分岐補題の抽出による極小モデル生成の効率化

Improving the Efficiency of Minimal Model Generation by Extracting Branching Lemmas

長谷川 隆三
Ryuzo Hasegawa

九州大学 大学院システム情報科学研究所
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
hasegawa@ar.is.kyushu-u.ac.jp

藤田 博
Hiroshi Fujita

(同 上)
fujita@ar.is.kyushu-u.ac.jp

越村 三幸
Miyuki Koshimura

(同 上)
koshi@ar.is.kyushu-u.ac.jp

keywords: model generation, minimal models, automated reasoning, theorem proving, SATCHMO, MGTP

Summary

We present an efficient method for minimal model generation. The method employs *branching assumptions and lemmas* so as to prune branches that lead to nonminimal models, and to reduce minimality tests on obtained models. Branching lemmas are extracted from a subproof of a disjunct, and work as factorization. This method is applicable to other approaches such as Bry's *constrained search* or Niemelä's *groundedness test*, and greatly improves their efficiency. We implemented MM-MGTP based on the method. Experimental results with MM-MGTP show a remarkable speedup compared to MM-SATCHMO.

1. ま え が き

極小モデルの概念は、論理プログラミング、演繹データベース、ソフトウェア検証、仮説推論等の幅広い分野で重要である。また実際上も、応用によっては、一階述語論理の節集合に対して極小なエルブランモデルを生成することが必要となる。

従来のタブロー法や Davis-Putnam 法はすべての極小モデルを生成できるが、不要な非極小モデルも生成してしまうため効率が悪い。一般に、モデル M が極小であることを保証するには、 M が他のモデルに包摂されないことを確かめる必要がある。これを M の極小性検査と呼ぶ。しかし、モデル数の増加に伴い極小性検査のコストが増大するので、非極小モデルの生成自体を避けることが重要である。

最近、タブローの枠組で2つの典型的な方法が報告された。Bry と Yahya[Bry 96] は、極小モデルを生成する健全かつ完全な手続きを与え、Prolog で MM-SATCHMO を実装した。この手続きは、相補分割 (*complement splitting*) と制約下探索 (*constrained search*) を用いて、モデル構築時に非極小モデルを棄却する。一方、Niemelä は、制約下探索の代りに、根拠検査 (*groundedness test*) を導入した命題タブロー計算法を提示した [Niemelä 96]。しかし、両方法とも次のような欠点をもつ。すなわち、証明

木を解析すれば簡単に極小性が確認できるようなモデルに対して、不要な極小性検査を行ってしまうこと、および、非極小モデルを導くような冗長な探索枝を完全には刈りきれないことである。

これらの問題を解決するため、本論文では相補分割を強化した分岐補題 (*branching lemma*) と呼ぶ概念を導入する。分岐補題の適用により、非極小モデルに至るモデル候補が早期に棄却されて探索空間が大きく削減されたり、場合によっては生成されたモデルの極小性が保証されるため、極小性検査を省略できるなどの効率化が得られる。この手法は、因子化 (*factorization*)[Letz 94] の一実現方式とみることができる。因子化は、元来、充足不能な節集合に対する反駁証明における探索木の枝刈り手法で、証明委託という概念に基づくものであるが、ここでは、この考え方を逆に充足可能な節集合に対する極小モデル生成という観点から捉えなおしている点が新しい。分岐補題の手法はタブロー法に基づく定理証明において汎用的であり、実際に上記の二つの方法に適用してその能力を補強することも可能である。

我々は、この方法を CMGTP[白井 97] の機能を備えた Java 版 MGTP[藤田 98, 長谷川 99, 長谷川 00] 上に実装した。これを MM-MGTP と呼ぶ。MM-MGTP は、MM-SATCHMO と同様に、一階述語論理の節集合に適用可能である。実験の結果、MM-SATCHMO に比べ顕

```

1:  function  $mg(U, D, M)$  {
2:    while  $(U \neq \emptyset)$  {
3:       $L \leftarrow select(U)$ ;  $U \leftarrow U \setminus \{L\}$ ;
4:      if  $(L \notin M)$  {
5:         $M \leftarrow M \cup \{L\}$ ;
6:        if  $(unitRef(M))$  return  $\emptyset$ ;
7:         $\langle U, D, M \rangle \leftarrow CJM(U, D, M, L)$ ;
8:        if  $(rejected(M))$  return  $\emptyset$  }
9:      if  $(U = \emptyset)$  {
10:         $\langle U, D, M \rangle \leftarrow disjSmp(U, D, M)$ ;
11:        if  $(rejected(M))$  return  $\emptyset$  } }
12:    if  $(D \neq \emptyset)$  {
13:       $\Delta \leftarrow select(D)$ ;  $D \leftarrow D \setminus \{\Delta\}$ ;
14:      where  $\Delta = L_1 \vee \dots \vee L_n$ ;  $\mathcal{M} \leftarrow \emptyset$ ;
15:      for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  {
16:         $\mathcal{M} \leftarrow \mathcal{M} \cup mg(U \cup \{L_j\}, D, M)$  }
17:      return  $\mathcal{M}$  }
18:    else return  $\{M\}$  }

```

図 1 MGTP の証明手続き

著な速度向上が確認された。

本論文の構成は以下のとおりである。2 章で MGTP の基本的証明手続きを示し、3 章では極小モデル生成のための相補分割および分岐補題について述べた後、これらの機能を MGTP に導入して拡張した MM-MGTP の証明手続きを示す。さらに、4 章で MM-MGTP の健全性と完全性を証明し、5 章では MM-MGTP の実装について簡単に触れた後、主に MM-SATCHMO との比較評価実験の結果を示す。6 章で関連研究について議論し、7 章で結論を述べる。

2. MGTP

任意の一階述語論理式は、含意式表現による節 (clause) $A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n$ の集合^{*1}で与えられる。ここで、 $A_i (1 \leq i \leq m)$ と $B_j (1 \leq j \leq n)$ はリテラルである。 $\rightarrow$ の左辺を前件、右辺を後件という。前件が *true* ($m = 0$) の節を正節、後件が *false* ($n = 0$) の節を負節という。正節 (負節) でない節を非正節 (非負節) という。また、 $n \leq 1$ の節をホーン節、 $n > 1$ の節を非ホーン節という。さらに、後件中の変数がすべて前件にも出現するとき、値域限定 (*range-restricted*) 節という。また、基礎 (ground) リテラル集合 M に対し、ある代入 σ のもとで $(\forall i (1 \leq i \leq m). A_i \sigma \in M) \wedge (\forall j (1 \leq j \leq n). B_j \sigma \notin M)$ が成立するとき、 M における違反 (*violated*) 節という。

MGTP の証明手続きは、値域限定された節集合 S に対して、最初に空のモデル候補 M を設定し、 S 中に違反節が見出されなくなるまで M を段階的に拡張する (モデル候補拡張) 操作を繰り返すことにより、エルブランモデルを具体的に生成する。MGTP では、節集合に関数記号の出現が許されるので、一般には無限要素のエルブランモデルの生成過程に陥り停止しなくなる可能性があ

*1 本論文では、節中のリテラル、および、節集合中の節は順序付きであり、記述された順序に従うものとする。

$$\frac{L \in M \quad \neg L \in M}{\perp}$$

図 2 単位反駁規則

$$\frac{L \in M \quad \neg L \vee C \in D}{C}$$

図 3 選言簡約規則

るが、要素数が有限のエルブランモデルが存在するときにはそれを出力することができる。また、エルブランモデルが存在しない (充足不能) 節集合に対しては、モデル生成の有限失敗 (可能なあらゆるモデル候補の棄却) によってこれを決定できる。

MGTP の証明手続きの概要を図 1 に示す。関数 mg は、入力として基礎リテラル集合 U と基礎選言集合 D 、およびモデル候補 M を受け取り、モデルの集合を出力する。与えられた値域限定節集合 S のうちすべてのホーン正節の集合 U_0 を U 、すべての非ホーン正節の集合 D_0 を D に置き、 $M = \emptyset$ として mg のトップレベル呼出しを起動すると、 S のエルブランモデル集合が返される。 S のうちすべての非正節は関数 CJM から暗黙に参照される。 mg の動作は次のとおりである。

