改良セカント法にもとづく楕円体析出相を含む 二相組織の応力-歪曲線計算

小山 敏幸*

Calculation of Stress-Strain Curve of the Two-phase Mixture Including Ellipsoidal Inclusion on the Basis of the Modified Secant Method

Toshiyuki KOYAMA

Synopsis : The stress-strain curve of the composite material has been calculated on the basis of the secant method proposed by Weng. Although the effect of inclusion shape on the stress-strain curve has been evaluated by Zhao and Weng, they have assumed the inclusion phase to be a rigid elastic medium which does not deform plastically. In this study, we modified their secant method so as to be able to calculate the stress-strain curve of the composite material which contains the plastically deformed inclusion phase, and evaluated the effect of the inclusion shape on the deformation behavior of the stress-strain curve. The results obtained are as follows: When both phases are soft, *i.e.* the matrix and inclusion phases are both deformable, the stress-strain curve is determined only from the volume fraction of the inclusion phase. In the case that the inclusion phase is hard, *i.e.* the matrix phase is deformable but the inclusion phase is less deformable, the stress-strain curve depends not only on the volume fraction of the inclusion phase but also on the shape of the inclusion phase. The modified secant method proposed in this study will be useful for understanding the effect of inclusion shape on the mechanical property of the composite materials, comprehensively.

Key words: micromechanics; computer; composite; microstructure; inclusion; mechanical property.

1. 緒言

セカント法はWeng¹⁾によって提案された現象論的な応力-歪曲線の数値解析法で、複相組織における応力-歪曲線を、複相を構成している個々の単相の応力-歪曲線が既知である前提のもとに、マイクロメカニクス（森-田中の平均場近似）²⁻⁶⁾にもとづき算出する方法である。したがって、計算理論自体は弾性論である。塑性変形した母相を、セカント弾性率をもつ弾性体に置き換える近似を採用しているので、本計算法は「セカント法」と呼ばれる（セカント法は、塑性理論の範疇では、全歪理論^{7,8)}に対応する）。

これまでWengのセカント法の応用については、繰り込みセカント法⁹⁾や変形応力の上下界予測法¹⁰⁾など多くの進展があるが、基本となる計算手法において主に第二相の形状を球に近似した解析がなされている（マイクロメカニクスでは第二相を介在物と記す場合が多いが、本稿では析出相もしくは析出物と記す）。析出相の形状を楕円体に拡張したセカント法は、Bhattacharyyaら¹¹⁾によって提案された。そこでは回転軸がランダムに配向した多数の回転楕円体析出物が母相中に分散している組織が仮定されている（回転楕円体析出物の回転軸方位に関する平均化にはTandon

ら¹²⁾によって考案された手法が用いられている）。当初、母相のみが塑性変形し、析出相が弾性変形する場合のみが考慮されたが、その後、母相および析出相の両相が塑性変形する場合まで、Bhattacharyyaら¹³⁾により計算理論が拡張された。しかし、この計算では、回転軸がランダムに配向した回転楕円体析出物分散組織を考慮しているの、組織全体としては、力学的に等方的な組織であった。一方、同一方向に回転軸が揃った回転楕円体析出物が分散した、力学的に非等方な組織に対するセカント法は、Zhaoら¹⁴⁾およびQiuら¹⁵⁾によって提案されている。しかし、この解析は第二相の塑性変形を考慮できない理論であった（詳細は2・3節を参照）。Pierardら¹⁶⁾は最近、複数の楕円体析出相を含む複合材料の力学特性について、セカント法を含み種々の解析法の精度比較を行っているが、この解析においても析出相は依然として弾性体として扱われている。すなわち著者の知る限り、回転軸が揃った回転楕円体析出物分散組織を考慮し（つまり二相組織全体として、析出物形状に起因する異方性を有する場合）、かつ母相および析出物の双方が塑性変形する場合まで考慮できるセカント法は未だ存在しない。

他方、高強度・軽量化の要請から、近年、鉄鋼材料の高

平成22年7月27日受付 平成22年9月28日受理 (Received on July 27, 2010; Accepted on Sep. 28, 2010)

* 名古屋工業大学大学院工学研究科（しくみ領域）(Department of Materials Science and Engineering, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho Showa-ku Nagoya 466-8555)

強度化が拡大している¹⁷⁾。特に高強度相であるマルテンサイト相やベイナイト相が第二相として含まれる場合、これら第二相の形状・異方性が少なからず応力-歪曲線に影響する^{18,19)}。したがって、第二相の形状・異方性の効果まで考慮できる応力-歪曲線の実用的解析法の実現が重要な課題となっている。

そこで、本論文では、Zhaoら¹⁴⁾のセカント法を拡張して、組織形態としては、回転軸が揃った回転楕円体析出物分散組織を考慮でき、かつ母相および析出物の双方が塑性変形する場合まで扱うことの可能な改良セカント法を提案する。

2. 計算理論

2.1 問題設定

計算対象の物体を以下のように設定する。

- ・物体は等方弾性体で、構成相は、母相と析出相の二相
 - ・析出物の形状は回転楕円体
 - ・各相の弾性率とポアソン比は既知
 - ・各相それぞれの応力-歪曲線は既知
 - ・塑性変形した母相を弾性体に置き直し、その弾性率にセカント弾性率を採用する
 - ・マイクロメカニクス（森-田中の平均場理論²⁻⁶⁾を用いる
- 以上の設定の下に物体全体の応力-歪曲線を算出する。

2.2 セカント弾性率の定義

Wengの解析¹⁾に従い、セカント弾性率の定義について説明する。母相と析出相それぞれの応力-歪曲線の関数 $\sigma^{(r)}$ をSwiftの式⁷⁾にて近似する。 r は母相と析出相を区別する番号で、 $r=0$ および $r=1$ は、それぞれ母相および析出相を意味するものとする。相 r のセカントヤング率は、 $E^{S(r)}=1/[E^{(r)-1}+(e^{p(r)}/\sigma^{(r)})]$ にて計算され（ $E^{S(r)}$ の上付き添え字の S はセカント量であることを表す）、 $E^{(r)}$ と $e^{p(r)}$ はそれぞれ、相 r のヤング率および塑性歪である。Fig. 1は応力-歪曲線の模式図で、例えば $\epsilon^{(0)}$ まで塑性変形した母相のセカントヤング率は $\sigma^{(0)}/\epsilon^{(0)}$ に等しい（これは全歪理論における弾性率の定義に一致する）。塑性変形における非圧縮性から体積弾性率に関して $\kappa^{S(r)}=\kappa^{(r)}$ が成り立つので、 $E^{S(r)}$ を用いて、セカントポアソン比 $\nu^{S(r)}$ およびセカント剛性率 $\mu^{S(r)}$ が、

$$\nu^{S(r)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu^{(r)} \right) \frac{E^{S(r)}}{E^{(r)}}, \quad \mu^{S(r)} = \frac{E^{S(r)}}{2(1+\nu^{S(r)})}$$

と求められる。

次に相当応力 $\sigma^{*(r)}$ および相当塑性歪 $e^{p*(r)}$ についても、 $\sigma^{(r)}$ と同じ応力-歪曲線の関数が適用できると仮定する。偏差応力 $\sigma'_{ij}(r)$ および塑性歪 $\epsilon^{p(r)}_{ij}$ との関係式は、

Fig. 1. Schematic representation of the stress and strain in a composite material.¹⁾

$$\sigma^{*(r)} = \left(\frac{3}{2} \sigma'_{ij}(r) \sigma'_{ij}(r) \right)^{1/2}, \quad e^{p*(r)} = \left(\frac{2}{3} \epsilon^{p(r)}_{ij} \epsilon^{p(r)}_{ij} \right)^{1/2}$$

