	Young's modulus of iron	203×10^9	[Pa]
H_M	Width of steel	1.2	[m]
S	Cross-sectional area of steel	2.4×10^{-3}	[m ²]
L_p	Length of steel between F_7 and pinch roll	150	[m]
k_P	Stiffness of steel between F_7 and pinch roll	3.248×10^6	[N/m]
J_M	Inertia moment of mandrel	4.652×10^3	[Nm]
M_M	Mass of mandrel	16.5×10^3	[kg]
D_M	Viscous friction of mandrel	0	[Nms/rad]
R_M	Radius of mandrel	0.75	[m]
M_P	Equivalent mass of steel	2.808×10^3	[kg]
D_P	Viscous friction between M_P and floor	0	[Ns/m]
τ_P	Time constant of ACR	0.01	[s]

Fig. 2. Hybrid model of coiler system.

マンドレル間の圧延材の伸びを無視すると、ピンチロールを通り抜ける板速は $R_M \omega_M$ [m/s] となる。 v_P と $R_M \omega_M$ の速度差の積分が F7 とピンチロール間の圧延材の伸び x_P になるので、次式が得られる。

$$\dot{x}_P = R_M \omega_M - v_P \quad \dots\dots\dots (2)$$

ピンチロールによって付与される張力を F_P とすると、ピンチロールとマンドレル間の張力 σ_{PM} は $k_P x_P + F_P$ となるので、マンドレル周りの運動方程式は次式となる。

$$J_M \dot{\omega}_M + D_M \omega_M = T_M^{\text{ref}} - R_M (k_P x_P + F_P) \quad \dots\dots\dots (3)$$

さらに、 F_P が目標値 F_P^{ref} に対して一次遅れ特性を持つと仮定し、その時定数を τ_P [s] とすると次式が成り立つ。

$$\dot{F}_P = -\frac{1}{\tau_P} F_P + \frac{1}{\tau_P} F_P^{\text{ref}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、Mode 1 の状態変数 x_{m1} を次のように定めると

$$x_{m1} = [\omega_M \ x_P \ F_P]^T \quad \dots\dots\dots (5)$$

(2)~(4) 式から次の状態方程式と出力方程式を得る。

$$\dot{x}_{m1} = A_{m1} x_{m1} + B_{m1} u + E_{m1} v_P, \quad y = C_{m1} x_{m1} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、

$$A_{m1} = \begin{bmatrix} -\frac{D_M}{J_M} & -\frac{R_M k_P}{J_M} & -\frac{R_M}{J_M} \\ R_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$B_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix}, \quad E_{m1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{m1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_P & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

Mode 2

圧延材が最終スタンドのワークロールを抜けると、最終スタンド F7 とピンチロール間の張力により変位 x_P だけ伸びていた圧延材は自然長に戻ろうとする。このときの挙動をモデリングするために、Fig. 2(b) に示すよう等価質量 M_P の質点が剛性 k_P を介して接続されたモデルを考える。すると、質点 M_P に関する次の運動方程式を得る。

$$M_P \dot{v}_P + D_P v_P = k_P x_P \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 D_P は質点と床面との間の粘性摩擦係数を表す。ここで、Mode 2 の状態変数 x_{m2} を次のように定めると

$$x_{m2} = [\omega_M \ v_P \ x_P \ F_P]^T \dots\dots\dots(10)$$

(2)~(4), (9)式から次の状態方程式と出力方程式を得る。

$$\dot{x}_{m2} = A_{m2}x_{m2} + B_{m2}u, \quad y = C_{m2}x_{m2} \dots\dots\dots(11)$$

ただし,

$$A_{m2} = \begin{bmatrix} -\frac{D_M}{J_M} & 0 & -\frac{R_M k_P}{J_M} & -\frac{R_M}{J_M} \\ 0 & -\frac{D_P}{M_P} & \frac{k_P}{M_P} & 0 \\ R_M & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

$$B_{m2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix}, \quad C_{m2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_P & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

得られたハイブリッドモデルの妥当性を検証するため,

(a) Time response of tension

(b) Time responses of velocity

Fig. 3. Simulation.

