下負荷面モデルに基づくリターンマッピングおよび整合接線係数テンソルの導入による弾塑性変形解析* (第1報, リターンマッピングの定式化)

橋口 公一^{*1}, 鈴木 規之^{*2}, 上野 正実^{*3}

Elastoplastic deformation analysis by return-mapping and consistent tangent modulus tensor based on subloading surface model (1st Report, Formulation of return-mapping)

Koichi HASHIGUCHI^{*1}, Noriyuki SUZUKI and Masami UENO

^{*1}Dept. Dependent and Optimum Design, Joining and Welding Research Institute
Mihogaoka 11-1, Ibaragi-shi, Osaka 567-0047, Japan

Received 10 November 2013

Abstract

The subloading surface model possesses the automatic controlling function to pull back the stress to the yield surface. However, this function is not concerned with the subyield state, i.e. the elastic to the plastic transitional state and thus the accurate solution cannot be obtained in the transitional state. Besides, the function is ineffective for large loading increments even in the yield state. In this article, the return-mapping in cutting-plane projection for the subloading surface model is formulated aiming at obtaining accurate solutions in a high efficiency in the whole loading state, i.e. the elastic-plastic transitional and the yield states. Then, the validity of the elastoplastic deformation analysis by the subloading surface analysis with the return-mapping and the consistent tangent modulus tensor is verified comparing with the analysis by the forward-Euler method.

Key Words : Consistent tangent modulus, Elastoplasticity, Metals, Return-mapping, Subloading surface model, Cyclic loading

1. 緒 言

下負荷面モデル (subloading surface model) (Hashiguchi, 1980, 1989) は, 純粋弾性域を仮定せず, 応力が降伏面に近づくにつれて塑性ひずみ速度が発達すると仮定され, また, 塑性状態においては常に応力が降伏面に近づくように適応条件に基づいて塑性ひずみ速度が定式化される. したがって, 弾性状態から塑性状態への滑らかな遷移を表現し得るとともに, 前進 Euler 法によっても降伏判定や降伏面への応力の引き戻しは必要でない. なお, 結晶のすべり系においても, せん断応力が分解せん断応力に漸近するにつれて, すべりが徐々に発達するので, 下負荷面の概念を導入することにより, 結晶の変形が合理的に表現されるとともに, その数値解析が飛躍的に改善されると考えられる (Hashiguchi, 2013). 本モデルに基づいて, 金属を対象に具体的な弾塑性構成式の定式化を行い, 実測値との比較により本構成式は, 金属の変形特性を高精度で表現し得ることが実証された (Hashiguchi, et

* 論文 No.13-00815 [DOI: 10.1299/transjsme.2014smm0083]

^{*1} 正員, 大阪大学接合科学研究所 (〒567-0047 大阪府茨木市美穂ヶ丘 11 番 1 号)

^{*2} 正員, 新日鐵住金(株) (〒293-8511 千葉県富津市新富 20-1)

^{*3} 琉球大学農学部農業工学科 (〒903-0213 沖縄県西原千原 1)

E-mail: khashi@kyudai.jp

al., 2012). なお, 下負荷面モデルにおいて降伏面と下負荷面の相似中心を固定した初期のモデルを対象に有限変形論の定式化がなされているが (Hashiguchi and Yamakawa, 2012), 本論文では, 相似中心が塑性変形とともに移動することにより繰返し負荷現象を表現し得る拡張下負荷面モデル (Hashiguchi, 1989) を採用する.