にて与えられ、さらにHenckyの流動則¹⁾： $\epsilon^{p(r)}_{ij}=(3/2)(e^{p*(r)}/\sigma^{*(r)})\sigma'_{ij}(r)$ を仮定すると、相当応力 $\sigma^{*(r)}$ および相当塑性歪 $e^{p*(r)}$ を用いて、セカントヤング率は、 $E^{S(r)}=1/[E^{(r)-1}+(e^{p*(r)}/\sigma^{*(r)})]$ とも表現できる。物体全体に対するマクロ的な相当応力 $\bar{\sigma}^*$ と相当塑性歪 $\bar{e}^{p*}$ に関する関係式は、

$$\bar{\sigma}^* = \left(\frac{3}{2} \bar{\sigma}'_{ij} \bar{\sigma}'_{ij} \right)^{1/2}, \quad \bar{e}^{p*} = \left(\frac{2}{3} \bar{\epsilon}^{p*}_{ij} \bar{\epsilon}^{p*}_{ij} \right)^{1/2}$$

と置かれる（変数の上線は、その変数が物体全体の量であることを意味する）。

2.3 関係式の導出

Wengの解析¹⁾に従い各種の関係式を導出する。ただし本稿ではより一般的な定式化が必要であるため、弾性テンソルを $C^{(r)}$ および $C^{S(r)}$ と記し、各種の関係式を求める。また以下で定義する各変数間の関係は、Fig. 1の応力-歪曲線図のようにまとめられる。

まず物体全体に作用している外部応力を $\bar{\sigma}$ とし、歪 ϵ^0 を $\epsilon^0=(C^{S(0)})^{-1}\bar{\sigma}$ にて定義する。 $C^{S(0)}$ を用いているので、 ϵ^0 は母相単相に外部応力場 $\bar{\sigma}$ が作用したときの全歪である。物体内に析出物が存在すると、その影響によって、母相の歪 ϵ^0 が $\tilde{\epsilon}$ だけずれる（応力は $\tilde{\sigma}$ だけずれるとする）。したがって、母相の応力 $\sigma^{(0)}$ は、

$$\sigma^{(0)} = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma} = C^{S(0)}(\epsilon^{(0)} - \tilde{\epsilon}) = C^{S(0)}(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon})$$

と表現される。一方、析出相の応力 $\sigma^{(1)}$ については、母相の応力 $\sigma^{(0)}$ との差を σ^{pt} と定義し、

$$\sigma^{(1)} = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma} + \sigma^{pt} = C^{(1)}(\epsilon^{(1)} - \epsilon^{p(1)})$$

と置く。 $\epsilon^{(1)}$ は析出相の全歪で、 $\epsilon^{p(1)}$ は析出相の塑性歪である（つまり、 $\epsilon^{(1)} - \epsilon^{p(1)}$ は析出相の弾性歪）。母相の全歪 $\epsilon^{(0)} = \epsilon^0 + \tilde{\epsilon}$ と、析出相の全歪 $\epsilon^{(1)}$ の差は、塑性変形における

eigen 歪 ϵ^{pt} であるので^{2,3)}, $\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(0)} + \epsilon^{pt} = \epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{pt}$ を得る。したがって, $\sigma^{(1)}$ は, $\sigma^{(1)} = C^{(1)}(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{pt} - \epsilon^{p(1)})$ となる。さらに Eshelby の等価存在物の考え方²⁻⁶⁾を用いて, 補正項 ϵ^* を導入し, 弾性率を母相のセカント弾性率に変更して,

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= C^{(1)}(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{pt} - \epsilon^{p(1)}) \\ &= C^{S(0)}(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{pt} - \epsilon^{p(1)} - \epsilon^*) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

と置く。これより, $\sigma^{(1)}$ と $\sigma^{(0)}$ との差である σ^{pt} は,

$$\sigma^{pt} = C^{S(0)}(\epsilon^{pt} - \epsilon^{p(1)} - \epsilon^*)$$

と表現できることがわかる。ここで少し見方を変えて, 歪の基準を母相にとってみる (すなわち, $\epsilon^0 + \tilde{\epsilon}$ を歪の基準 0 とみなす)。すると析出相の歪は $\epsilon^{pt} - \epsilon^{p(1)} - \epsilon^* = \epsilon^{pt} - (\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*)$ となる。これはちょうど, Eshelby サイクル⁴⁻⁶⁾における全歪が ϵ^{pt} で, eigen 歪が $(\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*)$ となっている場合に対応するので, Eshelby テンソル^{2,3)} $S^{S(0)}$ を用いて

$$\epsilon^{pt} = S^{S(0)}(\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*) \dots\dots\dots (2)$$

と表現できることがわかる。

次に構成相の体積分率を用いた関係式を定義する。すなわち物体全体の平均応力 $\bar{\sigma}$ が, 構成相の体積分率 f_i の重み付平均として, $\bar{\sigma} = f_0 \sigma^{(0)} + f_1 \sigma^{(1)}$ と記述できると仮定する (森-田中の平均場近似⁴⁻⁶⁾)。これに $\sigma^{(0)} = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}$ と $\sigma^{(1)} = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma} + \sigma^{pt}$ を代入して整理すると, $\tilde{\sigma} = -f_1 \sigma^{pt}$ が得られる ($f_0 + f_1 = 1$ を用いた)。これを歪で書き直すと

$$\tilde{\epsilon} = -f_1 \{ \epsilon^{pt} - (\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*) \} = -f_1 (S^{S(0)} - I)(\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*) \dots\dots\dots (3)$$

となる (I は単位行列)。さらに物体全体の歪についても同様に, 構成相の体積分率を用いた関係式: $\bar{\epsilon} = f_0 \epsilon^{(0)} + f_1 \epsilon^{(1)}$ を仮定する。 $f_0 + f_1 = 1$ および式 (3) を用いて, $\bar{\epsilon} = \epsilon^0 + f_1 (\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*)$ と変形できる。変数 $\tilde{\epsilon}$, ϵ^{pt} , $\epsilon^{p(1)}$, ϵ^* について, $\tilde{\epsilon}$ と ϵ^{pt} は, $\epsilon^{p(1)}$ と ϵ^* から計算できるので, 未知変数は $\epsilon^{p(1)}$ と ϵ^* である。未知変数 $\epsilon^{p(1)}$ と ϵ^* の間の関係式は, 等価変態歪の定義式 (1) に, 式 (2) と式 (3) を代入することにより, 以下のように導かれる。

$$\begin{aligned} \epsilon^{p(1)} + \epsilon^* &= A \epsilon^0 + P^{-1} C^{(1)} \epsilon^{p(1)}, \\ P &\equiv (C^{(1)} - C^{S(0)})(f_1 I + f_0 S^{S(0)}) + C^{S(0)}, \\ A &\equiv -P^{-1}(C^{(1)} - C^{S(0)}) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

これより未知変数は $\epsilon^{p(1)}$ のみとなり, $\epsilon^{p(1)}$ を設定すると, ほかの全ての歪値を決定することができる。もし析出物が塑性変形していないのであれば, $\epsilon^{p(1)} = 0$ であるので, 式 (4) から直ちに ϵ^* を計算できる。

$$\begin{aligned} \text{さて以上の式から, } \bar{\sigma} \text{ と } \bar{\epsilon} \text{ は,} \\ \bar{\sigma} &= (I + f_1 C^{S(0)} Q^{-1} C^{(1)} \epsilon^{p(1)} [\bar{\sigma}]^{-1})^{-1} C^{S(0)} Q^{-1} P \bar{\epsilon}, \\ \bar{\epsilon} &= P^{-1} (Q \epsilon^0 + f_1 C^{(1)} \epsilon^{p(1)}), \\ Q &\equiv P - f_1 (C^{(1)} - C^{S(0)}) \end{aligned}$$

