固体の共鳴振動理論の深化と展開

垂水竜一

はじめに

本誌へ寄稿する貴重な機会を頂いた。標題は、2016年3月に日本学術会議で開かれた「第2回理論応用力学シンポジウム～力学の深化・統合化および展開～」での講演題目を、そのまま据えて置いたものである。学術の動向という大きな主題の中にあっても、本稿の話題を固体の共鳴振動理論という理論・応用力学の一つの研究分野に限定しておけば、私自身がこれまで進めてきた研究とその成果を、その動向に携わる当事者としてここに書き記すことができる。これによって、身の丈に合った形でここでの務めを果たしたい。

古典弾性体の共鳴振動理論

固体の共鳴振動現象に関する最も身近な例は、楽器（鐘や弦楽器）や音叉の奏でる音色だろう。ピンと張られた弦の表面で励起された音波（弾性波）は、境界での反射を繰り返しながら重ね合わせ状態（同位相多重反射状態）へと移行し、やがて特定の周波数で鳴り響く。音叉の場合、この周波数は正確に440 Hzに設定されており、誰がどのように音叉を使おうとその値は変わらない。調律された楽器や音叉の奏でる音色は固有であり、これを共鳴周波数という。共鳴周波数は、固有周波数や基準振動数と呼ばれることもあるが、本稿での取り扱いはその何れも同義である。固体の共鳴振動理論は、

理工学の諸分野に現れる振動解析の中心的な概念となっている。それは楽器や音叉に限らず、固体の示す振動現象は共鳴振動モードの重ね合わせとして最も容易に理解できることによる。これから本稿で取り上げる共鳴振動理論は、振動現象をよりよく理解するために作られた数学的・力学的な体系である。

共鳴振動現象の学術史において、前世紀の初頭に活躍したレイリー卿は群を抜いて著名である。レイリーは様々な媒質中の音波を理論的に解析して多くの学術的な概念を生み出し（レイリー商やレイリー波など）、その著書『The theory of sounds』は発刊から一世紀を経ていまなお読み継がれている^[1]。しかしながら、固体の共鳴振動問題に関するレイリーの業績は不完全であり、この問題を決定的に解決したのはスイスの数学者リッツである。リッツは弾性板の共鳴振動解析に際してその支配微分方程式を解くのではなく、これをオイラー方程式とする汎関数の極小値を探索するという独創的な手法を考案し、当時としては驚異的な精度で共鳴周波数の計算に成功している^[2,3]。今日、リッツ法と呼ばれるこの解析法は（この解析法はレイリー・リッツ法と呼ばれることもあるが、ここにレイリーの名を冠するのは不適切なようである^[4]）、数学的には変分問題の直接解法に位置付けられている。後に飛躍的な発展を遂げる弱形式解析（有限要素法やガラーキン法など）は、リッツの直接解法の派生である。その意味で、リッツの共鳴振動理論は今日の理論・計算固体

力学の礎となった一つの金字塔である。

超音波共鳴法

リッツの共鳴振動理論の登場から半世紀以上が経過した1970年代に入ると、共鳴振動現象を利用した固体材料の弾性定数計測が進められる^[5]。これは固体材料の持つ共鳴周波数を実験計測し、得られた結果をリッツの理論を用いて逆解析することによって、その材料の持つ弾性定数（ヤング率やポアソン比など）を逆解析的に決定する試みである。この方法は、既存の他の方法と比べて多くの優位性が期待されたことから（一つの単結晶試料に対する一度の超音波計測で、その材料の持つ全ての独立な弾性定数を高精度に決定可能）、様々な研究グループによって精力的な研究が進められ、1990年代の後半には超音波共鳴法として確立されている^[6]。超音波共鳴法の開発過程では、日本人研究者が大きな貢献を果たしている。リッツの共鳴振動理論を三次元の異方性弾性体へ拡張したのは大野であり^[7]、得られた共鳴振動変位を群論（既約表現）に基づいて分類したのは望月であり^[8]、レーザー・ドップラー振動計を用いて共鳴振動変位を直接観察し、確実なモード同定を実現したのは萩・平尾である^[9]。

私が固体の共鳴振動に関する研究を始めたのは、博士後期課程を卒業し、阪大・基礎工の平尾雅彦先生の研究室へ助手として着任した2003年である。当時の平尾研では、開発間もない超

