ライフゲームにおける過渡現象のセル数依存性

Array Size Dependence of the Transient Behavior in the "Game of Life"

蜷川 繁

Shigeru Ninagawa

金沢工業大学 情報系

Division of Information and Computer Science, Kanazawa Institute of Technology.

ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp, <http://www2.kanazawa-it.ac.jp/ninagawa/frame/member.htm>

米田 政明

Masaaki Yoneda

富山大学 工学部

Faculty of Engineering, Toyama University.

yoneda@pat.iis.toyama-u.ac.jp, <http://www.iis.toyama-u.ac.jp/yoneda.html>

広瀬 貞樹

Sadaki Hirose

(同上)

hirose@iis.toyama-u.ac.jp, <http://www.algo.iis.toyama-u.ac.jp/hirose/hirose.html>

keywords: Game of Life, cellular automata

Summary

The "Game of Life" acquires the property of significant behavior, such as universal computation, self-organized criticality and $1/f$ fluctuation, which depends on initial configurations. Our research investigates the relationship between the transient behavior starting from random initial configurations and array size in the Game of Life. The simulations show that the average transient time $\langle T \rangle$ increases logarithmically with square array size $N \times N$, $\langle T \rangle \sim \log N$ in null and periodic boundary conditions. This result suggests that the duration of $1/f$ fluctuation in the "Game of Life" lengthens infinitely in infinite array size.

1. はじめに

ライフゲームは2次元2状態9近傍セルオートマトンの一種であり、セル平面上に様々なパターンが生成されることが知られている。特にグライダーと呼ばれる伝播するパターンをデジタル信号とみなすことによって、ライフゲーム上で万能計算機が構成できる [Berlekamp 82] ことが知られている。

また、ライフゲームは自己組織化臨界性 (self-organized criticality) という性質を備えている。安定様相に摂動 (0 のセルを 1 にする) を加えることによって安定状態または周期状態にあったセルが変化する (これを "なだれ" と呼ぶ) が、発生する "なだれ" の持続時間および大きさの分布がべき乗則 (power-law) に従う [Bak 89]。その後、自己組織化臨界性はセル数が小さい場合のみ成り立つことがわかった [Hemmingsson 95]。

さらに、ライフゲームにおいて、セルの時系列データにフーリエ変換を施して得られるパワースペクトルは $1/f$ ゆらぎを示す [Ninagawa 98]。 $1/f$ ゆらぎはパワースペクトルが周波数に反比例することからその名がつけられ、真空管電流や、クラシック音楽の音圧変動、高速道路の車の流れなど、さまざまな現象において観測されているが、いまだにその発生メカニズムは明らかにされてい

ない。

ライフゲームのこれらの特徴には、初期様相が大きく関わっている。例えば、万能計算機を実装するためには、特定の初期様相が必要となる。また、自己組織化臨界性は安定初期様相、 $1/f$ ゆらぎはランダム初期様相において、それぞれ観測される現象である。

ライフゲームにおいて万能計算機を実現するための初期様相は、膨大なセル数になることが予想されており、今まで実装例はない。また、安定初期様相における過渡現象については自己組織化臨界性の研究からセル数依存性が明らかになっている。一方、ランダム初期様相については、文献 [Wolfram 83] においてセル空間が $N \times N$ の正方形の場合、平均過渡ステップ数が N^2 以内であることが予想されている以外には、詳細な研究はなされていない。そこで本研究ではランダム初期様相において、過渡ステップ数のセル数依存性について調べた。

2. ライフゲーム

ライフゲームは2次元平面にセルとよばれる有限オートマトンを配置したものである。各セルは0または1のいずれかの状態をとり、あるステップでの全セルの状態の配列を様相 (configuration) と呼ぶ。座標 (x, y) に位

図 1 ヌル境界条件の境界に接した領域で、まれに生成される周期 14 のパターン（白:状態 0 のセル, 黒:状態 1 のセル）

置するセルのステップ t での状態を $s_{x,y}(t)$ とし, 周囲の 8 個のセルのうちステップ t での状態が 1 のセルの数を $n_{x,y}(t)$ とすると, セル (x,y) の状態遷移は

$$s_{x,y}(t+1) = f(s_{x,y}(t), n_{x,y}(t)) \quad (1)$$

と表される. ここで f は次式で定義される遷移関数である.

$$\begin{aligned} f(0,3) &= 1, \\ f(1,2) &= 1, \quad f(1,3) = 1, \\ \text{otherwise} \quad f &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

各セルの状態遷移は全セルが同期して並行に行われる.

3. 実 験

セル空間は縦 × 横が $N \times N$ 個のセルからなるものとし, 境界条件として境界外のセルが常に 0 となるヌル境界条件 (null boundary conditions), およびセル空間が 2 次元トーラスとなる周期境界条件 (periodic boundary conditions) を用いる.

ライフゲームにおいて十分ステップ数が進むと, 多くの場合, 周期 2 または 3 のパターンのみが残ることから, 周期が 6 の周期的な様相を安定様相とする. ただし, ヌル境界条件の境界に接した領域で, まれに図 1 に示す周期 14 のパターンが生成される. この場合, 安定様相の周期は 6 と 14 の最小公倍数である 42 とした.