となり, したがって, 物体全体の弾性率 $C^{(C)}$ が,

$$[C^{(C)}]^{-1} = P^{-1} Q [C^{S(0)}]^{-1} + f_1 P^{-1} C^{(1)} \epsilon^{p(1)} [\bar{\sigma}]^{-1} \dots\dots\dots (5)$$

と表現されることがわかる。特に $\epsilon^{p(1)} = 0$ の場合には, $[C^{(C)}]^{-1} = (I + f_1 A) [C^{S(0)}]^{-1}$ となる。

さらに物体全体の平均歪 $\bar{\epsilon}$ の式を変形して,

$$\bar{\epsilon} = (I + f_1 A) \epsilon^0 + f_1 P^{-1} C^{(1)} \epsilon^{p(1)} \dots\dots\dots (6)$$

を得る。物体全体が弾性変形している時の弾性コンプライアンスは, $[C^{(C)}]^{-1} = (I + f_1 A) [C^{(0)}]^{-1}$ であるので (A^e は弾性係数がすべて弾性域における値の場合), 応力が $\bar{\sigma}$ である時の物体全体の弾性歪 $\bar{\epsilon}^e$ は,

$$\bar{\epsilon}^e = (I + f_1 A^e) [C^{(0)}]^{-1} \bar{\sigma} = (I + f_1 A^e) [C^{(0)}]^{-1} C^{S(0)} \epsilon^0$$

にて計算される。したがって, 物体全体の塑性歪 $\bar{\epsilon}^p$ は,

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^p &= \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^e = \{ (I + f_1 A) [C^{S(0)}]^{-1} - (I + f_1 A^e) [C^{(0)}]^{-1} \} \bar{\sigma} \\ &\quad + f_1 P^{-1} C^{(1)} \epsilon^{p(1)} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

にて与えられる。この式は物体全体の塑性歪 $\bar{\epsilon}^p$ を, 母相の塑性歪に起因する成分 (右辺第 1 項) と析出相の塑性歪に起因する成分 (右辺第 2 項) の和として表現している重要な関係式である。特に第 1 項の係数は, 物体全体のセカント弾性コンプライアンスと物体全体の弾性コンプライアンスの差になっている。また $\sigma^{(0)}$ と $\sigma^{(1)}$ については, 以上から,

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)} &= C^{S(0)}(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon}) = C^{S(0)}\{ \epsilon^0 - f_1 (S^{S(0)} - I)(\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*) \} \\ &= C^{S(0)}\{ \epsilon^0 + f_1 (S^{S(0)} - I) P^{-1} [(C^{(1)} - C^{S(0)}) \epsilon^0 - C^{(1)} \epsilon^{p(1)}] \} \\ &= \{ I + f_1 C^{S(0)} (I - S^{S(0)}) A [C^{S(0)}]^{-1} \} \bar{\sigma} \\ &\quad + f_1 C^{S(0)} (I - S^{S(0)}) P^{-1} C^{(1)} \epsilon^{p(1)} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= C^{(1)}(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{pt} - \epsilon^{p(1)}) \\ &= C^{(1)}\{ \epsilon^0 - f_1 (S^{S(0)} - I)(\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*) + S^{S(0)}(\epsilon^{p(1)} + \epsilon^*) - \epsilon^{p(1)} \} \\ &= C^{(1)}\{ I + (f_1 I + f_0 S^{S(0)}) A [C^{S(0)}]^{-1} \} \bar{\sigma} \\ &\quad - C^{(1)}\{ I - (f_1 I + f_0 S^{S(0)}) P^{-1} C^{(1)} \} \epsilon^{p(1)} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。上式において $\epsilon^{p(1)}$ は未知数であり, このままでは解くことができないが, 例外的に, 析出相の形状が球である場合は解くことができる。例えば式 (8) において, $\sigma_{ii}^{(0)} (= \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)})$ の計算を行うと, 右辺第二項は $\epsilon_{ii}^{p(1)} (= \epsilon_{11}^{p(1)} + \epsilon_{22}^{p(1)} + \epsilon_{33}^{p(1)})$ でくくられて, 塑性変形における体積一定条件: $\epsilon_{ii}^{p(1)} = 0$ から, 右辺第二項が消えてしまうからである。本研究では回転楕円体形状の析出相を考えているので, 右辺第二項は消えずに残る。以前の Zhao らの研究¹⁴⁾では, 第二相が塑性変形しない場合, つまり $\epsilon^{p(1)} = 0$ の場合のみを考慮して, 楕円体形状の析出相の場合を扱っている。本研究の新しい点は, 全歪理論におけるレビー・ミーゼスの式⁷⁾を用いて, $\epsilon^{p(1)}$ と $\sigma^{(1)}$ を関連づける方法を見出し, これによって $\epsilon^{p(1)} \neq 0$ の場合まで扱えるようになった点である (後述)。

2・4 物体全体の応力-歪曲線の計算手順

以下の4つの場合に分けて計算する。

- (1) 母相と析出相の両方が弾性変形している場合
- (2) 母相が塑性変形, および析出相が弾性変形している場合
- (3) 析出相が塑性変形, および母相が弾性変形している場合
- (4) 母相と析出相の両方が塑性変形している場合

以上の四つの場合は, 物体内において, 母相および析出相それぞれに作用している応力 ($\sigma^{(0)}$ と $\sigma^{(1)}$) の大きさを

用いて区別される。個々の相の応力-歪曲線は既知であるので、それぞれの相での降伏応力も既知である。したがって、母相および析出相に作用している応力がわかれば、現在どの相が降伏しているかが判断できるからである。

次に(1)~(4)の具体的な計算手順についてであるが、まず(1)については、通常の森-田中の平均場理論の扱いに等しいので、複合弾性体としての通常の計算をすればよい。この場合、物体全体が弾性変形している時の弾性コンプライアンスは、式(5)より、

$$[\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} = (\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}^e) [\mathbf{C}^{(0)}]^{-1},$$

$$\mathbf{A}^e \equiv -(\mathbf{P}^e)^{-1} (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}),$$

$$\mathbf{P}^e \equiv (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}) (f_1 \mathbf{I} + f_0 \mathbf{S}^{(0)}) + \mathbf{C}^{(0)}$$

となるので、応力が $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ である時の物体全体の弾性歪 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ は、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = [\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ にて計算される。特に物体全体の応力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ が単軸引張りであり、 $\bar{\sigma}_1^0$ 以外の $\bar{\sigma}_i^0$ が全て0である場合には、 $\bar{\varepsilon}_i^e = [(\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}^e)(\mathbf{C}^{(0)})^{-1}]_{ii} \bar{\sigma}_1$ と計算できる。

(2)については、析出相の塑性歪 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p(1)} = 0$ であるので、関係式は比較的簡潔となり、式(8)より $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ は、

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{A}^{(0)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{I} + f_1 \mathbf{C}^{S(0)} (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(0)}) \mathbf{A} [\mathbf{C}^{S(0)}]^{-1}$$