$t=1$ [s]でMode 1からMode 2へ切り替わった場合のシミュレーションを行った。なお, Mode 1では, 最終スタンドF7のワークロールが送り出す板速は $v_P=10$ [m/s]で一定と仮定した。また, T_M^{ref} については, ピンチロールとマンドレル間の張力が 23520 N ($=1$ kg/mm²)になるように値を決めた。一方, ピンチロールが付与する張力については $F_P^{\text{ref}}=0$ とした。結果をFig. 3に示す。 $t=1$ [s]で圧延材がF7を抜けた後は, M_P と k_P で決まる固有振動数で振動しながら板速が上昇する様子が確認できる。

3. 問題設定

前章で求めたコイラー巻き取り装置のハイブリッドモデルに対して, Mode 1からMode 2へ切り替わる際の張力 σ_{PM} の変動を最小限に抑えることを制御目的とする。その際, x_P は速やかに定常値に収束し, ω_M や v_P は大きく変動しないことが望ましい。また, 制御入力 T_M^{ref} , F_P^{ref} については, 実現可能なものとする。

4. 制御手法の検討

コイラー巻き取り制御において良好な過渡応答を達成するためには, 1) ミルの速度拘束下におけるマンドレル・ピンチロール系の制御, および2) 尾端がF7のワークロールから抜けた後のマンドレル・ピンチロール系の制御問題を合理的に扱うことが望まれる。本節では, 終端状態制御によるフィードフォワード制御手法と有限時間最適レギュレータによるフィードバック制御手法について検討し, その有効性をシミュレーションで検証する。

4.1 モード切替を考慮したフィードフォワード制御

4.1.1 終端状態制御

終端状態制御(FSC: final-state control)は, 初期状態を終端状態へ遷移させる入力の中から, 入力の時間変化の二乗積分値を最小とするものを求める手法として知られる⁴⁾。入力の物理量が加速度の次元を持つ場合, その時間変化はジャーク(加加速度)に対応するので, このようにして求められた入力は加加速度最小入力とも呼ばれる。加加速度最小入力は, 時間変化が連続で滑らかとなるので, 色々なロボットの動作の実現や, ハードディスク装置のヘッド位置決め制御系において, 機械共振を加振しない入力の導出に用いられる。

FSCでは, Fig. 4に示すように, 実際の制御対象の離散化モデル $P[z]$ の入力 $u_c[k]$ に離散時間積分器 $1/(z-1)$ を接続した拡大系が用いられる。拡大系への入力 $u[k]$ は, 実際の入力 $u_c[k]$ の時間微分に相当するので, 初期条件と終端条件を与えて $u[k]$ の二乗和を最小にする N ステップの入力列 $\{u[0], u[1], \dots, u[N]\}$ を求めれば, $u_c[k]$ は滑らかな入力となる。

Fig. 4. Augmented system for FSC design.

4・1・2 モード切替を考慮した終端状態制御

FSCを二つのモードを持つハイブリッドシステムへ適用する。まず、各モードの離散時間状態方程式が、共通の状態変数 $x[k]$ を用いて次式で与えられているものと仮定する。

$$x[k+1]=A_1x[k]+B_1u[k] \quad (\text{Mode 1}) \cdots \cdots (14)$$

$$x[k+1]=A_2x[k]+B_2u[k] \quad (\text{Mode 2}) \cdots \cdots (15)$$

なお、コイラーシステムへの適用を考えて、入力が多入力、つまり $u[k]$ はベクトルと仮定する。

いま、Mode 1からMode 2への切替時刻が $k=0$ で既知であると仮定し、その M ステップ手前の初期状態 $x_0=x[-M]$ を $M+N$ ステップ後の終端状態 $x_f=x[N]$ に推移させる入力列 $\{u[-M], \dots, u[0], \dots, u[N-1]\}$ を求めることを考えよう。従来型の終端状態制御と同様に、そのような入力は一般に唯一には定まらないので、評価関数

$$J = \sum_{k=-M}^{N-1} u^T[k] Q_k u[k], \quad Q_k > 0 \cdots \cdots (16)$$

を最小にするものを求めると、次式を得る⁴⁾。

$$U = Q^{-1} \Sigma^T (\Sigma Q^{-1} \Sigma^T)^{-1} (x_f - A_2^N A_1^M x_0) \cdots \cdots (17)$$