1 辺のセル数 N を固定し, 各 N において異なる初期様相を 150 個生成し, 安定様相になるまでの平均過渡ステップ数 $\langle T \rangle$ を測定する. 初期様相は 0,1 の状態が等確率で出現するようにランダムに生成し, 1 辺のセル数 N は 100 から 2000 まで 100 毎にとる. こうして求めた 1 辺のセル数 N と平均過渡ステップ数 $\langle T \rangle$ の関係を図 2 に示す.

最小 2 乗法によって式 $\langle T \rangle = a \log N + b$ に当てはめたところヌル境界条件では $a = 3577.6 \pm 90.4$, $b = -16057.9 \pm 612.1$, 周期境界条件では $a = 3364.7 \pm 75.2$, $b = -13869.1 \pm 509.0$ となった. べき乗による当てはめも試みたが, 対数の場合よりも残差平方和が大きくなり適切とはいえない. また, N が小さい領域では境界条件の影響が大きくなるため, この依存性は崩れると思われる. 従って, これはあくまで N が大きい領域での漸近的な依存性であると考えられる.

図 2 正方形空間の 1 辺のセル数 N 毎の平均過渡ステップ数 $\langle T \rangle$ と最小 2 乗法による当てはめ (上:ヌル境界条件, 下:周期境界条件)

図 3 非正方形空間の横辺のセル数 W 毎の平均過渡ステップ数.

次に縦 × 横のセル数を $H \times W$ とし, 全セル数を $800^2 = 640000$ に固定しながら W を 1000 から 64000 まで変化させた場合に, 図 2 と同様の条件で求めた結果を図 3 に示す. これをみるとセル空間が正方形から離れるにつれて平均過渡ステップ数が減少していることがわかる.

4. お わ り に

ライフゲームにおけるランダム初期様相の平均過渡ステップ数については前述のように, セル空間が $N \times N$ の正方形の場合, N^2 以内であることが予想されていた [Wolfram 83] が, 本研究によって, 平均過渡ステップ数は $\log N$ に比例することが明かとなった.

また, 非正方形空間の場合は, 正方形からのズレが大きくなるにつれて過渡ステップ数が短くなっており, 特

にヌル境界条件の場合のほうが減少が著しい。これは縦のセル数 H が小さくなるにつれて (H を大きくした場合は横辺のセル数 W が小さくなるにつれて) 境界条件が効いてくるためだと考えられる。

従来から、 $1/f$ ゆらぎの研究において、低周波数限界は存在するのか、いいかえれば $1/f$ ゆらぎは無限の時間にわたって持続するのかという疑問が指摘されていた。この疑問に答えるために、今後の課題として、ライフゲームにおけるランダム初期様相からの過渡状態と $1/f$ ゆらぎの関連を明らかにする事および、より大きなセル数における過渡状態の依存性を明らかにする事が必要である。

◇ 参 考 文 献 ◇

- [Bak 89] P. Bak, K. Chen and M. Creutz, Self-organized criticality in the 'Game of Life', Nature, Vol.342, pp. 780-782 (1989).
- [Berlekamp 82] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, Winning ways for your mathematical plays, Vol.2, Academic Press, (1982).
- [Hemmingsson 95] J. Hemmingsson, Consistent results on 'Life', Physica D, Vol.80, pp. 151-153 (1995).
- [Ninagawa 98] S. Ninagawa, M. Yoneda and S. Hirose, $1/f$ fluctuation in the "Game of Life", Physica D, Vol.118, pp. 49-52 (1998).
- [Wolfram 83] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Rev. Mod. Phys., Vol.55, pp. 601-644 (1983).

〔担当委員：河野浩之〕

2000 年 8 月 8 日 受理

著 者 紹 介

蜷川 繁(正会員)

1986 年金沢大学理学部物理学科卒業。1988 年富山大学大学院理学研究科修士課程修了。民間企業を経て、1998 年富山大学大学院工学研究科博士後期課程修了。博士(工学)。同年、明星大学情報学部助手。1999 年金沢工業大学情報工学科講師。複雑系、人工生命に関する研究に従事。電子情報通信学会、情報処理学会各会員。

米田 政明(正会員)

1967 年東北大学工学部通信工学科卒業。1972 年同大学院工学研究科電気及通信工学専攻博士課程修了。工学博士。同年富山大学工学部電子工学科講師。現在、同知能情報工学科教授。この間、オートマトン・言語理論、パターン認識理論、文字認識・文書画像理解等の研究に従事。電子情報通信学会、情報処理学会各会員。

広瀬 貞樹

1974 年富山大学工学部電子工学科卒業。1980 年東北大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程修了。工学博士。同年富士通研究所入社。1984 年神奈川大学工学部助教授。1989 年富山大学工学部助教授。現在、同知能情報工学科教授。この間、オートマトン・言語理論、アルゴリズム解析、計算の複雑さの理論等の研究に従事。電子情報通信学会、情報処理学会各会員。