ホーン拡張フェーズ (2~11 行目) U が空でなければ $select$ 関数でリテラル L を一つ取り出す。 L が M に包摂されない ($L \notin M$) 場合、モデル候補 M を L で拡張したものを新たな M とする (ホーン拡張)。この新たな M に対して図 2 の単位反駁が成立して関数 $unitRef$ が真値を返す場合には M を棄却し、ただちに mg は $\emptyset$ を返して終わる (6 行目)。さもないければ、連言照合関数 CJM を呼び、前件が M で充足される節^{*2}を探す。見つかった節が負節の場合、 CJM は M に棄却の印を付け、 mg はこの印があれば (*rejected*) 空集合を返して終わる (8 行目)。見つかった節が非負節の場合、それがホーン節か非ホーン節かに応じてその後件を U または D に付加して更新する。

9 行目で U が空のとき、関数 $disjSmp$ を呼び、図 3 に示す選言簡約および M に対する D の包摂検査を行なう。選言簡約の結果、単位節が導かれた場合、その単位節を D から U へ移す。空節が導かれた場合は、 $disjSmp$ は M に棄却の印を付け、これを検知した mg は空集合を返して終わる。

非ホーン拡張フェーズ (12~17 行目) D が空でなければ $select$ 関数で選言 Δ を一つ取り出す。 Δ の各選言要素 $L_j (1 \leq j \leq n)$ を U に加えて再帰的に mg を呼び、 M の分岐拡張を行なう (非ホーン拡張)。これら mg の各再帰呼出しが返すモデル集合の合併を当 mg の値として返す。

モデル出力 (18 行目) U と D の両方とも空のとき、 M のみを要素とする集合を返す。

*2 前件が $M \setminus \{L\}$ で充足されるものは、 L による拡張前の M における連言照合計算と重複するので省く。また、 M のもとの違反節を定めるための後件に対する検査は、図 1 の 4 行めと 10 行めの包摂検査に含まれるので省く。

図 4 節集合 $S1$ とその証明木

MGTP の証明手続きの実行にともなって、空要素を根とし、図 1 の 5 行目でのホーン拡張における L , および、16 行目の非ホーン拡張における L_j を節点とするような木を構成することができる。この木を MGTP の証明木と呼ぶ^{*3}。根からある節点に至る一本の枝（経路）上のすべてのリテラルからなる集合が一つのモデル候補に対応する。

例として、図 4 に節集合 $S1$ とそれに対する MGTP の証明木を示す。図 4 の $\{a\}$ のように棄却されたモデル候補に対応する枝を失敗枝と呼び、その葉に $\times$ の印を付す。一方、モデルに対応する枝を成功枝と呼ぶ。

さて、二つのモデル M と M' との間に集合としての包含関係 $M \supseteq M'$ が成立するとき、 M は M' に包摂されるという。また、モデル集合 $\mathcal{M}$ 中の要素 M に対し、 $\forall M' \in \mathcal{M}. M \supseteq M' \rightarrow M = M'$ が成立するとき、 M は $\mathcal{M}$ において極小であるという。mg の出力するモデル集合 $\mathcal{M}$ については、極小でないモデルが含まれるかもしれない。また（集合として）同一の極小モデルが証明木の異なる枝として複数回生成されるかもしれない（たとえば図 6 の節集合 $S2'$ ）。

図 4 では二つのモデル $M_1 = \{b, c\}$ と $M_2 = \{c\}$ が得られるが、 M_1 は M_2 によって包摂され極小でない。成功枝の葉に付けられた $\odot$ ($\otimes$) の印は、その枝に対応するモデルが極小（非極小）であることを示す。

3. MM-MGTP

3.1 極小モデル生成

選言 $a \vee b \vee c$ は $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) \vee c$ と等価である。したがって、図 4 の節点 b の下に $\neg c$ を付加してよい。ここで付加した選言要素 c の相補リテラル $\neg c$ を分岐仮定 (branching assumption) と呼び、 $[\neg c]$ と表す。こうすると、節点 b に付加された分岐仮定 $[\neg c]$ と b から導かれる c とに単位反駁規則を適用して $\{b, c\}$ を棄却できる。そこで、一般に、 $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ の非ホーン節によるモデル候補拡張を、 $(L_1 \wedge [\neg L_2] \wedge \dots \wedge [\neg L_n]) \vee (L_2 \wedge [\neg L_3] \wedge \dots \wedge [\neg L_n]) \vee \dots \vee L_n$ に修正する。これは、まさに相補分割規則 [Bry 96] の適用に相当する。

Bry と Yahya [Bry 96] が証明したように、相補分割は証明木の最左モデルが常に極小であることを保証する。しかし、証明木の他の枝において得られるモデルは必ず

^{*3} 証明木の節点は、紛れがない限り、これをラベル付けるリテラルで直接指し示すことにする。

図 5 右枝の非極小モデル

図 6 不健全な分岐仮定

しも極小ではない。たとえば、図 5 の節集合 $S2$ に対しては最左枝に極小モデル $\{a\}$ を得るが、その右の枝では非極小モデル $\{b, a\}$ が得られる。

生成されるあらゆるモデルが極小であることを保証するために、MM-SATCHMO は、モデル制約 (model constraints) [Bry 96] を用いた制約下探索に基づき、以下のように実行する。極小モデル $\{L_1, \dots, L_m\}$ が得られたとき、モデル制約、すなわち、負節 $L_1 \wedge \dots \wedge L_m \rightarrow$ を新たに生成して節集合に加える。たとえば、図 5 において、極小モデル $\{a\}$ が得られたとき、負節 $a \rightarrow$ が $S2$ に加えられ、これによって非極小モデル $\{b, a\}$ が棄却される。

しかし、上の方法では新たな極小モデルが確定する度に負節を動的に加えていかねばならず、その数は指数的に増大しうる。特に、MM-SATCHMO においてはモデル候補拡張の度にそれらの負節に対する連言照合が実行されるため、多大なオーバーヘッドが生じる。この問題を避けるためには、Niemelä の方法 [Niemelä 96] が有効と考えられる。この方法は以下のようなものである。モデル $M = \{L_1, \dots, L_m\}$ が得られたとき、 S を入力節集合、 $\overline{M} = \{\neg L' \mid L' \notin M\}$ として、 $\forall L \in M. S \cup \overline{M} \models L$ が成り立つか否かを検査する。成立すれば M は極小と判定される。この検査は根拠 (groundedness) 検査と呼ばれるが、一時的に節を増強した節集合 $S_M = S \cup \overline{M} \cup \{L_1 \wedge \dots \wedge L_m \rightarrow\}$ に対して、タブロー計算を新たにやり直すことに他ならない。 S_M が充足不能であれば、 M は極小であり、さもなければ非極小であるといえる。

3.2 分岐補題

$S2$ の第 1 節を $\rightarrow b \vee a$ で置き換えれば、非極小モデル $\{b, a\}$ は左枝に現れて分岐仮定 $[\neg a]$ により棄却され、右枝に極小モデル $\{a\}$ が得られる。したがって、図 5 においても $[\neg a]$ を右節点 b に加えて右枝の非極小モデル $\{b, a\}$ を棄却しても問題ないと考えられる。

ところが、一般に左の選言要素に右の選言要素からの分岐仮定を付加した上、右の選言要素に対して左の選言要素からの分岐仮定を付加すると、両立的選言を排他的選言として扱うことになり、不健全な推論となる。

たとえば、図 6 の節集合 $S2'$ を考える。証明木の葉に付された $\star$ は、分岐仮定によってモデル候補が棄却され

図 7 分岐補題を用いた証明木

たことを示す．左側では $\{a, b\}$ を $[\neg b]$ によって，右側では $\{b, a\}$ を $[\neg a]$ によって棄却したため， $S2'$ の極小モデル $\{b, a\} (= \{a, b\})$ を得るのに失敗している．

そこで，非ホーン拡張時における分岐仮定の健全な適用について論じるために，以下のような定義を行なう．

【定義 3・1】 L_i を非ホーン拡張で用いられた選言 $L_1 \vee \dots \vee L_n$ の要素とする． L_i 以下の枝が，ある弟選言要素 L_j ($i+1 \leq j \leq n$) による分岐仮定 $[\neg L_j]$ によって閉じられるとき， L_i を L_j への委託選言要素という．また，このとき弟選言要素 L_k ($i+1 \leq k \leq n$) はすべて， L_i からの被委託選言要素という． ■

【定義 3・2】 非ホーン拡張で用いられた $L_1 \vee \dots \vee L_n$ 中の L_i が委託選言要素でないとき， $\neg L_i$ を弟選言要素 L_j ($i+1 \leq j \leq n$) のすべてに付加する．この $\neg L_i$ を分岐補題といい， $[\neg L_i]$ と表す． ■