にて与えられる。 $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ から相当歪 $\sigma^{*(0)}$ を構成すると、

$$\begin{aligned} (\sigma^{*(0)})^2 &= \frac{1}{2} [(\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)})^2 + (\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{33}^{(0)})^2 + (\sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{33}^{(0)})^2] \\ &\quad + 3\{(\sigma_{23}^{(0)})^2 + (\sigma_{13}^{(0)})^2 + (\sigma_{12}^{(0)})^2\} \\ &= \frac{1}{2} [(\sigma_1^{(0)} - \sigma_2^{(0)})^2 + (\sigma_1^{(0)} - \sigma_3^{(0)})^2 + (\sigma_2^{(0)} - \sigma_3^{(0)})^2] \\ &\quad + 3\{(\sigma_4^{(0)})^2 + (\sigma_5^{(0)})^2 + (\sigma_6^{(0)})^2\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\{(A_{11}^{(0)} - A_{21}^{(0)})\bar{\sigma}_1 + (A_{12}^{(0)} - A_{22}^{(0)})\bar{\sigma}_2 + (A_{13}^{(0)} - A_{23}^{(0)})\bar{\sigma}_3 \\ &+ (A_{41}^{(0)} - A_{24}^{(0)})\bar{\sigma}_4 + (A_{42}^{(0)} - A_{25}^{(0)})\bar{\sigma}_5 + (A_{43}^{(0)} - A_{26}^{(0)})\bar{\sigma}_6\}^2 \\ &+ \{(A_{11}^{(0)} - A_{31}^{(0)})\bar{\sigma}_1 + (A_{12}^{(0)} - A_{32}^{(0)})\bar{\sigma}_2 + (A_{13}^{(0)} - A_{33}^{(0)})\bar{\sigma}_3 \\ &+ (A_{41}^{(0)} - A_{34}^{(0)})\bar{\sigma}_4 + (A_{42}^{(0)} - A_{35}^{(0)})\bar{\sigma}_5 + (A_{43}^{(0)} - A_{36}^{(0)})\bar{\sigma}_6\}^2 \\ &+ \{(A_{21}^{(0)} - A_{31}^{(0)})\bar{\sigma}_1 + (A_{22}^{(0)} - A_{32}^{(0)})\bar{\sigma}_2 + (A_{23}^{(0)} - A_{33}^{(0)})\bar{\sigma}_3 \\ &+ (A_{24}^{(0)} - A_{34}^{(0)})\bar{\sigma}_4 + (A_{25}^{(0)} - A_{35}^{(0)})\bar{\sigma}_5 + (A_{26}^{(0)} - A_{36}^{(0)})\bar{\sigma}_6\}^2 \end{aligned} \right] \\ &\quad + 3 \left[\begin{aligned} &(A_{41}^{(0)}\bar{\sigma}_1 + A_{42}^{(0)}\bar{\sigma}_2 + A_{43}^{(0)}\bar{\sigma}_3 + A_{44}^{(0)}\bar{\sigma}_4 + A_{45}^{(0)}\bar{\sigma}_5 + A_{46}^{(0)}\bar{\sigma}_6)^2 \\ &+ (A_{51}^{(0)}\bar{\sigma}_1 + A_{52}^{(0)}\bar{\sigma}_2 + A_{53}^{(0)}\bar{\sigma}_3 + A_{54}^{(0)}\bar{\sigma}_4 + A_{55}^{(0)}\bar{\sigma}_5 + A_{56}^{(0)}\bar{\sigma}_6)^2 \\ &+ (A_{61}^{(0)}\bar{\sigma}_1 + A_{62}^{(0)}\bar{\sigma}_2 + A_{63}^{(0)}\bar{\sigma}_3 + A_{64}^{(0)}\bar{\sigma}_4 + A_{65}^{(0)}\bar{\sigma}_5 + A_{66}^{(0)}\bar{\sigma}_6)^2 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

となる。特に物体全体の均一応力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ が単軸引張りである場合、 $\bar{\sigma}_1^0$ 以外は全て0であるので、上式は、

$$\sigma^{*(0)} = \left[\frac{1}{2} \{ (A_{11}^{(0)} - A_{21}^{(0)})^2 + (A_{11}^{(0)} - A_{31}^{(0)})^2 + (A_{21}^{(0)} - A_{31}^{(0)})^2 \} + 3\{ (A_{41}^{(0)})^2 + (A_{51}^{(0)})^2 + (A_{61}^{(0)})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1$$

となる。右辺 $\bar{\sigma}_1$ の係数部分と左辺の $\sigma^{*(0)}$ は $\varepsilon^{p*(0)}$ から計算できるので、 $\varepsilon^{p*(0)}$ を与えて、 $\bar{\sigma}_1$ を求めることができる。また物体全体の平均歪 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ と塑性歪 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ は、式(6)と式(7)より、

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}) \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{F}^{[2]} \bar{\boldsymbol{\sigma}},$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \{ (\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}) [\mathbf{C}^{S(0)}]^{-1} - (\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}^e) [\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} \} \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

にもとづき求めることができる。ここで、 $\mathbf{F}^{[2]} \equiv [\mathbf{I} +$

$f_1 \mathbf{A}] [\mathbf{C}^{S(0)}]^{-1}$ とおいた。 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ を相当歪にて表現すると、

$$\begin{aligned} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)^2 &\equiv \frac{2}{9} \left\{ (\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\varepsilon}_{22})^2 + (\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{33})^2 + (\bar{\varepsilon}_{33} - \bar{\varepsilon}_{11})^2 \right\} \\ &\quad + 6(\bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\varepsilon}_{23} \bar{\varepsilon}_{32} + \bar{\varepsilon}_{31} \bar{\varepsilon}_{13}) \\ &= \frac{2}{9} \{ (\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\varepsilon}_{22})^2 + (\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{33})^2 + (\bar{\varepsilon}_{33} - \bar{\varepsilon}_{11})^2 \} \\ &\quad + \frac{4}{3} (\bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\varepsilon}_{23} \bar{\varepsilon}_{32} + \bar{\varepsilon}_{31} \bar{\varepsilon}_{13}) \\ &= \frac{2}{9} \{ (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)^2 + (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3)^2 + (\bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_1)^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{3} (\bar{\varepsilon}_4^2 + \bar{\varepsilon}_5^2 + \bar{\varepsilon}_6^2) \end{aligned}$$

である。これに $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{F}^{[2]} \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)^2 &= \frac{2}{9} \{ (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)^2 + (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3)^2 + (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3)^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{3} (\bar{\varepsilon}_4^2 + \bar{\varepsilon}_5^2 + \bar{\varepsilon}_6^2) \\ &= \frac{2}{9} \left[\begin{aligned} &\left\{ \sum_{i=1}^6 (F_{li}^{[2]} - F_{2i}^{[2]}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 \\ &+ \left\{ \sum_{i=1}^6 (F_{li}^{[2]} - F_{3i}^{[2]}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 \\ &+ \left\{ \sum_{i=1}^6 (F_{2i}^{[2]} - F_{3i}^{[2]}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 \end{aligned} \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[\left(\sum_{i=1}^6 F_{4i}^{[2]} \bar{\sigma}_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 F_{5i}^{[2]} \bar{\sigma}_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 F_{6i}^{[2]} \bar{\sigma}_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

となり、さらに単軸引張りで $\bar{\sigma}_1$ のみが値をもつ場合には、

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \left[\frac{2}{9} \{ (F_{11}^{[2]} - F_{11}^{[2]})^2 + (F_{11}^{[2]} - F_{31}^{[2]})^2 + (F_{21}^{[2]} - F_{31}^{[2]})^2 \} + \frac{1}{3} \{ (F_{41}^{[2]})^2 + (F_{51}^{[2]})^2 + (F_{61}^{[2]})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1$$

が得られ、 $\bar{\sigma}_1$ から $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ を決定できる。したがって、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p*(0)}$ を順次大きくしていき、以上の計算を繰り返すことによって、応力-歪曲線が計算される。

析出相はこの段階ではまだ塑性変形していないので、その応力は、式(9)より、

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{A}^{(1)} \equiv \mathbf{C}^{(1)} \{ \mathbf{I} + (f_1 \mathbf{I} + f_0 \mathbf{S}^{(0)}) \mathbf{A} \} [\mathbf{C}^{S(0)}]^{-1}$$