ただし

$$U = [u^T[-M], u^T[-M+1], \dots, u^T[0], \dots, u^T[N-2], u^T[N-1]]^T,$$

$$\Sigma = [A_2^N \Sigma_1, \Sigma_2],$$

$$\Sigma_1 = [A_1^{M-1} B_1, A_1^{M-2} B_1, \dots, B_1],$$

$$\Sigma_2 = [A_2^{N-1} B_2, A_2^{N-2} B_2, \dots, B_2],$$

$$Q = \text{diag}[Q_{-M}, Q_{-M+1}, \dots, Q_0, \dots, Q_{N-1}]$$

4・1・3 コイラー巻き取り制御への適用

(17)式からFSC入力を求めるためには、Mode 1とMode 2の状態方程式が同じ状態変数を持たなければならない。また、本制御系設計では、圧延材がF7を抜ける際のピンチロール～マンドレル間の張力変動を抑えたいので、状態変数に張力 σ_{PF} が陽に表れるようにしたい。そこで、Mode 1とMode 2の共通の状態変数を

$$x_c(t) = [\omega_M(t), v_P(t), x_P(t), \sigma_{PM}(t)]^T \cdots \cdots (18)$$

とすることを考える。

まず、Mode 1の状態方程式について考えよう。(6)式の状態変数を $\hat{x}_{m1} = [\omega_M, x_P, \sigma_{PM}]^T$ のように張力 σ_{PM} が表れるように状態変数変換する。さらに、Mode 1では、F7の

ワークロールが送り出す板速は一定とみなせるので

$$\dot{v}_P(t) = 0$$

と仮定できる。したがって、Mode 1の状態方程式は次式となる。

$$\dot{x}_c(t) = A_{c1} x_c(t) + B_{c1} u_c(t) \cdots \cdots (19)$$

ただし、 $u_c(t) = [T_M^{\text{ref}}(t), F_P^{\text{ref}}(t)]^T$

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -\frac{D_M}{J_M} & 0 & 0 & -\frac{R_M}{J_M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_M & -1 & 0 & 0 \\ k_P R_M & -k_P & \frac{k_P}{\tau_P} & -\frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix}, \quad B_{c1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix}$$

一方、Mode 2については、状態変数変換だけでよいので、次式が直ちに求まる。

$$\dot{x}_c(t) = A_{c2} x_c(t) + B_{c2} u_c(t) \cdots \cdots (20)$$

ただし、 $u_c(t) = [T_M^{\text{ref}}(t), F_P^{\text{ref}}(t)]^T$

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} -\frac{D_M}{J_M} & 0 & 0 & -\frac{R_M}{J_M} \\ 0 & -\frac{D_P}{M_P} & \frac{k_P}{M_P} & 0 \\ R_M & -1 & 0 & 0 \\ k_P R_M & -k_P & \frac{k_P}{\tau_P} & -\frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix}, \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_P} \end{bmatrix}$$

このようにして求めた連続時間状態方程式(19)、(20)式をサンプリング周期 T_s でゼロ次ホールド離散化を行うと次式を得る。

$$x_d[k+1] = A_{d1} x_d[k] + B_{d1} u_c[k] \cdots \cdots (21)$$

$$x_d[k+1] = A_{d2} x_d[k] + B_{d2} u_c[k] \cdots \cdots (22)$$

ただし、 $A_{d1} = e^{A_{c1} T_s}$ 、 $A_{d2} = e^{A_{c2} T_s}$ 、 $B_{d1} = \int_0^{T_s} e^{A_{c1} t} B_{c1} dt$ 、 $B_{d2} = \int_0^{T_s} e^{A_{c2} t} B_{c2} dt$ 。また、 $x_d[k] = x_c(kT_s)$ および

$$u_c(kT_s + \theta) = u_c[k], \quad 0 \leq \theta < T_s$$

と定義した。最後に、Fig. 4の拡大系を得るために、入力 $u_c[k]$ と拡大系への入力 $u[k]$ の間に積分器(和分器)があるものとする、

$$u_c[k+1] = u_c[k] + u[k]$$

が成り立つので、最終的に、以下に示す拡大系の状態方程式を得る。

$$x[k+1] = A_1 x[k] + B_1 u[k] \quad (\text{Mode 1}) \cdots \cdots (23)$$

$$x[k+1] = A_2 x[k] + B_2 u[k] \quad (\text{Mode 2}) \cdots \cdots (24)$$

ただし、 $x[k] = [x_d^T[k], u_c^T[k]]^T$ および

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{d1} & B_{d1} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{d2} & B_{d2} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