PROFILE

垂水 竜一
(たるみ りゅういち)
大阪大学大学院工学研究科准教授
専門：弾性理論

音波共鳴法を用いて様々な先端材料に対する力学物性研究が進められていた。教えられるままに超音波計測を始めた私は、すぐにこの方法の持つ高い計測精度に驚かされ、また単結晶材料から得られる美しい共鳴スペクトルに魅了された。しかしながら、一連の計測技術が身に着いてくる頃には、この研究にある種の息苦しさをを感じるようになっていた。超音波共鳴法の基礎理論（リッツの共鳴振動理論）では、弾性体の構成式（応力－ひずみ関係式）に古典弾性理論が用いられている。そのため、古典弾性理論で使われている数々の近似は、そのまま共鳴振動理論にも引き継がれることになる。その結果、いくら高精度な超音波計測を行ったとしても、得られた共鳴周波数を逆解析する際には、これらの近似を超えて材料特性を聞き分けることができない。より端的に言うと、最先端の超音波計測の精度に解析理論が追いついていないと感じていた。とりわけ、当時の私は古典弾性理論における「線形性」近似を問題視しており、これが息苦しきの根底にあると考えていた。

その後、現在の所属である阪大・工の渋谷陽二先生の研究室へ異動する頃には、これから進

めるべき研究の方向性について悩むようになっていた。リッツの共鳴振動理論から「線形性」近似を取り除き、これを非線形弾性体へ一般化したいと考えてはいたものの、具体的に何から手を付けてよいのかははっきりせず、またこの研究を進めるべき学術的な動機も見出せずにいた。一方、異動を契機に新しい研究を始めたいとも考えており、最新動向を知るために様々な学会へ参加したが、そこに魅力的な研究フロンティアの姿は見出せなかった。当時の私は、進むべき道の見えないまま議論が進む学会の姿にある種の違和感を持っていた。北村先生はこうした状況を「憂鬱の蔓延」と表現されているが^[10]、これは少なくとも当時の私の心境を言い得て妙だと思う。

非線形弾性体の共鳴振動理論

異動から1年ほど経った頃、オックスフォード大学の数学研究所へ滞在する機会を頂いた。ホストは非線形弾性理論でご高名なジョン・ボール先生にお願いすることになった。この渡英は、これ以降の私の研究を大きく変える転換点となった。英国滞在中は、変分法と非線形弾性理論の勉強を進めながら、リッツの共鳴振動理論の非線形弾性体への一般化に挑戦することにした。研究はよく登山に例えられるが、登るべき山（フロンティア）を見つけられなかった私は、まずは目の前の山へ登ってみることにした。その山頂へ行けば、視界が開けて見える景

色も変わるだろうと考えたためだ。海外へ来たことによる精神的な解放感が、この挑戦を後押ししてくれたのかもしれない。

研究を始めてしばらくすると、このテーマが当初の予想を超えて大きな意味を持つことに気が付いた。弾性理論には客観性公理と呼ばれる基本公理が存在する。この公理は、弾性体に生じる応力はそれを観測する座標系によらず一定であることを要請しているが、古典弾性理論では「線形性」近似が弊害となってこの公理が破綻している。古典弾性理論の教科書には、「無限小変形」という変形したのか変形しなかったのかよくわからない、狐につままれたような仮定が判を押したように書かれているが、これは客観性公理に違反した弊害が顕在化しないよう、古典弾性理論の運動学に課された処方箋である。基本公理の破綻した理論が物理現象の本質を表現できるはずがない。率直にそう感じた私は、リッツの共鳴振動理論から「線形性」近似を取り除いてこれを非線形弾性体へ深化させることで、これまで「線形性」近似によって見落とされてきた共鳴振動現象の本来の姿を探すことにした。

英国に滞在していた当時を振り返ると、日本にいた時には手も付けられなかった研究が、予想に反して順調に進んでいったという印象が強い。研究に必要なのはまとまった時間であり、講義や会議で細断された時間は使い方が難しいのだと感じた。また、数学科のセミナーに参加することで得られた新しい知識や、研究所の図

Fig. 1 : リッツ法を用いて計算された直方体形状を持つ固体（アルミニウム単結晶）の共鳴振動モードの一例。一般に、一つの固体は無数の（アボガドロ数オーダーの）共鳴振動モードを有しているが、それらは振動対称性に応じて少数の種類（既約表現）へ分類することができる。この図は、八つの既約表現（ A_g , B_{1g} , B_{2g} , B_{3g} , A_u , B_{1u} , B_{2u} , B_{3u} ）に基づいた振動対称性の分類結果を表している。