たとえば，図 7 において，分岐仮定 $[\neg c^1]$ が a^1 の下の枝を閉じるのに使用されているので， a^1 は委託選言要素である．ここで，リテラルの肩に付された添字は，同一リテラルの異なる出現を区別するためのものである．また，節点 c^2 に $\star$ が付されているのは，この節点以下の証明が別の節点 (c^1) の証明に委託されていることを示している． a^1 の弟選言要素 b^1, c^1 は a^1 からの被委託選言要素である．分岐補題 $[\neg p^1], [\neg b^1], [\neg p^2]$ は，委託選言要素でない p^1, b^1, p^2 からそれぞれ生成されるが， $[\neg a^1]$ という分岐補題は， a^1 が委託選言要素であるため生成されない．

【定義 3・3】 M をある証明木で得られたモデルとする． M が非ホーン拡張で用いられた $L_1 \vee \dots \vee L_n$ 中の被委託選言要素 L_j を含むとき， L_j へ委託した選言要素 L_i ($1 \leq i \leq j-1$) を， M に関する委託選言要素という． M が被委託選言要素を含まないとき， M は安全であるといい，さもなければ， M は要注意であるという． ■

§ 1 分岐補題による枝刈り

分岐補題の第一の効果として，図 8 に示すように，分岐仮定では刈れない非極小モデルの枝を刈ることができる．まず，最左枝の節点 a は委託選言要素でないので，分岐補題 $[\neg a]$ を生成でき，これにより中央の枝が刈られる．葉に付された $\star$ が分岐補題による枝刈りを示している．同じく，節点 b は委託選言要素でないので，分岐補題 $[\neg b]$ を生成でき，これにより最右枝が刈られる．こ

図 8 分岐補題による枝刈り

図 9 極小性検査の省略

こで，失敗枝であっても分岐仮定を使用していない限り分岐補題を生成できることに注意．

分岐補題の適用を因子化の観点から言い換えると，図 8 の場合，最右枝は中央枝に，中央枝は最左枝にそれぞれ証明を委託するということである．本来，因子化においては委託の循環が生じないかぎり，委託の方向（証明木における分枝の左右）の制限はない．これに対し，分岐仮定では常に左から右への委託のみが許されているので，これを $S4$ に適用しても上記のような枝刈りが行なえない．しかし，たとえば $S4$ の第 1 節のリテラル順序を逆順にして， $\rightarrow c \vee b \vee a$ とすれば，分岐仮定のみで 2 本の枝を刈ることができる．分岐補題は，分岐仮定の効果に関するリテラル順序への依存性を緩和して，因子化の機能を回復するものである．

§ 2 極小性検査の省略

第二に，分岐補題は極小性検査の回数を大幅に削減する効果を有する．今，得られたモデル M が安全であるとしよう．定義 3・3 により M は被委託選言要素を一つも含まないが，これは M 中のすべての選言要素のすべての兄選言要素から分岐補題が得られるということと等価である．このとき， M は極小であることが保証され，極小性検査を省くことができる．これは，直観的には次のように正当化される．もし， $L_j \in M$ がある選言 $L_1 \vee \dots \vee L_n$ の要素であるとき， M は安全なので，定義 3・3 により， L_j は被委託選言要素ではない．兄の選言要素 L_k ($1 \leq k \leq j-1$) の各々について，もし L_k を含むようなモデル M' があれば，次のことを満たす．分岐仮定 $[\neg L_j]$ のもとに $L_j \notin M'$ であり，かつ，分岐補題 $[\neg L_k]$ のもとに $L_k \notin M$ である．したがって， M は M' に包摂されない．

たとえば，図 9 において $S5$ のモデルはすべて安全であり，極小性検査を行なうまでもなく極小であることが保証される．

§ 3 極小性検査の範囲限定

一方、得られたモデル M が要注意であるとき、 M とそれ以前に得られたモデルとの間で極小性検査が必要となる。しかし、極小性検査は M に関する委託選言要素を含むモデルとの間だけ行えばよい。これを、限定した極小性検査という。極小性検査が必要となる理由は以下のとおりである。 L_k を M に関する委託選言要素、 L_j を L_k から委託された M 中の被委託選言要素、 M' を L_k を含むモデル、としよう。分岐仮定 $[\neg L_j]$ のもとでは、 $L_j \notin M'$ であるが、 M に対して分岐補題 $[\neg L_k]$ は許されていないので、 $L_k \in M$ かもしれない。すなわち、 M は M' に包摂される可能性がある。

たとえば、図 7 において、モデル M_1 は被委託選言要素を含まないので安全である。したがって、 M_1 に対する極小性検査は省いてよい。モデル M_2, M_3, M_4 は、被委託選言要素 b^1 あるいは c^1 を含むので要注意である。したがって、極小性検査が必要となる。 a^1 はこれらの各モデルに関する唯一の委託選言要素であるから、これらのモデルに対する極小性検査は、 a^1 を含む M_1 に対してのみ行なわれる^{*4}。実際、この検査の結果、 M_4 は M_1 に包摂されて非極小であることがわかる。

3.3 MM-MGTP 証明手続き

本節では、極小モデル生成のための MGTP の改良版として、Bry と Yahya の方法に基づくモデル記憶型、および Niemelä の方法に基づくモデル再計算型の 2 種類の MM-MGTP の証明手続きを示す。

§ 1 モデル記憶型 MM-MGTP

図 10 にモデル記憶型 MM-MGTP の証明手続きを示す。内側の枠で囲った部分は、図 1 に対する追加/修正箇所である。モデル記憶のために証明木^{*5}を実際に構築する必要があるので、図 10 では証明木の内部表現を mmg の引数 T に保持し (1', 16' 行目)、常に現在拡張中の枝の先端節点 (以下、拡張端と呼ぶ) が参照できるものとする。

分岐仮定の適用 (i, ii 行目) 分岐仮定 $[\neg L]$ が設定されていれば (*assumed*)、モデル候補 M を棄却し、この適用を記録する (*mark_used*)。

分岐補題の適用 (iii 行目) 分岐補題 $[\neg L]$ が設定されていれば (*asserted*)、モデル候補 M を棄却する。

証明木拡張 (iv 行目) 証明木 T の拡張端に枝を延ばして節点 L を加え、これを新たな拡張端とする。

分岐仮定設定 (v, vi 行目)

分岐仮定 $[\neg L_2], [\neg L_3], \dots, [\neg L_n]$ を設定する (*assume*)。

15 行目以降で L_j ($j > 1$) の分岐が行われる毎に $[\neg L_j]$ を解除する (*reset_assumption*)。

^{*4} さらに限定して、 M が要注意モデルであっても、 M に関する委託選言要素を含まなければ、 M に対する極小性検査は省くことができる。 M_2 がその例である。

^{*5} 実際には棄却されたモデル候補に至る不要な枝は省き、極小モデルの枝のみを残した木を保持すればよい。

```

1':  function mmg( $U, D, M, T$ ) {
2:      while ( $U \neq \emptyset$ ) {
3:           $L \leftarrow select(U)$ ;  $U \leftarrow U \setminus \{L\}$ ;
4:          if ( $L \notin M$ ) {
5:               $T \leftarrow addNode(T, L)$ ;
6:               $M \leftarrow M \cup \{L\}$ ;
7:              if (unitRef( $M$ )) return  $\emptyset$ ;
8:               $\langle U, D, M \rangle \leftarrow CJM(U, D, M, L)$ ;
9:              if (rejected( $M$ )) return  $\emptyset$ ;
10:             if ( $U = \emptyset$ ) {
11:                  $\langle U, D, M \rangle \leftarrow disjSmp(U, D, M)$ ;
12:                 if (rejected( $M$ )) return  $\emptyset$ ;
13:             }
14:             if ( $D \neq \emptyset$ ) {
15:                  $\Delta \leftarrow select(D)$ ;  $D \leftarrow D \setminus \{\Delta\}$ ;
16:                 where  $\Delta = L_1 \vee \dots \vee L_n$ ;  $M \leftarrow \emptyset$ ;
17:                 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  { assume( $\neg L_i$ ) }
18:                 for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  {
19:                     reset_assumption( $\neg L_j$ );
20:                     flag  $\leftarrow \neg used(\neg L_j)$ ;
21:                     for  $k \leftarrow (j+1)$  to  $n$  {
22:                         flag  $\leftarrow flag \wedge \neg used(\neg L_k)$ ;
23:                     }
24:                     if (flag) assert( $\neg L_{j-1}$ );
25:                     else mark_warned( $M$ );
26:                 }
27:                  $M \leftarrow M \cup mmg(U \cup \{L_j\}, D, M, T)$ ;
28:             }
29:             return  $M$ ;
30:         }
31:         else if (warned( $M$ )) {
32:             if (mchk( $M, T$ )  $\neq \emptyset$ ) return  $\emptyset$ ;
33:         }
34:         else return  $\{M\}$ ;