にて与えられる。これより、 $\sigma^{*(1)}$ は、

$$\sigma^{*(1)} = \left[\frac{1}{2} \{ (A_{11}^{(1)} - A_{21}^{(1)})^2 + (A_{11}^{(1)} - A_{31}^{(1)})^2 + (A_{21}^{(1)} - A_{31}^{(1)})^2 \} + 3\{ (A_{41}^{(1)})^2 + (A_{51}^{(1)})^2 + (A_{61}^{(1)})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1$$

となるので、計算された $\bar{\sigma}_1$ から $\sigma^{*(1)}$ を求め、この値が析出相の降伏応力を越えたときに、析出相の塑性変形が開始すると考える。

(3)に関しては、母相は弾性変形しているので、セカン

ト弾性率は必要ない。応力-歪曲線は、式(9)より、

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &\equiv \mathbf{A}^{(1)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(1)}\varepsilon^{p(1)}, \\ \mathbf{A}^{(1)} &\equiv \mathbf{C}^{(1)}\{\mathbf{I} + (f_1\mathbf{I} + f_0\mathbf{S}^{(0)})\mathbf{A}\}[\mathbf{C}^{(0)}]^{-1}, \\ \mathbf{B}^{(1)} &\equiv -\mathbf{C}^{(1)}\{\mathbf{I} - (f_1\mathbf{I} + f_0\mathbf{S}^{(0)})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}\}\end{aligned}$$

にもとづき導かれる（母相は弾性変形であるので、上式において $\mathbf{S}^{(0)} = \mathbf{S}^{(0)}$ 、 $\mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{C}^{(0)}$ である）。

ここで、 $\varepsilon^{p(1)}$ については、全歪理論^{7,8)}におけるレビー・ミーゼスの式⁷⁾

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p(1)} &= \mathbf{D}^{(1)}\sigma^{(1)}, \\ D_{ij}^{(1)} &\equiv \frac{\varepsilon^{p*(1)}}{\sigma^{*(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdots \cdots (10)\end{aligned}$$

を用いて、 $\varepsilon^{p(1)}$ を定義する（ $\sigma^{*(1)}$ は $\varepsilon^{p*(1)}$ から計算できる）。なおこの部分（全歪理論におけるレビー・ミーゼスの式を用いて、 $\varepsilon^{p(1)}$ を $\sigma^{(1)}$ から求める点）が本研究の新しい部分であり、物理的には、塑性変形した析出相についても、セカント弾性率の考え方を適用することに対応している。これによって、式(9)が、

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= \mathbf{A}^{(1)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(1)}\varepsilon^{p(1)} = \mathbf{A}^{(1)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}\sigma^{(1)}, \\ (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)})\sigma^{(1)} &= \mathbf{A}^{(1)}\bar{\sigma}, \\ \therefore \sigma^{(1)} &= [\mathbf{I} - \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}]^{-1}\mathbf{A}^{(1)}\bar{\sigma} = \mathbf{X}^{(1)}\bar{\sigma}\end{aligned}$$

となり、 $\sigma^{(1)}$ と $\bar{\sigma}$ の関係式が得られる。ここで、 $\mathbf{X}^{(1)} \equiv [\mathbf{I} - \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}]^{-1}\mathbf{A}^{(1)}$ と定義した。これより析出相の相当応力の式を求めると、

$$\begin{aligned}(\sigma^{*(1)})^2 &= \frac{1}{2}[(\bar{\sigma}_1^{(1)} - \bar{\sigma}_2^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_1^{(1)} - \bar{\sigma}_3^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_2^{(1)} - \bar{\sigma}_3^{(1)})^2] \\ &\quad + 3\{(\bar{\sigma}_4^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_5^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_6^{(1)})^2\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{1i}^{(1)} - X_{2i}^{(1)})\bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{1i}^{(1)} - X_{3i}^{(1)})\bar{\sigma}_i \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{2i}^{(1)} - X_{3i}^{(1)})\bar{\sigma}_i \right\}^2 \right] \\ &\quad + 3 \left[\left\{ \sum_{i=1}^6 X_{4i}^{(1)}\bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 X_{5i}^{(1)}\bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 X_{6i}^{(1)}\bar{\sigma}_i \right\}^2 \right]\end{aligned}$$

となる。物体全体の均一応力 $\bar{\sigma}$ が単軸引張りで、 $\bar{\sigma}_1^0$ 以外が全て0では、

$$\sigma^{*(1)} = \left[\frac{1}{2} \{ (X_{11}^{(1)} - X_{21}^{(1)})^2 + (X_{11}^{(1)} - X_{31}^{(1)})^2 + (X_{21}^{(1)} - X_{31}^{(1)})^2 \} + 3 \{ (X_{41}^{(1)})^2 + (X_{51}^{(1)})^2 + (X_{61}^{(1)})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1$$

となる。 $\varepsilon^{p*(1)}$ を与えると、左辺の $\sigma^{*(1)}$ の値、および右辺 $\bar{\sigma}_1$ 係数が決まるので、これより、 $\bar{\sigma}_1$ が求まる。また物体

全体の平均歪 $\bar{\varepsilon}$ と塑性歪 $\bar{\varepsilon}^p$ は、

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \mathbf{F}^{[3]}\bar{\sigma}, \\ \bar{\varepsilon}^p &= f_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)}\bar{\sigma}\end{aligned}$$

から求めることができる。ここで、 $\mathbf{F}^{[3]} \equiv [\mathbf{I} + f_1\mathbf{A}][\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} + f_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)}$ と置いた（母相は弾性変形であるので、セカント弾性率は用いない）。先の(2)の場合と同様に、相当歪は、

$$\bar{\varepsilon}^* = \left[\frac{2}{9} \{ (F_{11}^{[3]} - F_{21}^{[3]})^2 + (F_{11}^{[3]} - F_{31}^{[3]})^2 + (F_{21}^{[3]} - F_{31}^{[3]})^2 \} + \frac{1}{3} \{ (F_{41}^{[3]})^2 + (F_{51}^{[3]})^2 + (F_{61}^{[3]})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1$$

にて計算される（ $\bar{\sigma}$ において $\bar{\sigma}_1$ のみが値を持つ場合）。応力-歪曲線については、 $\varepsilon^{p*(1)}$ を順次大きくしていき、以上の計算を繰り返せばよい。またこの時、母相の応力（式の変形は次の(4)の場合を参照）は、

$$\begin{aligned}\sigma^{(0)} &= \mathbf{X}^{(0)}\bar{\sigma}, \\ \mathbf{X}^{(0)} &\equiv \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(0)} &\equiv \mathbf{I} + f_1\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(0)})\mathbf{A}\}[\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} \\ \mathbf{B}^{(0)} &\equiv f_1\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(0)})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}\end{aligned}$$

にて与えられ、この式から $\sigma^{*(0)}$ が、

$$\sigma^{*(0)} = \left[\frac{1}{2} \{ (X_{11}^{(0)} - X_{21}^{(0)})^2 + (X_{11}^{(0)} - X_{31}^{(0)})^2 + (X_{21}^{(0)} - X_{31}^{(0)})^2 \} + 3 \{ (X_{41}^{(0)})^2 + (X_{51}^{(0)})^2 + (X_{61}^{(0)})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1$$

と求まるので、先に計算された $\bar{\sigma}_1$ に対して、 $\sigma^{*(0)}$ の値が母相の降伏応力を越えたときに、母相の塑性変形が開始するとする（なおここでは母相は弾性変形中であるので、セカント弾性率は用いず、通常の弾性率を用いる）。