ここで、 I_2 はサイズが2の単位行列を表す。

4.1.4 シミュレーションによる有効性の検証

前節の結果を用いて、FSC入力を実際に求める。Mode 1では、F7から $v_p=10$ [m/s]の速度で圧延材が送り出されていると仮定する。このとき、 1 mm^2 当たりの張力を1 kgと仮定すると、F7～ピンチロール間の圧延材の伸びは約7.3 mmとなる。したがって、Mode 1での制御対象の初期状態は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x_d[-M] &= [\omega_M \ v_p \ x_p \ \sigma_{PM}]^T \\ &= \begin{bmatrix} 13.33 \\ 10.0 \\ 7.3 \times 10^{-3} \\ 2.352 \times 10^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

次に、制御対象の終端状態 $x_d[N]$ について考える。圧延材がF7を抜けた後の理想状態は、マンドレルの速度 ω_M 、圧延材の尾端の速度 v_p 、ピンチロール～マンドレル間の張力は変化せず、圧延材尾端～ピンチロール間の伸び x_p が速やかに0になってほしい。そこで、最終状態は次式に示すように x_p を0とし、それ以外は、初期状態と同じ値とした。

$$x_d[N] = \begin{bmatrix} 13.33 \\ 10.0 \\ 0 \\ 2.352 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

制御入力の初期値 $u_c[-M]$ および終端値 $u_c[N]$ については、不必要な過渡応答が生じないように与える必要がある。そこで、Mode 1およびMode 2の運動方程式において、各変数の時間微分を0とおいた定常状態における関係式を、 $x_d[-M]$ 、 $u_c[-M]$ および $x_d[N]$ 、 $u_c[N]$ が満たすように、以下のように与えた。

$$\begin{aligned} u_c[-M] &= \begin{bmatrix} T_M^{\text{ref}}[-M] \\ F_P^{\text{ref}}[-M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_M \sigma_{PM}[-M] \\ 0 \end{bmatrix} \\ u_c[N] &= \begin{bmatrix} T_M^{\text{ref}}[N] \\ F_P^{\text{ref}}[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_M \sigma_{PM}[N] \\ \sigma_{PM}[N] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また、(16)式で示した入力に対する重み Q_k については、単位行列とした。

以上の条件で、サンプリング周期を $T_s=1 \times 10^{-3}$ [s]とし、Mode 1とMode 2の各ステップ数を $M=N=250$ と与えてFSC入力を求めたところ、Fig. 5に示す入力を得た。この入力を制御対象に与えたときの ω_M 、 x_p 、 v_p 、 σ_{PM} の応答をFig. 6に実線で示す。なお、これらの図では、 $t=0.25$ [s]で

Fig. 5. Control input.

Mode 1からMode 2に切り替わっている。比較のために $M=0$ 、 $N=250$ として、Mode 2に切り替わる直前を初期状態としてFSC入力を求めてシミュレーションを行った結果を破線で示した。これは、切替を考えない従来型終端状態制御の結果に対応する。マンドレルの角速度 ω_M を比べると、従来法では圧延材がF7を抜けた瞬間に角速度が急激に上昇しているが、提案法ではそのような現象が抑えられている。圧延材の伸び x_p については、従来法の場合値が負になる領域があるが（たるみにつながる恐れがある）、提案法では常に正の値に保たれている。尾端の速度 v_p については、提案法のほうが変動幅が抑えられている。ピンチロール～マンドレル間の張力についても、提案法のほうが変動幅が1/2以下に抑えられていることが確認できる。以上から、提案手法の有効性が確認できた。

なお、本節の手法を実機に適用する際は、外乱の影響や、制御対象の変動に対してロバストになるように、フィードバック制御と組み合わせて実装する必要がある。その際、フィードフォワード特性とフィードバック特性が分離できる2自由度制御が特に有効である⁵⁾。

Fig. 6. Time responses of state variables.