```

図 10 モデル記憶型 MM-MGTP の証明手続き

分岐補題設定 (vii ~ xi 行目) 直前の選言要素 L_{j-1} に対する mmg の実行で分岐仮定 $[\neg L_j], [\neg L_{j+1}], \dots, [\neg L_n]$ のいずれも使用されていなければ (*not used*)、 $[\neg L_{j-1}]$ を設定する (*assert*)。分岐補題が設定できなかった場合は、現モデル候補 M に要注意と印す (*mark_warned*)。

極小性検査 (xii, xiii 行目) この時点で、 M に要注意と印されていていれば (*warned*)、関数 $mchk(M, T)$ により証明木 T を踏査して、これまでに確定したモデルの中から M を包摂する M' を探す。 M' が見つければ M は非極小であり、 mmg は空集合を返す。さもなければ極小モデル M が確定する。

ここで、 M に真に包含されるモデル M' がある場合は、必ず証明木において M より左にあって右にはないこと、および、 M に等しいモデルが M の左右では決して得られないことにも注意。これらは分岐補題には拠らず、相補分割に従っていることのみからの帰結である。

§ 2 モデル再計算型 MM-MGTP

モデル再計算型 MM-MGTP の証明手続きは、図 10 の mmg に対し、以下の変更を施して得られる。

- 証明木の構築が不要なので、1', 16' 行目の mmg の引数 T 、および iv 行目を削除。
- xiii 行目の $mchk(M, T)$ をモデル再計算関数 $rcmp(M, U_0, D_0, \emptyset)$ で置き換える。ここで、 M は検査対象のモデル、 U_0, D_0 は mg や mmg のトップ

レベル呼出しで用いられた U, D の初期値, $\emptyset$ は再計算されるモデル候補の初期値とする.

$rcmp$ の本体自体も図 10 の mmg と同様であるが，以下の変更を施して得られる．ここで，検査対象のモデルを再計算されるモデル M と区別するため， $M^o = \{L_1^o, \dots, L_w^o\}$ と表す．

- 1' 行目の $mmg(U, D, M, T)$ を $rcmp(M^o, U, D, M)$ で, 16' 行目の $mmg(U \cup \{L_j\}, D, M, T)$ を $rcmp(M^o, U \cup \{L_j\}, D, M)$ で置き換える.
- vi, xii, xiii 行目を削除.
- 関数 CJM が暗黙に参照する入力節集合に, 一時的に負節 $C_{M^o} = L_1^o \wedge \dots \wedge L_m^o \rightarrow$ を加える.
- $L \notin M^o$ なるリテラル L によるモデル候補拡張においては, 前提となっている $\overline{M^o}$ により単位反駁が成立するとみなされるので, ただちにそのモデル候補を棄却する. このため, 3 行目の直後に,

3.5: **if** $(L \notin M^o)$ **return** $\emptyset$;

を挿入する。

- *rcmp* は M° を包摂するモデルを一つでも生成すれば終了してよいので, 16' 行目の $\}$ を削除し,

16.5: **if** ($\mathcal{M} \neq \emptyset$) **return** $\mathcal{M}$ }

を挿入する。

$rcmp$ が空集合を返せば M° が極小であると言える．さもなければ $M^\circ \supset M'$ を満たす M' が見つかったわけで， M° は非極小と分かり棄却される．ここで， $M^\circ \subseteq M''$ を満たすようなモデル M'' が $rcmp$ によって生成されることはないことに注意．なぜならば， $\overline{M^\circ}$ と C_{M° の制約があるからである．また，前述のように，相補分割のもとでは同一モデルが証明木上異なる 2 本の枝で生成されることはないので，同一モデルに対し $rcmp$ が 2 度以上呼ばれて極小と判定されることはない．

Niemelä の方法との若干の差異は、上述の C_{M^o} の代りに短縮負節 $L_{k_1}^o \wedge \dots \wedge L_{k_r}^o \rightarrow (r \leq m)$ を用いる点である。この短縮負節は M^o 中の被委託選言要素 $L_{k_i}^o$ のみから構成される。たとえば、図 7 において、モデル $M_3 = \{c^1, a^2, p^2\}$ が得られたとき、 $c^1 \wedge a^2 \wedge p^2 \rightarrow$ の代りに短縮負節 $c^1 \rightarrow$ が生成される。なぜならば、 c^1 だけが M_3 中の被委託選言要素だからである。

短縮負節の使用は限定した極小性検査に相当しており，被委託選言要素でないリテラルに対する根拠検査を省くことができる．その正当性は後に示す定理 4.4 によって保証される．

3・4 非極小モデルの早期刈り込み

MM-SATCHMO では、極小モデルが得られる度にモデル制約を付加するので、これを包含するような非極小モデルは構成の途中で事前に刈り取られる。しかし、前述の MM-MGTP 証明手続きや Niemelä の方法では、確定したモデルに対して極小性検査を行なうので、このような非極小モデルの刈り込みは事後の処理となる。この

$$S6 = \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow a \vee b. \\ a \rightarrow b \vee c. \\ b \rightarrow a. \\ b \wedge a \rightarrow c. \\ b \wedge a \wedge c \rightarrow p \vee q \vee r. \\ p \rightarrow s \vee t. \end{array} \right\}$$

図 11 非極小モデルの早期刈り込み

欠点を補うため，モデル候補 M が極小性検査により棄却されるとき， M より右の部分証明木の刈り込みを試行する．

例えば、図 11 の節集合 S_6 を考える．モデル $M_s = \{b, a, c, p, s\}$ が得られた時点で極小性検査が必要となるが、その結果、極小モデル $M_c = \{a, c\}$ により包摂されることが判明して棄却される．この後、モデル $M_t = \{b, a, c, p, t\}$, $M_q = \{b, a, c, q\}$, $M_r = \{b, a, c, r\}$ を生成しても、いずれも極小性検査によって同じ理由で棄却されることが分かる．なぜならば、 M_s, M_t, M_q, M_r の共通部分 $\{b, a, c\}$ がすでに M_c により包摂されることが分かるからである．

この枝刈りは、図 10 の xiii 行目の `return  $\emptyset$` を `{  $\text{prune}(M)$ ; return  $\emptyset$  }` で置き換えるとともに、15 行目と vi 行目の間に

15.5: **if** (*pruned*(L_{j-1})) **return** $\mathcal{M}$;

を挿入することにより、容易かつ効率良く実現できる。手続き *prune* は、証明木上の M に対応する枝を葉から根に向けて辿り、 M を包摂した M' の要素の一つ（図 11 では c ）が現われるまで、選言要素にあたる節点（図 11 では s と p ）に枝刈りの印を付けていく。一方、関数 *pruned* は、選言要素 L_{j-1} に枝刈りの印が付されていれば真、さもなければ偽を返す。

この枝刈りは、因子化（証明委託）とは独立に極小モデル生成の観点から妥当となるものである．MM-MGTPにおいては、モデル記憶型、モデル再計算型に関わらず、この機構は標準的に実装される．

4. 健全性と完全性

本章では MM-MGTP 証明手続きの健全性と完全性に関する結果を述べる．まず，因子化に基づくモデル生成が極小モデル生成に関して完全であることを示す．これにより，MM-MGTP 証明手続きも完全であることが示される．なぜならば，分岐仮定と分岐補題の使用は因子化の適用の一種とみなせるからである．次に，生成されたモデルが非極小であるための必要条件を与える．限定した極小性検査は，この必要条件を満たしている場合に

必ず行われるので、この検査を行うモデル生成は極小モデル生成に関して健全である。最後に、根拠検査に短縮負節を用いても、生成されるモデルの極小性が保証されることを示す。

〔定理 4・1〕 T を節集合 S の証明木、 N_1 および N_2 を T 中の兄弟節点、 L_i を N_i のラベル、 T_i を N_i を根とする T の部分木とする ($i = 1, 2$) (図 12(a))。このとき、 N_2 が L_1 のラベルをもつ節点 N_3 を子孫としてもつならば、 N_3 を根とする (T の) 部分木 T_3 (図 12(b)) を通る各モデル M に対し、 $M' \subseteq M$ を満たすような、 T_1 を通るモデル M' が存在する。