書館で出会った素晴らしい本が役に立ち、帰国後しばらくしてこの問題を解くことができた。その結果、非線形弾性体の共鳴振動の中に新しい対称性を見つけることができた^[11, 12]。簡潔に説明すると、新しく見つかったのは非線形効果で励起された高調和振動の対称性とその選択則である。Fig. 1では、直方体形状を持つアルミニウム単結晶の共鳴振動モードを八つの既約表現により分類しているが、この分類則が成り立つのは無限小変形の仮定された線形振動（古典弾性体の共鳴振動）に限られており、非線形効果によって励起される高調和振動の対称性がこの分類則に従うとは限らない。私の研究で明らかとなったのは、高調和振動の中には角振動数のパリティ（偶奇性）に依存して相異なる、二系統の対称性が混在するという性質であ

る。群論の慣習に従って、私はこれを白黒二色の「カラー対称性」と呼ぶことにした。後日、シュレーディンガー方程式を摂動解析した非線形分子振動理論も「カラー対称性」と同じ対称性を導くことが明らかとなり、この結果に対する検証を行うことができた^[13]。この論文が英国王立協会誌へ掲載された頃には、工学研究科へ異動して既に5年ほど経っていた。時間はかかったが、私にとっては会心の研究成果だった。

非局所弾性体の共鳴振動理論

私にとって意外だったのは、この研究成果に対する周囲の反応が皆無に近かったことである。簡単に理解してもらえないことは覚悟していたが、学会等で発表しても手応えのない状況が1年以上続くと、さすがに孤独を感じるようになった。冒頭で述べたように、固体の共鳴振動解析は理工学の諸分野（移動体、構造物、デバイス等）で重要な役割を果たしているが、こうした解析の多くは市販の有限要素解析ソフトに組み込まれたパッケージを使って行われており、その基盤となったリッツの理論が意識されることはほとんどない。一方、共鳴振動に関わる研究者にとっては、リッツの理論は既に完成

された古典的な理論体系である。いまさらその修正を試みることで、禁を破るようで嫌厭されたのかもしれない。

研究成果を共有できない寂しさの一方で、この研究を振り返ることで気付いたことについて簡単に触れておきたい。それは研究のリスクである。通常、新しい研究を始める際には相当の時間（上記の例では約5年）と労力（上記の例では数学科での長期研究）が必要になる。もちろん研究成果が得られる保証はなく、先行き不透明なことこの上ない。またテーマ設定を誤ると（上記の例で私はテーマ設定を誤ったとは考えていないが）、結果が出てもそれが評価には直結しない。賢い若手研究者は、このようなハイリスク・ローリターンな挑戦を避け、既存のコミュニティの中で、研究成果や資金獲得の期待値が高い研究を進めるのではないだろうか。無論、そうした合理的な判断を否定はしないが、そうした選択の結果は予定調和になりがちであり、次第に研究のダイナミズムが損なわれていく。もし固体力学の研究者に憂鬱が蔓延しているのなら、その根底では、若手研究者に新しい挑戦を躊躇させるほど研究のリスクが肥大化しているのかもしれない。

話がかなり逸れたので、ここで再び共鳴振動に戻りたい。私は研究については執拗な性格の持ち主なので、例え周囲に理解されなくても孤独でも、共鳴振動に関する研究を続けることにした。次に注目したのは、古典弾性理論における「局所性」と呼ばれる近似である。「局所

性」近似は、「線形性」近似と並んで古典弾性理論における中心的な仮定である。簡潔に説明すると、あるスケールで得られた問題の解にスケール変換を行っても（例えばmmからnmへのスケール変換）、その結果は新しいスケールにおいても解でありつづけることを保証するのが「局所性」近似である。先の研究例では、古典弾性理論の構成式を（i）客観性公理を満たした非線形弾性体へ置き換えて共鳴振動理論を再構築したが、今度はこの構成式を、（ii）特性長さを持つ非局所弾性体（ひずみ勾配弾性体とマイクロポーラー弾性体）へ置き換えて共鳴振動理論を再構築することにした。共鳴振動理論の非局所化は、非線形化と比べれば数学的にははるかに容易であり、研究を始めて2年ほどで最初の成果を得ることができた。非局所化の対価として現れた物理現象は「サイズ効果」である^[14]。非局所な弾性理論では、共鳴振動を記述する波動方程式の解はスケール変換できるものの、この変換操作は作用汎関数の発散対称性を満たしていない。その結果、ネーターの定理が保証するスケール変換対称性に起因した保存積分は存在せず、絶対スケールに依存して変化する共鳴振動が現れる。力学的には、共鳴振動のサイズ効果はレイリー商の修正を通して理解すると見通しが良いようである。構成式の非局所化に伴う「サイズ効果」の発現も、私にとっては大きな研究成果であった。