弾塑性構成式は, 速度 (増分) 形で与えられるので, 弾塑性変形の数値解析は, 微小な増分ステップで計算が実行される. 下負荷面モデルは, 応力を降伏面に引き戻す機能を具備している. しかし, その機能は降伏面に引き戻すもので, 下負荷面に引き戻す機能ではない. したがって, 下降伏状態つまり弾・塑性遷移状態においては, 前進 Euler 法によれば, 十分小さな増分ステップにより計算を行わざるを得ない. また, 降伏状態についても, 大きな増分ステップにおいては精度と収束性の低下を来し, さらには計算の破綻に至る場合が生じる. そこで, 本論文では, 下負荷面モデルを対象に, カッティングプレーン・プロジェクション (Simo and Ortiz, 1985) によるリターンマッピングの定式化を行うとともに, 数値微分により数値的に算出する整合接線係数テンソル (Simo, 1988; Miehe, 1996) を導入して, 単軸単調および繰返し負荷を対象に, 数段階の増分ステップにおける数値実験を行い, 前進 Euler 法による場合と比較し, 降伏状態のみならず弾・塑性遷移状態に亘って, 計算効率が向上することを示す. また, 第2報においては, 本報で定式化したリターンマッピングおよび整合接線係数テンソルを FEM プログラムに導入して, 切り欠き付き丸棒の繰返し捩じり, 管フランジ締結ボルトの繰返し変形等の数種の境界値問題の数値解析を行い, 高い収束性が得られることを検証する.

2. 下負荷面モデルの概要

本論文で用いる下負荷面モデルの基本式 (Hashiguchi, 1980, 1989; Hashiguchi, et al., 2012) を以下に要約して記しておく. なお, リターンマッピングにおいては, ひずみ増分入力後, ひずみを固定した状態で生じる塑性ひずみ増分を固定ひずみから差し引くことにより刻々の弾性ひずみを算定し, それから応力を算定する. したがって, 超弾性体または応力とひずみの一対一対応関係を有する Cauchy 弾性体を導入するので, 何らかのひずみを用いる必要が有る. 有限弾塑性変形論としての厳密な解析には, 乗算分解に基づく精緻な定式化 (例えば, (Hashiguchi and Yamakawa, 2012) 参照) が求められるが, ここでは, 例えば, Ohno-Wang モデル (Ohno and Wang, 1993) に対する陰解法 (Kobayashi, et al., 2002) や Yoshida-Uemori モデル (Yoshida and uemori, 2002) に対する陰解法 (Ghaei and Green, 2010) と同様に, 微小変形論を対象とすることとし, 微小ひずみを採用し, 時間微分には物質時間微分を採用する.

以上により, 変形測度として, $\mathbf{x}$ を物質粒子の位置ベクトル, $\mathbf{u}$ を変位ベクトルに基づく次の微小ひずみテンソルを用いる.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \quad (1)$$

また, ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は, 弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ に加算分解されると仮定する. すなわち,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2)$$

後述のリターンマッピングは超弾性体を前提とする. したがって, Cauchy 応力は, ひずみエネルギー関数 $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ により次式で与えられる.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)} \quad (3)$$

特に, ひずみエネルギー関数が

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + \mu \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^{e2} \quad (4)$$

で与えられる場合, 応力は, 次のように, 弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ に対して等方線形の Hooke 則で表される.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5)$$

ここに, λ および μ は Lamé 定数と呼ばれる. また, $\mathbf{I}$ は, Kronecker のデルタ δ_{ij} ($i=j$ のとき $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ のとき $\delta_{ij}=0$) を成分とする恒等テンソルである. 式(5)は平均部分と偏差部分に分けると

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2\mu \left[\frac{1}{3}(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^{e'} \right] \quad (6)$$

となり, 次のようにも表される.

$$\boldsymbol{\sigma} = K(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}^{e'} \quad (7)$$

ここに, $(\)'$ はテンソルの偏差部分を示す. K および G は, それぞれ体積弾性係数およびせん断弾性係数で, ヤング率 E およびポアソン比 ν により, 次式で表される.

$$K \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G \equiv \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8)$$

式(7)およびその逆関係, さらにこれらの速度式は, 弾性係数テンソル $\mathbf{E}$ を導入して, 次のように表される.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E} : \boldsymbol{\sigma}^{-1}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \quad (10)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} E_{ijkl} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ E_{ijkl}^{-1} &= -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

以上の弾性構成式は線形式であり, 弾塑性状態において, Cauchy 応力テンソルは, 次式で表される.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (12)$$

Fig. 1 Normal-yield, subloading and similarity-center surfaces.