《証明》 T_1 中の節点の列 $N^1, N^2, \dots$ を以下のように帰納的に定義する。なお定義中、 I^i は T の根から N^i に至る枝上に現れるリテラルの集合を表す。

まず、 $N^1 = N_1$ と定義する。このとき $L_1 \in I^1$ であり、定理の仮定より $L_1 \in M$ となるので、 $I^1 \subseteq M$ が成り立つ。

さて次に、 $\forall i (1 \leq i \leq n). (I^i \subseteq M)$ を満たす節点の列 $N^1, N^2, \dots, N^n$ が既に定義されているものと仮定する。このとき、節点 N^{n+1} を次のように定義する。なお、 N^n に (失敗枝を示す) $\times$ の印が付けられていることはない。そうであるとする M がモデルであることに反するからである。

N^n に (成功枝を示す) $\odot$ もしくは $\otimes$ の印が付けられている場合、 N^n を列の終端とする。

そうでなければ (N^n の下に証明が続いていれば)、 N^n で行われたモデル拡張に用いられた節を $\Gamma_n \rightarrow L_1^n \vee \dots \vee L_{m_n}^n$ とする。このとき、 $I^n \models \Gamma_n$ かつ $I^n \not\models L_1^n \vee \dots \vee L_{m_n}^n$ が成り立つ。帰納法の仮定より $I^n \subseteq M$ がいえるので、 M がモデルであることより、 $M \models \Gamma_n$ かつ $M \models L_1^n \vee \dots \vee L_{m_n}^n$ が成り立つ。したがって、 $\exists i (1 \leq i \leq m_n) L_i^n \in M$ が成り立つ。ここで、 k_n を $L_{k_n}^n \in M$ を満たす添字とする。そして、 N^{n+1} を N^n の子節点の内 $L_{k_n}^n$ でラベル付けされているものと定義する。このとき、 $L_{k_n}^n \in I^{n+1}$ であるので、 $I^{n+1} \subseteq M$ が成り立つ。

以上のように定義した節点列は、ある節点 N^n で有限のうちに終わるか、無限に続くかのいずれかである。前者の場合、 M' は I^n で与えられ、後者の場合、 M' は $\lim_{i \rightarrow \infty} I^i$ で与えられる。いずれにしても、 $\forall i (1 \leq i). (I^i \subseteq M)$ であり、 $M' \subseteq M$ が成り立つ。□

この定理により、証明 T_3 は極小モデル生成に関して冗長であることが分かる。この冗長性を削除する因子化を、因子化タブロー法 [Letz 94] と同様の手法で定義する。循環論法を避けるため、証明木に対して因子化依存関係を定義する。

〔定義 4・1〕 証明木における因子化依存関係とは、証明木中の兄弟節点間の狭義の半順序 $\prec$ である。■

兄弟節点 N_1 と N_2 の間に因子化依存関係 $N_1 \prec N_2$ があるとは、 N_2 以下の極小モデル探索が N_1 以下の探索に委託されることを意味している。

〔定義 4・2〕 証明木 T ならびに T 上の因子化依存関係 $\prec$ が与えられているとき、 L_1 のラベルをもつ節点 N_3 と同じ L_1 のラベルをもつ節点 N_1 で、以下の関係にあるものを選ぶ。(1) N_3 は N_1 の兄弟節点 N_2 の子孫である。(2) $N_2 \not\prec N_1$ である。次に、 N_3 の枝を閉じ ($\star$ で印をつける)、 $\prec$ に $N_1 \prec N_2$ を加えた上、推移的閉包をとる。このとき、 N_3 は N_1 に因子化されたという。印 $\star$ は N_3 の証明が N_1 の証明に委託されたことを示す。この状況を図 12(d) に図示する。■

〔定義 4・3〕 通常の MGTP 証明手続き (図 1) に因子化によるモデル棄却を加えたものを因子化に基づくモデル生成と呼ぶ。■

定理 4・1 より、次の系が直ちに導かれる。

(系 4・1) S を節集合とする。 S の極小モデル M がモデル生成によって生成されるならば、 M は因子化に基づくモデル生成によっても生成される。

モデル生成法は、値域限定された節集合に対する極小モデル生成に関して完全 [Bry 96] (全ての極小モデルを生成) なので、系 4・1 より、因子化に基づくモデル生成も極小モデル生成に関して完全であることが分かる。

分岐仮定と分岐補題に基づくモデル生成は、それぞれ $L_1, \dots, L_m$ のラベルをもつ兄弟節点 $N_1, \dots, N_m$ 間に因子化依存関係を次のように設定することとみなせる。もし L_i が委託選言要素であるならば、すべての $j (i < j \leq m)$ について $N_j \prec N_i$ とする。逆に、ある $N_j (i < j \leq m)$ 以下で $\llbracket \neg L_i \rrbracket$ が用いられたならば $N_i \prec N_j$ とする。この見方により、MM-MGTP 証明手続きの極小モデル生成に関する完全性を述べた次の系が導かれる。

(系 4・2) S を値域限定された充足可能な節集合、 T を分岐仮定と分岐補題に基づくモデル生成による S の証明木とする。 M が S の極小モデルならば、 M は T 中に得られる。

因子化に基づくモデル生成は非極小モデルの生成を抑制できるが、全く生成しないわけではない。証明手続きを健全にする、すなわち、極小モデルのみを生成させるためには、得られたモデルに対する極小性検査が不可欠となる。次の定理は得られたモデルが非極小であるための必要条件を与える。

〔定理 4・2〕 S を節集合、 T を因子化に基づくモデル生成による S の証明木、 N_1 と N_2 を T 中の兄弟節点、 T_i を N_i 以下の部分証明木、 M_i を T_i を通るモデル ($i = 1, 2$) とする。この時、 $N_2 \not\prec N_1$ ならば、 $M_1 \not\subseteq M_2$ である。

《証明》 N_i のラベルを $L_i (i = 1, 2)$ とする (図 12(a))。 $N_2 \not\prec N_1$ から以下が導かれる。(1) $N_1 \prec N_2$ 、あるいは (2) N_1 と N_2 の間に $\prec$ 関係がない。もし (1) が成立するならば、 $L_1 \notin M_2$ である。なぜならば、 T_2 中の L_1 のラベルをもつ節点はすべて N_1 によって因子化されているはずだからである。一方、 $L_1 \in M_1$ である。したがって、 $M_1 \not\subseteq M_2$ である。もし (2) が成立するならば、 $L_1 \notin M_2$ である。なぜならば、因子化されなかったということは、

図 12 定理 4.1, 4.2 と定義 4.2 の説明図

T_2 中に L_1 のラベルをもつ節点は存在しないからである．したがって， $M_1 \not\subseteq M_2$ である． □

定理 4.2 によれば，(1) $N_2 \not\prec N_1$ ならば， M_2 の M_1 に対する極小性検査は不要であり，(2) $N_2 \prec N_1$ ならば， M_2 の M_1 に対する極小性検査が必要である．

深さ優先・左優先探索による MM-MGTP において，安全なモデルに対して極小性検査を省くことは，上の (1) で正当化される．要注意モデルに対して限定された極小性検査を行なうことは，(2) で正当化される．もし N_1 が N_2 の左にある兄弟節点で， $N_1 \prec N_2$ ，すなわち，分岐補題 $[\neg L_1]$ が N_2 以下で使われたとしたら，定理 4.2 により， M_1 の M_2 に対する極小性検査が必要となる．しかし，MM-MGTP では，この検査は実は不要である．なぜならば，常に $M_2 \not\subseteq M_1$ が以下のようにして成立するからである．

[定理 4.3] T を因子化に基づくモデル生成の深さ優先・左優先探索版による証明木とし， M_1 を T 中のモデルとする．モデル M_2 が T 中で M_1 の右に現われるならば， $M_2 \not\subseteq M_1$ である．

《証明》 P_{M_i} を $M_i (i = 1, 2)$ に対応する経路とすると，兄弟節点 N_1 と N_2 がそれぞれ P_{M_1} と P_{M_2} 上にある． L_i を $N_i (i = 1, 2)$ のラベルとする．ここで， $M_2 \subseteq M_1$ と仮定しよう．これは $L_2 \in M_1$ を含意する．すると， L_2 のラベルをもつ節点 N_{L_2} が P_{M_1} 上に存在する．しかし，深さ優先・左優先探索では， N_{L_2} は N_2 に因子化されるはずである．これは， M_1 が T 中のモデルであるという定理の仮定と矛盾する．したがって， $M_2 \not\subseteq M_1$ である． □