4・2 モード切替を考慮した有限時間最適レギュレータ

2節(6), (11)式に導かれた Mode 1, Mode 2 の状態方程式に基づいて, 有限時間最適レギュレータを構成する。

はじめに, 速度 $v_p=10$ [m/s] の巻き取り速度を基準に定め, 本節では偏差を適切に制御する問題を考える。Mode 1 において, 定常状態 x_{m1}^0 と対応する定常入力 u^0 を次のように定める。

$$x_{m1}^0 = \begin{bmatrix} \omega_M^0 \\ 0 \\ F_P^0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_p/R_M \\ 0 \\ T^{\text{ref}0} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

$$u^0 = \begin{bmatrix} T_M^{\text{ref}0} \\ F_P^{\text{ref}0} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} R_M T^{\text{ref}0} \\ T^{\text{ref}0} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (26)$$

ここで, $T^{\text{ref}0}=2.352 \times 10^4$ [N] であり, $4 \cdot 1 \cdot 4$ 項と同じ値である。そして, 状態と入力を

$$\begin{aligned} x_{m1}(t) &= \bar{x}_{m1}(t) + x_{m1}^0 \quad \cdots \cdots \cdots (27) \\ u(t) &= \bar{u}(t) + u^0 \end{aligned}$$

と偏差 $\bar{x}_{m1}(t)$, $\bar{u}(t)$ により表すと, 等式

$$A_{m1}x_{m1}^0 + B_{m1}u^0 + E_{m1}v_p = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (28)$$

が成り立つので, 次の偏差系が求められる。

$$\dot{\bar{x}}_{m1}(t) = A_{m1}\bar{x}_{m1}(t) + B_{m1}\bar{u}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (29)$$

時刻 t において, Mode 2 に切り替わったとしてシステム

の記述を定める。Mode 2 において, 定常状態 x_{m2}^0 と対応する定常入力 u^0 を次のように定める。

$$x_{m2}^0 = \begin{bmatrix} \omega_M^0 \\ v^0 \\ 0 \\ F_P^0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v^0/R_M \\ 10 \\ 0 \\ T^{\text{ref}0} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (30)$$

$$u^0 = \begin{bmatrix} T_M^{\text{ref}0} \\ F_P^{\text{ref}0} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} R_M T^{\text{ref}0} \\ T^{\text{ref}0} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

そして, 状態と入力を

$$\begin{aligned} x_{m2}(t) &= \bar{x}_{m2}(t) + x_{m2}^0 \quad \cdots \cdots \cdots (32) \\ u(t) &= \bar{u}(t) + u^0 \end{aligned}$$

と偏差 $\bar{x}_{m2}(t)$, $\bar{u}(t)$ により表すと, 次の偏差系が求められる。

$$\dot{\bar{x}}_{m2}(t) = A_{m2}\bar{x}_{m2}(t) + B_{m2}\bar{u}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (33)$$

以下の項では, Mode 1, Mode 2 に対する偏差系に基づいて制御則の構成を考える。

4・2・1 制御系の設計

前節で求められた制御対象に対して, 次の評価関数を最小にする制御則を構成することを考える。

$$J = J_{m1} + J_{m2} \quad \cdots \cdots \cdots (34)$$

ここで J_{m1} , J_{m2} はそれぞれ Mode 1, Mode 2 における偏差系の評価関数であり, 次のように表される。

$$J_{m1} = \int_0^h \{\bar{z}_{m1}(t)^T Q_{m1} \bar{z}_{m1}(t) + \bar{u}(t)^T R \bar{u}(t)\} dt \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\bar{z}_{m1}(t) = \begin{bmatrix} \omega_M(t) - \omega_M^0 \\ k_P x_P(t) + F_P(t) - F_P^0 \end{bmatrix} = \bar{C}_{m1} \bar{x}_{m1}(t) \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\bar{C}_{m1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_P & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{m1} > 0, \quad R > 0$$

$$J_{m2} = \int_h^\infty \{\bar{z}_{m2}(t)^T Q_{m2} \bar{z}_{m2}(t) + \bar{u}(t)^T R \bar{u}(t)\} dt \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\bar{z}_{m2}(t) = \begin{bmatrix} \omega_M(t) - \omega_M^0 \\ v_P(t) - v_P^0 \\ k_P x_P(t) + F_P(t) - F_P^0 \end{bmatrix} = \bar{C}_{m2} \bar{x}_{m2}(t) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\bar{C}_{m2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_P & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{m2} > 0, \quad R > 0$$