最後に、(4)については、両相が塑性変形している場合であるので、式(8)と式(9)、すなわち、

$$\begin{aligned}\sigma^{(0)} &= \{\mathbf{I} + f_1\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(0)})\mathbf{A}\}[\mathbf{C}^{(0)}]^{-1}\bar{\sigma} \\ &\quad + f_1\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(0)})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}\varepsilon^{p(1)} \\ &= \mathbf{A}^{(0)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(0)}\varepsilon^{p(1)}, \\ \sigma^{(1)} &= \mathbf{C}^{(1)}\{\mathbf{I} + (f_1\mathbf{I} + f_0\mathbf{S}^{(0)})\mathbf{A}\}[\mathbf{C}^{(0)}]^{-1}\bar{\sigma} \\ &\quad - \mathbf{C}^{(1)}\{\mathbf{I} - (f_1\mathbf{I} + f_0\mathbf{S}^{(0)})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}\}\varepsilon^{p(1)} \\ &= \mathbf{A}^{(0)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(1)}\varepsilon^{p(1)}\end{aligned}$$

を連立させることによって応力状態を計算する。ここで、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(0)} &\equiv \mathbf{I} + f_1\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(0)})\mathbf{A}\}[\mathbf{C}^{(0)}]^{-1}, \\ \mathbf{B}^{(0)} &\equiv f_1\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(0)})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}, \\ \mathbf{A}^{(1)} &\equiv \mathbf{C}^{(1)}\{\mathbf{I} + (f_1\mathbf{I} + f_0\mathbf{S}^{(0)})\mathbf{A}\}[\mathbf{C}^{(0)}]^{-1}, \\ \mathbf{B}^{(1)} &\equiv -\mathbf{C}^{(1)}\{\mathbf{I} - (f_1\mathbf{I} + f_0\mathbf{S}^{(0)})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{(1)}\}\end{aligned}$$

である。ここでも先の(3)の場合と同様に、全歪理論におけるレビー・ミーゼスの式（式(10)）を用いて変形すると、

$$\begin{aligned}\sigma^{(0)} &= \mathbf{A}^{(0)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(0)}\varepsilon^{p(1)} = \mathbf{A}^{(0)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{D}^{(1)}\sigma^{(1)}, \\ \sigma^{(1)} &= \mathbf{A}^{(1)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(1)}\varepsilon^{p(1)} = \mathbf{A}^{(1)}\bar{\sigma} + \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}\sigma^{(1)}\end{aligned}$$

となり、 $\sigma^{(0)}$ と $\sigma^{(1)}$ は、

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= \mathbf{X}^{(1)}\bar{\sigma}, \quad \mathbf{X}^{(1)} \equiv [\mathbf{I} - \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}]^{-1}\mathbf{A}^{(1)} \\ \sigma^{(0)} &= \mathbf{X}^{(0)}\bar{\sigma}, \quad \mathbf{X}^{(0)} \equiv \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)}\end{aligned}$$

にて与えられる。相当応力は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
(\sigma^{*(0)})^2 &= \frac{1}{2} [(\bar{\sigma}_1^{(0)} - \bar{\sigma}_1^{(0)})^2 + (\bar{\sigma}_1^{(0)} - \bar{\sigma}_3^{(0)})^2 + (\bar{\sigma}_2^{(0)} - \bar{\sigma}_3^{(0)})^2] \\
&\quad + 3\{(\bar{\sigma}_4^{(0)})^2 + (\bar{\sigma}_5^{(0)})^2 + (\bar{\sigma}_6^{(0)})^2\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{1i}^{(0)} - X_{2i}^{(0)}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{1i}^{(0)} - X_{3i}^{(0)}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{2i}^{(0)} - X_{3i}^{(0)}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 \right] \\
&\quad + 3 \left[\left\{ \sum_{i=1}^6 X_{4i}^{(0)} \bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 X_{5i}^{(0)} \bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 X_{6i}^{(0)} \bar{\sigma}_i \right\}^2 \right], \\
(\sigma^{*(1)})^2 &= \frac{1}{2} [(\bar{\sigma}_1^{(1)} - \bar{\sigma}_2^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_1^{(1)} - \bar{\sigma}_3^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_2^{(1)} - \bar{\sigma}_3^{(1)})^2] \\
&\quad + 3\{(\bar{\sigma}_4^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_5^{(1)})^2 + (\bar{\sigma}_6^{(1)})^2\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{1i}^{(1)} - X_{2i}^{(1)}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{1i}^{(1)} - X_{3i}^{(1)}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \sum_{i=1}^6 (X_{2i}^{(1)} - X_{3i}^{(1)}) \bar{\sigma}_i \right\}^2 \right] \\
&\quad + 3 \left[\left\{ \sum_{i=1}^6 X_{4i}^{(1)} \bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 X_{5i}^{(1)} \bar{\sigma}_i \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^6 X_{6i}^{(1)} \bar{\sigma}_i \right\}^2 \right]
\end{aligned}$$

と計算できる。 $\bar{\sigma}_1^0$ 以外が全て0の場合では、

$$\begin{aligned}
\sigma^{*(0)} &= \left[\frac{1}{2} \{ (X_{11}^{(0)} - X_{21}^{(0)})^2 + (X_{11}^{(0)} - X_{31}^{(0)})^2 + (X_{21}^{(0)} - X_{31}^{(0)})^2 \} \right. \\
&\quad \left. + 3 \{ (X_{41}^{(0)})^2 + (X_{51}^{(0)})^2 + (X_{61}^{(0)})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1, \\
\sigma^{*(1)} &= \left[\frac{1}{2} \{ (X_{11}^{(1)} - X_{21}^{(1)})^2 + (X_{11}^{(1)} - X_{31}^{(1)})^2 + (X_{21}^{(1)} - X_{31}^{(1)})^2 \} \right. \\
&\quad \left. + 3 \{ (X_{41}^{(1)})^2 + (X_{51}^{(1)})^2 + (X_{61}^{(1)})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1
\end{aligned}$$

となり、さらに両式の比を取ると、

$$\frac{\sigma^{*(1)}}{\sigma^{*(0)}} = \left[\frac{\left(\frac{1}{2} \{ (X_{11}^{(1)} - X_{21}^{(1)})^2 + (X_{11}^{(1)} - X_{31}^{(1)})^2 + (X_{21}^{(1)} - X_{31}^{(1)})^2 \} \right.}{\left(\frac{1}{2} \{ (X_{11}^{(0)} - X_{21}^{(0)})^2 + (X_{11}^{(0)} - X_{31}^{(0)})^2 + (X_{21}^{(0)} - X_{31}^{(0)})^2 \} \right.}} \right]^{1/2}$$

となる。 $\varepsilon^{p*(0)}$ を与えると $\sigma^{*(0)}$ の値が決まるので、上式は $\varepsilon^{p*(1)}$ のみを未知変数にもつ方程式となる(式(10)の $\mathbf{D}^{(1)}$ が $\varepsilon^{p*(1)}$ の関数である点に注意)。したがって、この方程式を数値計算することによって $\varepsilon^{p*(1)}$ が決まり、続いて $\sigma^{*(0)}$ もしくは $\sigma^{*(1)}$ の関係式を用いて $\bar{\sigma}_1$ が得られる。全体の応力-歪曲線($\bar{\sigma}_1$ の変化)は、 $\varepsilon^{p*(0)}$ の値を順次大きくしていき、以上の計算を繰り返すことによって導出できる。また物体全体の平均歪 $\bar{\varepsilon}$ と塑性歪 $\bar{\varepsilon}^p$ は、

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon} &= \mathbf{F}^{[4]} \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{F}^{[4]} \equiv [\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}] [\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} + f_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{X}^{(1)}, \\
\bar{\varepsilon}^p &= \{ (\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}) [\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} - (\mathbf{I} + f_1 \mathbf{A}^e) [\mathbf{C}^{(0)}]^{-1} + f_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{X}^{(1)} \} \bar{\boldsymbol{\sigma}}
\end{aligned}$$