定理 4.2, 4.3 より，MM-MGTP の極小モデル生成に関する健全性が示される．次に，根拠検査のための短縮負節が，得られたモデルの極小性を保証することを意味する定理を示す．

【定義 4.4】 S を節集合， T を因子化に基づくモデル生成による S の証明木， M を T 中に得られるモデルとする．各リテラル $L \in M$ に対し， N_L は M の経路中の L のラベルをもつ節点を表す． $M_p \subseteq M$ を次の条件を満たす集合とする．すべての $L \in M_p$ に対し， $N_L \prec N$ の関係にある N が存在する．すなわち， M_p は M 中の被委託選言要素の集合であることに注意．短縮負節 $L_1 \wedge \dots \wedge L_m \rightarrow$ を C_{M_p} で表す．ここで， $L_i \in M_p (i = 1, \dots, m)$ である． ■

[定理 4.4] S を節集合とする． M が S の極小モデル

であるのは， $S_{M_p} = S \cup \overline{M} \cup \{C_{M_p}^{*6}\}$ が充足不能のときであり，かつそのときに限る．ここで， $\overline{M} = \{\neg L' \mid L' \notin M\}$ である．

《証明》 (Only-if part) M' を S のモデルとする． M と M' の関係により次の 3 つの場合に分けられる．(1) $M' \setminus M \neq \emptyset$ ，(2) $M' = M$ ，(3) $M' \subset M$ ．(1) の場合， M' は $\overline{M}$ 中の相補リテラルにより棄却される．(2) の場合， M' は短縮負節 C_{M_p} により棄却される．(3) は M が極小であることと矛盾する．つまり， S のモデルで S_{M_p} のモデルとなるものはない．したがって， S_{M_p} は充足不能である．

(If part) T を因子化に基づくモデル生成による S の証明木とし， M は非極小と仮定する．すると， $M' \subseteq M$ であるような S のモデル M' が T 中に得られる． P_M, P'_M をそれぞれ M, M' に対応する経路とすると，兄弟節点 N, N' が T 中に存在し， N が P_M 上に， N' が P'_M 上にある． L, L' をそれぞれ N, N' のラベルとする． $N \prec N'$ の場合， M' は $L \notin M'$ なので L を前件に含む C_{M_p} と矛盾せず， $M' \subseteq M$ なので $\overline{M}$ と矛盾しない．したがって， M' は S_{M_p} のモデルである．これは， S_{M_p} が充足不能であることと矛盾する． $N \not\prec N'$ の場合， L' のラベルをもつ節点は P_M 上に現われるはずはなく， $L' \notin M$ かつ $L' \in M'$ が成立する．これは， $M' \subseteq M$ と矛盾する．したがって， M は極小である． □

5. 性能評価

5.1 MM-MGTP の実装

MM-MGTP の実装に当たっては，Java によって記述された MGTP [藤田 98, 長谷川 99, 長谷川 00] を拡張した．本実装においては，分岐仮定や分岐補題に関する操作に対して Acell 機構 [長谷川 99, 長谷川 00] が中心的な役割を果たしている．一般に，一つの集合に対して一つの Acell が定義され，任意の要素がその集合に所属するか否かを，その要素が Acell への参照をもつか否かで判別する．ここでは，モデル候補に対して Acell 機構が適用される．Acell 自体は一つの boolean 値を保持するメモリセルで，現モデル候補に対応する (しない) Acell はその値が真 (偽) となっている．真値 (偽値) をもつ Acell を active (inactive) であるといい，active (inactive) な Acell

*6 もし $M_p = \emptyset$ ならば， $L_1 \wedge \dots \wedge L_m \rightarrow$ は空節となり，矛盾を表す．この場合， M は根拠検査なしに極小と判定される．

を参照している属性は active(inactive) であるといわれる。根節点及び非ホーン拡張された各分枝に対して、それぞれ異なる Acell が割り当てられる。

さて、まず、同一のリテラルが入力節集合やモデル候補中に複数の出現をもつ場合に、インデキシング機構によってすべて唯一の実体として参照できるようにしておく。さらに、リテラルに対する様々な問い合わせ、すなわち、現モデル候補 M の要素であるか否か (ac)、分岐仮定 / 補題として設定されているか否か (asm/lem) などに応えるための属性スロットを各リテラル毎に用意する。それら各属性の直接の値は Acell への参照とし、意味上の値はその Acell の保持する boolean 値と等しいものとする。

たとえば、選言 $d = L_1 \vee \dots \vee L_n$ で証明木の枝を非ホーン拡張する際、予め各 $L_i (1 \leq i \leq n)$ の asm に、親の分枝に割り当てられた par-Acell (d の証明が終了するまで active である) への参照を置く。これにより、 d 以下の証明で有効な分岐仮定 $[\neg L_1] \wedge \dots \wedge [\neg L_n]$ が設定される。個々の L_i による拡張は左から順に行われ、その都度、対応する L_i の asm の Acell 参照を inactive とし、分岐仮定を無効化する。

また、 L_i の証明で、分岐仮定を用いて枝が閉じた場合、すなわち、ある弟選言要素 $L_j (i+1 \leq j \leq n)$ の ac, asm がともに active な Acell を参照した場合、 L_j の asm に used-Acell (常に active な Acell) への参照を上書きする。 L_i の証明が終了した時点で、ある弟選言要素 L_j の asm が used-Acell を参照していれば、 L_i は委託選言要素である。さもなければ、 L_i の lem に par-Acell への参照を置く。これにより、弟選言要素 $L_{i+1}, \dots, L_n$ の証明に有効な分岐補題 $[\neg L_i]$ が設定される。この分岐補題によって枝が閉じられるのは、同様に、 L_i の ac, lem がともに active な Acell を指すときである。

また、モデル記憶型 MM-MGTP における関数 $mchk$ が、 M を包摂する極小モデルを求めて探索対象の部分木の各枝を辿る間、その枝上の各節点について、それをラベル付けしているリテラル L が現モデル M に含まれているかどうかを、 L の ac 属性を見ることによって検査する。 L が active ならば、 $L \in M$ を意味しており、さもなければ $L \notin M$ である。後者の場合、 $mchk$ はただちにその枝の探索を止め、別の枝の探索に向かう。 $mchk$ が active な葉に至ったとき、その枝の表す極小モデルに M が包摂されたことを意味し、 M が極小でないことが判明する。

5.2 実験結果

本節では、MM-MGTP と MM-SATCHMO および MGTP との比較実験結果について述べる。MM-MGTP については、4 つの版を比較する。すなわち、モデル再計算型の分岐補題有り無し (Rcmp+BL / Rcmp)、およびモデル記憶型の分岐補題有り無し (Mchk+BL /

Mchk) である。MM-MGTP と MGTP は Java で、MM-SATCHMO [Bry 99] は ECLⁱPS^e Prolog で実装されている。すべての実験は Sun Ultra10 (333 MHz, 128 MB) 上で行なった。

結果を表 1 に示す。実験には以下の例題を用いた。

ex1

$$S_n = \{ \rightarrow a_k \vee b_k \vee c_k \vee d_k \vee e_k \vee f_k \vee g_k \vee h_k \vee i_k \vee j_k \mid k = 1, \dots, n \}$$