ここで、 $t=h$ はMode 1からMode 2に切り替わる時刻であり、既知であるとする。また、対応する状態は次のように定められる。

$$\bar{x}_{m2}(h) = \bar{E} \bar{x}_{m1}(h), \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以下では、Mode 2, Mode 1の順に制御則の構成法を示す。

Mode 2における制御則の構成：リカッチ方程式

$$A_{m2}^T P_{m2} + P_{m2} A_{m2} - P_{m2} B_{m2} R^{-1} B_{m2}^T P_{m2} + \bar{C}_{m2}^T Q_{m2} \bar{C}_{m2} = 0 \quad \dots\dots (39)$$

を定めると正定解 P_{m2} により、制御則は次のように与えられる。

$$\bar{u}(t) = -R^{-1} B_{m2}^T P_{m2} \bar{x}_{m2}(t) \quad \dots\dots\dots (40)$$

また、 J_{m2} の最適値は以下のように表される。

$$\begin{aligned} J_{m2}^{\text{opt}} &= \bar{x}_{m2}(h)^T P_{m2} \bar{x}_{m2}(h) \\ &= \bar{x}_{m1}(h)^T \bar{E}^T P_{m2} \bar{E} \bar{x}_{m1}(h) \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

よって、Mode 2において最適制御(40)式を適用したとき、評価関数(34)式は次のように表される。

$$\begin{aligned} J &= J_{m1} + J_{m2} \\ &= \int_0^h \{\bar{z}_{m1}(t)^T Q_{m1} \bar{z}_{m1}(t) + \bar{u}(t)^T R \bar{u}(t)\} dt + \bar{x}_{m1}(h)^T \bar{E}^T P_{m2} \bar{E} \bar{x}_{m1}(h) \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

Mode 1における制御則の構成：(42)式より、Mode 1における制御問題はターミナルペナルティを適切に定めた有限時間最適レギュレータ問題に一致する。リカッチ微分方程式

$$\begin{aligned} -\dot{P}_{m1}(t) &= A_{m1}^T P_{m1}(t) + P_{m1}(t) A_{m1} \\ &\quad - P_{m1}(t) B_{m1}(t) R^{-1} B_{m1}^T P_{m1}(t) + \bar{C}_{m1}^T Q_{m1} \bar{C}_{m1} \quad \dots\dots\dots (43) \\ P_{m1}(h) &= \bar{E}^T P_{m2} \bar{E} \end{aligned}$$

を導入すると、最適制御則は以下のように求められる⁶⁾。

$$\bar{u}(t) = -R^{-1} B_{m1}^T P_{m1}(t) \bar{x}_{m1}(t) \quad \dots\dots\dots (44)$$

また、 J の最適値は以下のように表される。

$$J^{\text{opt}} = \bar{x}_{m1}(0)^T P_{m1}(0) \bar{x}_{m1}(0) \quad \dots\dots\dots (45)$$

以上の考察により、評価関数(34)式に対する制御則はMode1において(44)式、Mode 2において(40)式を適用することにより求めることができる。

4・2・2 シミュレーションによる有効性の検証

4・2・1項で定めたモード切替を考慮した有限時間最適レギュレータに対して、評価関数の重みを次のように定めた制御系を構成する。

$$Q_{m1} = \text{diag}(q, 100), \quad R = I_2$$

$$Q_{m2} = \text{diag}(q, q, 100), \quad R = I_2$$

$$\text{Case (A)} \quad q = 5 \times 10^{10}$$

$$\text{Case (B)} \quad q = 5 \times 10^{11}$$

$$\text{Case (C)} \quad q = 5 \times 10^{12}$$

Case (A), (B), (C)はマンドレルの角速度 ω_M と圧延材の速度 v_P のペナルティを強調したものであり、(A), (B), (C)の順に緩やかに収束するように定めた。そして切替時刻 $h=1$ [s]とすると、シミュレーション結果はFig. 7, 8のようになった。ここで、Fig. 7, 8の(a)はピンチロールが付与

Fig. 7. Proposed method.

Fig. 8. LQ control.