から計算される。 $\bar{\varepsilon}$ を相当歪に変換すると、

$$\bar{\varepsilon}^* = \left[\frac{2}{9} \{ (F_{11}^{[4]} - F_{21}^{[4]})^2 + (F_{11}^{[4]} - F_{31}^{[4]})^2 + (F_{21}^{[4]} - F_{31}^{[4]})^2 \} \right]^{1/2} \bar{\sigma}_1 + \frac{1}{3} \{ (F_{41}^{[4]})^2 + (F_{51}^{[4]})^2 + (F_{61}^{[4]})^2 \}$$

となる($\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ において $\bar{\sigma}_1$ のみが値をもつ場合)。

3. 計算結果

3.1 数値計算の条件

計算で考慮する構成相としては、鉄鋼材料における、フェライト相、パーライト相(パーライトはフェライトとセメンタイトからなる組織であるが、ここでは力学的に均一な一つの相として扱う)、およびベイナイト相で、それぞれの単相の応力-歪曲線は、Tomotaらによって、以下のよう求められている^{9,10)}。

$$\text{フェライト: } \sigma = 744(0.002 + \varepsilon^p)^{0.2345} \quad [\text{MPa}]$$

$$\text{パーライト: } \sigma = 1160(0.001 + \varepsilon^p)^{0.1630} \quad [\text{MPa}]$$

$$\text{ベイナイト: } \sigma = 1643(0.0005 + \varepsilon^p)^{0.0751} \quad [\text{MPa}]$$

また、ヤング率とポアソン比については、各相において同一の値と仮定し、それぞれ $E=200[\text{GPa}]$ および $\nu=0.3$ とした^{9,10)}。

3.2 母相も析出相も塑性変形しやすい場合

Fig. 2は、母相をフェライト、析出相をパーライトとし、析出相の形状を変化させて応力-歪曲線を計算した結果である。図中の組織が考慮した析出相の形態で、 p は回転楕円体のアスペクト比を表す。個々の図内の最上部および最下部の応力-歪曲線は、それぞれ析出相(phase 1)と母相(phase 0)の単相の応力-歪曲線で、両者の内側の曲線が、二相組織全体の応力-歪曲線である。黒い実線部分は析出相と母相の両方が弾性変形している場合、赤線は、析出相は弾性変形しているが、母相は塑性変形している場合、青線は、両相ともに塑性変形している場合に対応している。また析出相の体積分率を0.3と設定し、全ての応力-歪曲線は、くびれ発生条件($d\sigma/d\varepsilon = \sigma$)⁷⁾が満足された段階で計算を打ち切っている。Fig. 2(a), 2(b), および2(c)は、それぞれ析出相のアスペクト比が $p=1$, $p=10$ および $p=0.1$ の場合で、外部応力は、組織の模式図の、上下方向の単軸引張りである。

二相組織全体の応力の大きさは、おおよそ、析出相単相と母相単相の応力を体積分率で平均した値になっており、いわゆる応力に関する混合則²⁰⁾が成立していることがわかる。二相組織全体の応力-歪曲線において、青線が大部分を占めており、フェライト-パーライト組織では、両相ともに塑性変形しやすく、塑性変形が支配的な材料であることがわかる。Fig. 2(a)~2(c)を比較すると、計算結果はほとんど同一である。つまり応力-歪曲線全般的にわたって塑性変形が支配的な材料では、析出相の形状は力学特性にほ

Fig. 2. Calculated stress-strain curves dependent on the shape of phase 1, where phases 0 and 1 are assumed to be ferrite and pearlite, respectively.

Fig. 3. Calculated stress-strain curves dependent on the shape of phase 1, where phases 0 and 1 are assumed to be ferrite and bainite, respectively.

とんど影響せず、第二相の体積分率のみを考慮すればよいことがわかる。

3.3 母相は塑性変形しやすいが、析出相が塑性変形しにくい場合

Fig. 3は、母相をフェライト、析出相をベイナイトとした計算結果で、図の見方はFig. 2の場合と同じである。まずこの場合も、青線の部分に着目すると、応力に関する混合則が成立していることがわかる。Fig. 3では析出相をベイナイトとしたので、Fig. 2の場合と比較して、赤線の領域すなわち析出相（ベイナイト）が弾性変形している領域が大きい。特にFig. 3(a)~3(c)について、この赤線の部分および青線の前半部分の応力-歪曲線を比較すると、析出相形状が球状から、平板状もしくは針状にずれるに従い、応力の歪に対する立ち上がりが大きくなっており、応力-歪曲線が、析出相の形状に依存して変化することがわかる。一方、塑性変化が進行した青線の後半部分では、応力-歪曲線は、析出相の形状にほとんど依存しなくなる。

Fig. 4は、Fig. 3の低歪部分を拡大し、析出相の形状（アスペクト比）を系統的に変化させたときの応力-歪曲線の変化である。析出相の形状および外部応力方向は、Fig. 4

Fig. 4. Calculated stress-strain curves dependent on the aspect ratio of phase 1, where the external stress is applied parallel to the rotation axis of the ellipsoid of revolution.

Fig. 5. Calculated stress-strain curves dependent on the aspect ratio of phase 1, where the external stress is applied perpendicular to the rotation axis of the ellipsoid of revolution.

Fig. 6. Calculated stress-strain curves dependent on the volume fraction of phase 1, where the microstructure is assumed to be a lamella structure (a), and an oblate with $p=0.01$ (b).

右の模式図に示されている。図中の p がアスペクト比の値で、 $p=1$ の球の場合が最も低応力であるが、赤線の領域が一番広い。析出相の形状変化に伴い、 p の値が減少しても（扁平楕円体）、増加しても（針状楕円体）、応力の値は $p=1$

の場合よりも大きくなる。特に針状楕円体の方が扁平楕円体の場合よりも、相対的に応力は大きい傾向にある。

Fig. 5はFig. 4の場合と同様の計算であるが、外部応力を横方向にかけた場合である（Fig. 5右の模式図参照）。この場合、球の場合と針状楕円体と応力はほぼ等しい結果が得られた。これは、針状楕円体の横方向の断面形状は円であるので、応力の分配に関して、球の場合との差が現れなかったためと考えられる。一方、扁平楕円体では p の減少に伴い、応力が増加することがわかる。

以上の計算結果は、従来の複合材料における材料強化の考え方に一致する。すなわち第二相の形状をラメラ状やファイバー状にすることによる材料強化である^{4-6,20)}。重要な点は、析出相が塑性変形しにくい材料では、特に中間の塑性変形領域（赤線の部分から青線の初期）において、応力-歪曲線に対する析出相の形状依存性が無視できない点である。この傾向は、析出相がマルテンサイトの場合では、さらに顕著になることが予想される。特に二相鋼の変形挙動の理解に関しては、Tomotaら²¹⁾による詳細な報告があり、構成相の応力比（0.2%耐力の比）が増大すると、変形の不均一性（母相と析出相との変形の不均一）が組織形態（析出物の体積分率や形態）に大きく依存する点が明らかにされている。これはまさに本解析における応力-歪曲線（特に赤線部分）の組織形態依存性に対応していると考えられる。