固体力学研究の新展開

ここで少し話題を変えて、弾性理論の発展史を簡単に振り返ってみたい。弾性理論は、ロバート・フックによるフックの法則（1678年）の発見に端を発しており、以来、オイラー、ベルヌーイ、ナビエ、コーシーと続き、19世紀までにその基礎（古典弾性理論）が確立された。20世紀の弾性理論は有理化と一般化の時代である。大まかに言えば、古典弾性理論から「線形性」近似と「局所性」近似を取り除くことが研究のフロンティアを形作ってきた。この時代、前者を牽引したのは主として数学者（トゥルースデル、エリクソン、ボール等）であり、後者を牽引したのは主として理論・応用力学研究者（コッセラ、ミンドリン、エリンゲン等）である。これらの研究成果を受け継ぐ21世紀の弾性理論が、非線形性と非局所性の統合を出発点とするのは、過去から未来へ向く羅針盤に沿った自然な取り組みではないだろうか。本稿で紹介した固体の共鳴振動理論の深化に関する取り組みは、この羅針盤が正しくフロンティアを指し示すことの格好の証左のように思われる。

いまから一世紀以上前にリッツによって構築された固体の共鳴振動理論は、既に主要なことは全て理解された（と考えられてきた）古典理論に他ならなかった。ところが、この理論の構成式から「線形性」と「局所性」という二つの近似を取り除くと、まるで息を吹き返したかのように、「カラー対称性」と「サイズ効果」と

いう新しい力学現象を語り始める。固体の共鳴振動理論に関するこうした一連の研究と経験を通して、私はこれまで弾性理論に対して持っていた認識をはっきりと改めることになった。すなわち、「線形性」と「局所性」という古典弾性理論における中心的な近似は、実際の力学現象を私たちの想像以上に単純化しており、それによって引き起こされる学術的な弊害は決して看過されるべきでない。また、非線形・非局所形式の弾性理論は、変分原理の下で幅広い時空間スケールにわたる力学現象の解析を可能としている。これを固体力学の標準理論とするならば、これまで解かれていない諸問題の解決に対して、多くの貢献を果たすことが期待される。無論、こうした未踏の研究へ挑むリスクは小さくないが、それを楽観視させるほど、この固体力学の新展開（フロンティア）は私にとって魅力的である。そこに、かつて感じた憂鬱はない。

参考文献

- [1] J.W.S. Rayleigh, The theory of sound, Vol. 1 and 2 (Reprinted by Dover Publications, New York, 1945).
- [2] W. Ritz, J. Reine Angew. Math. **135**, 1 (1908).
- [3] W. Ritz, Annalen der Physik **28**, 737 (1909).
- [4] A.W. Leissa, J. Sound and Vib. **287**, 961 (2005).
- [5] H.H. Demarest Jr, J. Acoust. Soc. Am. **49**, 768 (1971).
- [6] A. Migliori and J. Sarro, Resonant ultrasound spectroscopy (Wiley, New York, 1997).
- [7] I. Ohno, J. Phys. Earth **24**, 355 (1976).
- [8] E. Mochizuki, J. Phys. Earth **35**, 159 (1987).
- [9] H. Ogi, K. Sato, T. Asada and M. Hirao, J. Acoust. Soc. Am. **112**, 2553 (2002).
- [10] 北村隆行, 学術の動向, **19**, 4, 24 (2014).
- [11] R. Tarumi, Proc. Roy. Soc. A **469**, 20130275 (2013).
- [12] R. Tarumi, Y. Yamaguchi and Y. Shibutani, Proc. Roy. Soc. A **470**, 20140448 (2014).
- [13] R. Tarumi, Jpn. J. Appl. Phys. **53**, 07KB09 (2014).
- [14] R. Tarumi, T. Kimura and Y. Shibutani (in preparation).