する張力, (b)は圧延材の伸び, (c)はマンドレルの角速度, (d)は圧延材の板速を表した応答波形である。

提案法においてCase (A), (B), (C)のようにペナルティを与えると, シミュレーション結果はFig. 7のように求められる。Case (A)は基準速度からのペナルティを大きく与えた例であり, 切替時刻 t_k までに偏差なく収束しており, 切り替わったときには影響なくモード遷移の準備ができていることが確認される。このように, 直感的, あるいは経験的に考えてごく自然な制御則が, Mode 1とMode 2を一貫して最適化することによって求まる点に注意したい。

一方, Case (B)では(A)と比べて振幅が狭く緩やかに収束しており, モードの切替を含めて前後で全体のコストを抑制する傾向が現れている。そして, 切り替わったときに微小な振動があるが, すぐに収束していることが確認される。

さらに, Case (C)ではマンドレルの角速度 ω_M のペナルティを強調しすぎたために切り替わるときに偏差が少し残り, 切替後の負担が大きくなるので, その直後に振動がみられた。

なお, Case (A)では, モード切替の前に状態が収束したため, 有限時間最適レギュレータだけ独立に導入しても同様の応答を得ることができる。Case (A)の場合, 提案法の有用性は, 1)ハイブリッドモデルと評価関数(34)式に対応する等価な有限時間最適レギュレータ問題が得られること, 2)その結果, 評価関数(34)式の最適性を考慮してMode 1の応答調整ができること, の2点にある。

次に, Mode 1, Mode 2において通常の最適レギュレータを適用した結果を検討する。ここではリカッチ微分方程式

(43)式の代わりに, リカッチ代数方程式

$$A_{m1}^T P_{m1} + P_{m1} A_{m1} - P_{m1} B_{m1} R^{-1} B_{m1}^T P_{m1} + \bar{C}_{m1}^T Q_{m1} \bar{C}_{m1} = 0 \quad \cdots \cdots (46)$$

の解を用いて, 最適レギュレータを構成した。このときの(A), (B), (C)に対する応答はFig. 8のように求まり, 負荷移行が完了していない場合, モードの切替の前後で応答が乱れる様子が観察される。

これらの結果から, モード遷移を考慮した制御則を適用する場合, 負荷移行の変動が抑制できることが確認される。

5. まとめ

本論文では, コイラー巻き取り装置のハイブリッドモデルを導出し, コイラー巻き取り制御の問題設定を行った。そして, フィードフォワード制御手法として, 終端状態制御による方法, フィードバック制御手法として, 有限時間最適レギュレータによる手法を提案した。いずれの手法も, モード切替を陽に考慮することで, 切替時の過渡応答が改善されることをシミュレーションで確認した。

終端状態制御に基づく手法は, 初期状態と終端状態, およびステップ数を与えるだけでよいので設計が簡便である。しかし, 外乱抑圧や制御対象の変動に対してロバストになるよう, フィードバック制御器が別途必要になる。一方, 有限時間最適レギュレータによる手法は, フィードバック制御系であるのでそのまま実装できる。また, 終端状態制御と異なり, 入力だけでなく, 状態変数にも重みづけが可能のため, 設計自由度が大きい。しかしながら, Mode 1において, リカッチ微分方程式の解が必要となるので, 実装が多少複雑となる。

本論文で導かれた制御法は, モード遷移を的確に記述したハイブリッドモデルに基づくため, 動特性が大きく切替る対象に対しても良好な制御が達成できると期待される。提案法を他の制御問題を通して評価し, さらに両手法の特徴を明らかにすることが今後の課題である。

本研究の一部は日本鉄鋼協会オンライン最適化技術を核とした次世代鉄鋼プロセス制御研究会を通して行われた。記して謝意を表する。

文 献

- 1) J.Imura and S.Azuma: Systems, Control and Information, **51** (2007), 230.
- 2) Hirata, Masuda, Kojima and Asano: CAMP-ISIJ, **22** (2009), 323.
- 3) Hirata, Eda, Kojima, Furuya, Masuda and Asano: CAMP-ISIJ, **22** (2009), 326.
- 4) 山口, 平田, 藤本: ナノスケールサーボ制御, 東京電機大学出版局, (2007).
- 5) M.Hirata, T.Kidokoro and S.Ueda: Trans. Inst. Electr. Eng. Jpn. D, **129** (2009), No. 9, 938.
- 6) 吉川, 井村: 現代制御論, 昭晃堂, (1995), 8章.