これは MM-SATCHMO のベンチマーク例題からの引用である。ex1 の MG 木は各分枝が分岐数 10 の平衡木であり、生成されるモデルは全て極小である。すべての成功枝が被委託選言要素を含まないので、対応するモデルは安全であり、極小性検査は不要である。

ex2

$$S_n = \{ a_{i-1} \rightarrow a_i \vee b_i \vee c_i, b_i \rightarrow a_i, c_i \rightarrow b_i \mid i = 2, \dots, n \} \cup \{ \rightarrow a_1 \}$$

ex2 の MG 木は右に重い非平衡木である。最左枝が唯一の極小モデルを与え、その右側のモデルはすべてこれに包摂される。分岐補題を用いれば、これら非極小モデルのすべてが棄却される。

ex3

$$\begin{aligned} T_1 &= \{ \rightarrow a_1 \vee b_1, a_1 \rightarrow b_1, b_1 \rightarrow a_2 \vee b_2, \\ &\quad a_2 \rightarrow b_2 \vee d_1 \} \\ T_2 &= \{ b_2 \rightarrow a_3 \vee b_3, a_3 \rightarrow a_2 \vee c_2, \\ &\quad a_3 \wedge a_2 \rightarrow b_3 \vee d_2, a_3 \wedge c_2 \rightarrow b_3 \vee d_2 \} \\ T_j &= \{ b_j \rightarrow a_{j+1} \vee b_{j+1}, a_{j+1} \rightarrow a_j \vee c_j, \\ &\quad c_j \rightarrow a_{j-1} \vee c_{j-1}, a_{j+1} \wedge a_2 \rightarrow b_{j+1} \vee d_j, \\ &\quad a_{j+1} \wedge c_2 \rightarrow b_{j+1} \vee d_j \} \quad (j \geq 3) \\ S_n &= \bigcup_{i=1}^n T_i \end{aligned}$$

ex3 の MG 木は ex2 と同様に、右に重い非平衡木である。すべての成功枝が被委託選言要素を含んでおり、極小性検査が省けない。しかし、いずれのモデルもこの検査によって棄却されない。

ex4

$$S_a = \{ \rightarrow a_i \vee b_i \vee c_i \vee d_i \vee e_i \mid i = 1, \dots, 4 \} \cup \{ a_3 \rightarrow a_2, a_4 \rightarrow a_3, a_1 \rightarrow a_4 \}$$

ex5

$$\begin{aligned} S_{abcd} &= S_a \cup \{ b_3 \rightarrow b_2, b_4 \rightarrow b_3, b_1 \rightarrow b_4 \} \cup \\ &\quad \{ c_3 \rightarrow c_2, c_4 \rightarrow c_3, c_1 \rightarrow c_4 \} \cup \\ &\quad \{ d_3 \rightarrow d_2, d_4 \rightarrow d_3, d_1 \rightarrow d_4 \} \end{aligned}$$

ex4 と ex5 は [Niemelä 96] の論文からの引用である。いずれも非極小モデルはすべて分岐補題によって棄却でき、極小検査が不要となる。

syn9-1

TPTP ライブラリ [Sutcliffe 94] から引用した一階述語論理の例題で、充足不能である。したがって、極小性検査は行なわれない。

channel

一階述語論理で記述したチャネルルーティング問題

表 1 実行性能比較

Problem	Rcmp+BL	Mchk+BL	Rcmp	Mchk	MM-SATCHMO	MGTP
ex1 (N=5)	0.271 100000 0	0.520 100000 0	2.315 100000 0	0.957 100000 0	8869.950 100000 0	0.199 100000 0
ex1 (N=7)	34.150 10000000 0	OM (>144) — —	324.178 10000000 0	OM (>115) — —	OM (>40523) — —	19.817 10000000 0
ex2 (N=14)	0.001 1 26	0.001 1 26	82.112 1 1594322	16.403 1 1594322	1107.360 1 1594323	9.013 1594323 0
ex3 (N=16)	19.816 65536 1	5.076 65536 1	19.550 65536 1	5.106 65536 1	OM (>2798) — —	589.651 86093442 0
ex3 (N=18)	98.200 262144 1	26.483 262144 1	95.436 262144 1	26.103 262144 1	OM (>1629) — —	5596.270 774840978 0
ex4	0.002 341 96	0.002 341 96	0.009 341 160	0.003 341 160	0.3 341 284	0.004 501 0
ex5	0.001 17 84	0.001 17 84	0.002 17 88	0.001 17 88	0.25 17 608	0.001 129 0
syn9-1	0.105 0 19683	0.109 0 19683	0.101 0 19683	0.092 0 19683	TO (>61200) — —	0.088 0 19683
channel	4.016 51922 78	4.064 51922 78	46.166 51922 78	4.517 51922 78	NA — —	3.702 51922 78

top: time (sec), middle: No. of models, bottom: No. of failed branches.

OM: Out of memory, TO: Time out, NA: Not available due to lack of constraint handling

[Zhou 95] で、負リテラルによる制約伝搬が探索空間の刈り込みに本質的に働く例題である。極小性検査を行わない MGTP でも、すべて極小のモデルが得られる。

最後の二つの例題は、MM-MGTP の極小性検査のオーバーヘッドを評価する目的に用いた。

MM-MGTP 対 MM-SATCHMO

MM-SATCHMO は、メモリオーバーフローにより実行不可能となる場合が多く、ここでは、MM-SATCHMO が解くことができた問題のみを考察の対象とする。極小性検査が不要な ex1 や分岐補題が絶大な枝刈り効果を発揮する ex2 において、MM-MGTP の顕著な優位性が認められる。MM-MGTP の最速の版 (Rcmp+BL) では、ex1 と ex2 において、MM-SATCHMO に対する速度比は 33,000 から 1,100,000 倍に達する。ex4 や ex5 のような小さな問題でも、MM-MGTP は MM-SATCHMO より 100 倍以上速い。

ex1 における Mchk と MM-SATCHMO の比較は興味深い。この場合、分岐補題が適用されないため、両者とも同数のモデルに対して極小検査が行なわれる。実験結果は、Acell 機構つき MM-MGTP の基本推論部が MM-SATCHO のそれより数 10 倍速い^{*7}としても、それから

さらに 100 倍以上も高速化されていることを示している。これは、証明木の踏査による極小性検査がモデル制約によるそれよりもはるかに効率的であることを証左している。

ちなみに、Niemelä のシステム^{*8}は ex4 と ex5 をそれぞれ 2 秒弱と 0.5 秒で解いている [Niemelä 96]。

MM-MGTP 対 MGTP

分岐補題および極小性検査によって棄却される非極小モデルの数が増大するほど、MM-MGTP の証明時間は MGTP に比べ大きく短縮化される。特に、ex2 と ex3 は、極小モデル生成における分岐補題の効果が顕著である。ex1, syn9-1, channel は非極小モデルが作られない問題であるが、分岐補題を用いる MM-MGTP は極小性検査が省けるため、オーバーヘッドは数 10 % 以内と比較的小さい。

Rcmp 対 Mchk

項メモリ [Stickel 89] を用いずに済む ex1 (N=7 は除外) から ex5 の命題論理の問題に対して、Rcmp の証明時間は Mchk に比べ、再計算のオーバーヘッドにより 2 から 5 倍に増加している。一方、一階述語論理の問題 channel に対しては、Rcmp は Mchk の約 10 倍遅くなっている。これは、項メモリへのアクセスオーバーヘッドが大きいことに加え、根拠検査の実行によって項メモリへのアクセス頻度が倍化するためである。次に分岐補題の効果を

^{*7} [長谷川 00] によれば、MGTP では主要操作が基礎項の所属検査に帰着され、それが Acell 機構を用いて項数に依らない定数時間量で実現された結果、線形検索を含む SATCHMO の実

装に対して数倍から数 10 倍速くなったと報告されている。

^{*8} Niemelä の処理系が入手できず、正確な比較はできない。

てみる．ex1 と channel においては，分岐補題により極小性検査が省かれるので，Rcmp+BL と Mchk は分岐補題を用いない版に比べ，それぞれ 8.5～11.5，1.84～1.1 倍，高速である．Mchk+BL における高速化の度合いが小さいが，これは逆に，証明木の踏査に基づく Mchk が極めて効率良いことを示している．ex2 が分岐補題の効果を示す典型的な問題であり，Rcmp+BL と Mchk+BL の双方とも数万倍の高速化を達成している．

Rcmp+BL 対 Mchk+BL

極小性検査を省けない ex3 の場合，Mchk+BL は Rcmp+BL より 4 倍ほど速い．一方，ex1(N=5) では，Mchk+BL と Rcmp+BL との差異は原理的にないはずであるが，前者が後者より約 2 倍遅い．これは，Mchk+BL がすべてのモデルを記憶せねばならず，ゴミ集めを頻繁に引き起こしているためである．

6. 関 連 研 究

タブローの枠組において，Letz はタブロー木の枝刈りを行なう因子化 [Letz 94] を提案した．しかし，因子化は反駁証明への適用を目的にしており，[Letz 94] では極小モデル生成については何ら言及されていない．相補分割（あるいは [Letz 94] における *folding-down*）は因子化の制限された実装の一つである．この制限は選言要素間の優先関係が予め決定されている点にあり，優先順位の高い選言要素のみが，その証明を低い優先順位の他の兄弟選言要素の証明に委ねることができる．因子化においては，このような優先関係は事前に決定されない．因子化は相補分割よりも枝刈り能力の点において強力ではあるが，何らかの証明制御を行わない限り，非極小モデルを生成する可能性がある．