3.4 ラメラ組織の扁平楕円体近似

Fig. 6(a)と6(b)は、それぞれラメラ組織と扁平楕円体($p=0.01$)状の析出相を仮定したときの、析出相の体積分率（図中の v_f が体積分率の値）に対する応力歪曲線の変化である（組織に対する外力方向は図の右の模式図を参照）。母相をフェライト、析出相をペイナイトとした。まず、この両者の応力-歪曲線がほとんど同じになっていることから、ラメラ組織は扁平楕円体（ $p=0.01$ 程度）にて十分に近似できることがわかる。先の計算結果でも述べたように、まず応力は、構成相の体積分率に比例し、いわゆる混合則が成立する。興味深い点は、伸びについては混合側が成立していない点である。一見、伸びについても混合則が成立しているようにも見えるが、よく見ると $v_f=0.5$ 当たりの伸びが、混合側の場合よりもやや減少しており、伸びについては、混合側は、応力ほど厳密には成り立たないと思われる（この傾向は構成相間の応力差が大きくなるほど顕著になると考えられる）。

4. 考察

4.1 塑性変形による析出相の形状変化

塑性変形によって析出相の形態は変化する。本計算では、析出相の形状を固定して応力-歪曲線の計算をしているので、内部矛盾を含んでいる。しかし、この問題は、以下に

説明するように発展的に解消される。まずフェライト-パーライト組織のように、両構成相ともに塑性変形が支配的な場合、組織全体の応力-歪曲線は、析出物の形状にはほとんど依存しないが、体積分率には大きく依存する結論が得られた。つまり、この場合には、構成相の体積分率の情報のみが重要であり、始めに設定する形状は任意でよい（また途中で析出相の形状が変わっても結果に影響しない）。したがって、塑性変形時の形状変化の影響は、両構成相ともに塑性変形が支配的な場合には、結果的に問題とされない。一方、構成相が硬く、弾性変形の寄与が大きな材料では、組織全体の応力-歪曲線は、体積分率だけでなく、析出物の形状にも依存する結果が得られた。ただしこの形状依存性は、主に変形初期（析出相が弾性変形している部分）に現れるので、変形による析出相の形状変化は小さいと仮定できる。したがって、この場合も、塑性変形による析出相の形状変化の問題は、少なくとも大きくは現れないと考えられる。

4.2 サイズ効果について

本計算手法は、基本的に弾性論をベースとした計算である。つまり塑性変形を、セカント弾性率をもった弾性体の弾性変形で代用した計算である。したがって、本計算では、原理的に析出相のサイズ依存性は解析できない（弾性問題では、相似な形態の組織の応力-歪曲線は同じ値となるので、形態の議論は可能であるが、サイズの議論は不可能である）。本計算手法では、組織を構成している各単相の応力-歪曲線は既知としているので、このデータの中に、各種のサイズ効果が含まれていると考える立場をとる。例えば、母相が多結晶の単相である場合、結晶粒微細化の効果は、入力データである母相単相の応力-歪曲線に含まれると考ええる。また母相にナノスケールの微細析出相が分散している場合、ナノスケールの微細析出相を含む母相自体を一つの単相とみなし、この単相の応力-歪曲線に、ナノスケールの微細析出相のサイズ効果が含まれていると考える。なお本計算において、ナノスケールの微細析出相自体を、第二相の析出相として直接扱うことはできない。本計算理論はマクロ的な弾性変形の理論であり、転位が直接析出相と相互作用するようなスケールの議論はできないからである。

4.3 局所的な内部応力（歪）や界面強度の問題

本計算はマクロ的な計算であり、組織内の微視的かつ不均一な応力場（歪場）の変化は考慮できない。また複合材料では、介在物と母相間の界面強度の問題は非常に重要であるが、本研究のセカント法では、母相と析出相の界面は、完全接合が仮定されている（異相界面であることによる界面接合強度の低下は考慮できない）。これらの問題は、本手法の適用範囲を超えるので、他の解析法（通常の有限要素法や均質化法²²⁾など）が必要である。ただし本手法の利点の一つは、極めて短時間で計算結果が得られる点にあり

(通所のパソコンで数分程度)、初期の材料選択や材料設計の指針を議論する、すなわち、いかなる因子(体積分率や形状など)が重要であるかを迅速に理解するのに役立つと考えられる。

5. 結言

本研究では、従来のセカント法を改良し、回転楕円体形状の析出相を含む物体の応力-歪曲線を求める方法を提案するとともに、種々の条件にて数値計算を行った。その結果、以下の結論を得た。

(1) 母相および析出相ともに塑性変形が支配的である場合には、組織全体の応力-歪曲線は、析出相の形状にはほとんど依存しない。つまりこの場合の応力-歪曲線の計算では、析出相の体積分率のみを考慮すればよい。

(2) 析出相が硬く、析出相の弾性変形の影響が大きい場合には、組織全体の応力-歪曲線は、析出相の体積分率だけでなく、析出相の形状にも依存する。

(3) 本計算は、マクロ的な計算であり、組織内の微視的な応力場(歪場)は考慮できないが、力学特性において、析出相の形状依存性を考慮する必要があるかどうかを、迅速に推定するのに役立つと思われる。

本研究の一部は、ナノテクノロジー・材料を中心とした融合新興分野研究開発「組織制御構造体の開発」によったことを記し謝意を表します。また(社)日本鉄鋼協会「計算工学による組織と特性予測技術I, II」研究会における討論が本研究の遂行に非常に参考になりました。あらため

て感謝申し上げます。

文 献

- 1) G.J.Weng: *J. Mech. Phys. Solid*, **38** (1990), 419.
- 2) 森 勉, 村外志夫: マイクロメカニクス, 培風館, (1976).
- 3) T.Mura: *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd Rev. Ed., Kluwer Academic, (1991).
- 4) 日本機械学会編: 材料力学(機械工学便覧基礎編α3), 丸善, (2005).
- 5) 東郷敬一郎: 材料強度解析学, 内田老鶴圃, (2004).
- 6) J.Qu and M.Chherkaoui: *Fundamental of Micromechanics of Solids*, John Wiley & Sons, (2006).
- 7) 吉田総仁: 弾塑性力学の基礎, 共立出版, (1997).
- 8) 北川 浩: 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, (1979).
- 9) Rudiono and Y.Tomota: *Acta Mater.*, **45** (1997), 1923.
- 10) S.Kotani, N.Tsuchida and Y.Tomota: *Tetsu-to-Hagané*, **83** (1997), 827.
- 11) A.Bhattacharyya and G.J.Weng: *Int. J. Plastic.*, **10** (1994), 553.
- 12) G.P.Tandon and G.J.Weng: *Compos. Sci. Technol.*, **27** (1986), 111.
- 13) A.Bhattacharyya and G.J.Weng: *Metall. Mater. Trans. A*, **27A** (1996), 2359.
- 14) Y.H.Zhao and G.J.Weng: *Micromechanics and Inhomogeneity (The Toshio Mura Anniversary Volume)*, ed. by G.J.Weng, M.Taya and H.Abe, Springer-Verlag, New York, (1990), 599.
- 15) Y.P.Qiu and G.J.Weng: *J. Appl. Mech.*, **62** (1995), 1039.
- 16) O.Pierard, C.Gonzalez, J.Segurado, J.L.Lorca and I.Doghri: *Int. J. Solids Struct.*, **44** (2007), 6945.
- 17) N.Yoshinaga and M.Takahashi: *Bull. Iron Steel Inst. Jpn.*, **14** (2009), 81.
- 18) T.Koyama: *CAMP-ISIJ*, **21** (2008), 381.
- 19) (社)日本鉄鋼協会: 計算工学による組織と特性予測技術研究会 最終報告書, (2010), 123.
- 20) 豊田政男: インターフェイスメカニクス, 理工学社, (1991).
- 21) Y.Tomota, K.Kuroki and I.Tamura: *Tetsu-to-Hagané*, **61** (1975), 107.
- 22) 寺田賢二郎, 菊池 昇: 均質化法入門—計算力学レクチャーシリーズ, 丸善, (2003).