Lu[Lu 96] は分岐仮定を対称的に付加することにより，上の制限を緩和した極小モデル生成法を示した．これによると， $a \vee b$ は $(a \wedge [-b]) \vee (b \wedge [-a])$ のように扱われる．しかし，この方法では選言要素間の優先順位を事後に定める必要がある．対称的な分岐仮定によって，証明の相互委託が起こる可能性があるからである．このような場合，閉じてはならない枝が閉じられ，証明が健全でなくなる（モデル生成の観点から完全でなくなる）．したがって，そのように一旦誤って閉じられた枝を事後に再び開く必要があるが，このような操作は効率を著しく低減させる．

本論文で提案した分岐補題もなお，因子化の制限された実装法とみなせる．というのも，ある選言要素の証明にその弟の選言要素に起因する分岐仮定が用いられた場合，証明の相互委託が実際に生じるか否かにかかわらず，分岐補題の生成が抑制されるからである．それでも，因子化依存関係の推移閉包を計算する必要がないので，我々の方法は因子化を極小モデル生成に適用する効率的な方法といえる．分岐補題の効果は次のようにまとめられる．

(1) 非極小モデルの生成を大きく抑制できる，(2) 不要な極小性検査を省ける，(3) 現モデル候補 M に対する極小性検査の範囲を M に関する委託選言要素が現われるモデルに限定できる．

モデル記憶型の MM-MGTP は，分岐補題の導入によって MM-SATCHMO を改良するのが狙いであり，相補分割と制約下探索に基づくものである．両システムの主な差異は以下のとおりである．MM-SATCHMO はモデル制約を負節の形で記憶し，極小性検査をこの負節に対する連言照合によって実行する．したがって時間量，記憶量とも効率が悪くなっている．一方，我々のモデル記憶型はより効率が良い．なぜならば，モデル制約は証明木の形で記憶され，複数のモデルが共通部分を共有できる構造になっていることと，分岐補題を用いることにより極小性検査が抑制されているからである．

上述の両システムともメモ機構の一種であるモデル制約に基づいているため，記憶量の消費が著しく，最悪の場合指数的に増大する．この状況は，Niemelä の方法 [Niemelä 96] によって回避しうる．この方法では，以前に見つかった極小モデルに対する極小性検査をせずに，あらゆる非極小モデルを棄却できる．これには，相補分割と等価な *cut rule* と制約下探索の代替とみなせる根拠検査が用いられている．

モデル再計算型の MM-MGTP は，この Niemelä の方法の利点を備えており，モデル制約を記憶する必要がない．しかし，両者とも制約下探索よりは高価な根拠検査を繰り返し実行する．しかも，各極小モデルを 2 度生成することになる．我々のモデル再計算型では，短縮負節の導入によりこの問題は幾分軽減されている．さらに，分岐補題により，根拠検査の回数をできる限り抑制することができる．

ほかに，混合整数計画法に基づいた手法 [Bell 94, Bell 96] が報告されている．対象は命題論理に限定されるが，すでに実用に供されている整数計画法ソフトウェアパッケージを利用して，節集合の変換等以外には特別な処理を導入することなく極小モデルを効率的に求めることができる．この方式の述語論理に向けた拡張や我々の方式との比較評価は興味深いテーマと考えられるが，本稿の範囲外であり，今後の課題である．

7. む す び

分岐仮定と分岐補題に基づく効率的な極小モデル生成法について述べた．本研究は，相補分割と制約下探索に基づく Bry の方法，ならびに根拠検査を採用した Niemelä の方法に動機づけられている．両方法とも冗長な計算を多く含んでおり，これらは本論文で提案した分岐補題という安価な機構によって抑制できる．実際，MM-MGTP の実験結果から，いくつかの問題において何桁もの速度向上効果が得られることが示された．

ただし、我々の方法でも、分岐補題が適用できない場合には、依然として極小性検査が省けない。これに関しては、たとえば節集合に対する解析を行なうことにより、できるだけ多く極小性検査を省けるように改良することが今後の課題である。さらに、ここで述べた方法を、*folding-up*[Letz 94] や制限なしの完全因子化のような刈り込み技法と組み合わせたり、安定モデル生成に応用することも有望と考える。

◇ 参 考 文 献 ◇

- [Bell 94] Bell, C., Nerode, A., Ng, R. T., and Subrahmanian, V. S.: Mixed integer programming methods for computing nonmonotonic deductive databases, *J. of the ACM*, Vol. 41, No. 6, pp. 1178–1215 (1994).
- [Bell 96] Bell, C., Nerode, A., Ng, R. T., and Subrahmanian, V. S.: Implementing deductive databases by mixed integer programming, *ACM Trans. on Database Systems*, Vol. 21, No. 2, pp. 238–269 (1996).
- [Bry 96] Bry, F. and Yahya, A.: Minimal Model Generation with Positive Unit Hyper-Resolution Tableaux, in *Proc. of 5th Workshop on Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods, LNAI 1071*, pp. 143–159 (1996).
- [Bry 99] Bry, F.: <http://www.pms.informatik.uni-muenchen.de/software/MM-SATCHMO> (1999).
- [藤田 98] 藤田, 長谷川: Java 言語によるモデル生成型定理証明系 MGTP の実装, 九州大学大学院システム情報科学研究科報告, Vol. 3, No. 1, pp. 63–68 (1998).
- [長谷川 99] 長谷川, 藤田: 制約問題を解くためのモデル生成型定理証明系の最新実装, 九州大学大学院システム情報科学研究科報告, Vol. 4, No. 1, pp. 57–62 (1999).
- [長谷川 00] 長谷川, 藤田: Java によるモデル生成型定理証明系 MGTP の開発, 情報処理学会論文誌, Vol. 41, No. 6, pp. 1791–1798 (2000).
- [Letz 94] Letz, M. K., R. and C., G.: Controlled Integration of the Cut Rule into Connection Tableau Calculi, *J. of Automated Reasoning*, Vol. 13, pp. 297–337 (1994).
- [Lu 96] Lu, W.: Minimal Model Generation Based on E-hyper Tableaux, Research reports 20/96, Inst. für Informatik, Univ. Koblenz (1996).
- [Niemelä 96] Niemelä, I.: A Tableaux Calculus for Minimal Model Reasoning, in *Proc. of 5th Workshop on Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods, LNAI 1071*, pp. 278–294 (1996).
- [白井 97] 白井, 長谷川: モデル生成型定理証明システムによる制約充足問題の解決とその並列化, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J80-D-II, No. 1, pp. 224–236 (1997).
- [Stickel 89] Stickel, M.: The Path-Indexing Method For Indexing Terms, Technical Note 473, AI Center, SRI International (1989).
- [Sutcliffe 94] Sutcliffe, G., Suttner, C., and Yemenis, T.: The TPTP Problem Library, in *Proc. of the 12th Int. Conf. on Automated Deduction (CADE), LNAI 814*, pp. 252–266, Springer-Verlag (1994).
- [Zhou 95] Zhou, N.: A Logic Programming Approach to Channel Routing, in *Proc. 12th Int. Conf. on Logic Programming*, pp. 217–231, MIT Press (1995).

〔担当委員：新田克己〕

2000 年 5 月 11 日 受理

著 者 紹 介

長谷川 隆三(正会員)

1972 年 九州大学大学院工学研究科通信工学専攻修士課程修了。同年 日本電信電話公社入社。1987～1995 年(財)新世代コンピュータ技術開発機構出向。現在九州大学大学院教授。博士(工学)。論理プログラミング、定理証明、自動推論システムなどに関する教育・研究に従事。情報処理学会、電子情報通信学会各会員。

藤田 博(正会員)

1978 年 東京大学大学院工学系研究科情報工学専攻修士課程修了。同年 三菱電機(株)入社。1984～1990 年(財)新世代コンピュータ技術開発機構出向。現在九州大学大学院助教授。博士(工学)。論理プログラミング、自動推論システムなどに関する教育・研究に従事。情報処理学会、電子情報通信学会、日本ソフトウェア科学会、ACM 各会員。

越村 三幸(正会員)

1984 年 筑波大学第一学群自然学類卒業。1986 年 同大学大学院修士課程理工学研究科修了。同年 日本ビジネスオートメーション(株)(現在 東芝情報システム(株))入社。1986～1990, 1993～1995 年(財)新世代コンピュータ技術開発機構出向。1995 年 九州大学助手。現在に至る。情報処理学会、日本ソフトウェア科学会各会員。