さて、正規降伏面（幾何学的には従来の降伏面と同じであるが、内部は純粋弾性域ではない）は

$$f(\hat{\sigma}) = F(H) \quad (13)$$

により、また、下負荷面は次式で表される（図1参照）。

$$f(\bar{\sigma}) = RF(H) \quad (14)$$

ここに、

$$\hat{\sigma} \equiv \sigma - \alpha, \quad \bar{\sigma} \equiv \sigma - \bar{\alpha} \quad (15)$$

$$\bar{\alpha} \equiv s - R\hat{s} \quad (16)$$

$$\hat{s} \equiv s - \alpha \quad (17)$$

$\bar{\alpha}$ は、正規降伏面の中心である背応力 α に対する下負荷面内の共役点で、下負荷面の中心を示す。 s は正規降伏面と下負荷面の相似中心である。 F は、等方硬化変数 H の関数で等方硬化関数と呼ばれる。 R は正規降伏比つまり正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比である。

下負荷面式(14)を物質時間微分すれば、次式となる。

$$\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} - \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\alpha}} - \dot{R}F - R\dot{F} = 0 \quad (18)$$

ここに、式(16)より、次式が成り立つ。

$$\dot{\bar{\alpha}} = R\dot{\alpha} - \dot{R}\hat{s} + (1-R)\dot{s} \quad (19)$$

また、相似中心の発展則は次式で与えられる（Hashiguchi, et al., 2012）。

$$\dot{s} = c\|\dot{\varepsilon}^P\| \left[\frac{\tilde{\sigma}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{s} \right] + \frac{\dot{F}}{F} \hat{s} + \dot{\alpha} \quad (20)$$

ここに、

$$\tilde{\sigma} \equiv \sigma - s \quad (21)$$

c および χ は材料定数である。式(20)を式(19)に代入して、次式を得る。

$$\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha} + (1-R) \left\{ c\|\dot{\varepsilon}^P\| \left[\frac{\tilde{\sigma}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{s} \right] + \frac{\dot{F}}{F} \hat{s} \right\} - \dot{R}\hat{s} \quad (22)$$

さらに、正規降伏比 R の発展則は次式で与えられる。

$$\dot{R} = U(R)\|\dot{\varepsilon}^P\| \quad \text{for } \dot{\varepsilon}^P \neq 0 \quad (23)$$

ここに、関数 $U(R)$ の具体形として次式を仮定する。

$$U(R) = u \cot \left(\frac{\pi}{2} \frac{\langle R - R_e \rangle}{1 - R_e} \right) \quad (24)$$

ここに、 u は以下に具体形を示す材料関数であり、また、 R_e は、正規降伏比 R がそれに達するまでは $U \rightarrow \infty$ で、塑性変形が生じない閾値を示す材料定数である。 $\langle \rangle$ は、 $\langle s \rangle = (s + |s|)/2$ で定義される Macauley の括弧、つまり、 $s \geq 0$ に対して $\langle s \rangle = s$ 、 $s < 0$ に対して $\langle s \rangle = 0$ である。材料関数 u は次式で与えられる（Hashiguchi et al., 2012）。

$$u(\mathcal{H}_s, S_\sigma) = u_0 \exp(u_s \mathcal{H}_s S_\sigma) \quad (25)$$

ここに,

$$\mathcal{H}_s = f(\hat{s})/F(H) \quad (26)$$

$$S_\sigma \equiv \hat{n}_s : \frac{\tilde{\sigma}'}{\|\tilde{\sigma}'\|} \quad (-1 \leq S_\sigma \leq 1) \quad (27)$$

$$\hat{n}_s \equiv \frac{\partial f(\hat{s})}{\partial s} / \left\| \frac{\partial f(\hat{s})}{\partial s} \right\| \quad (\|\hat{n}_s\|=1) \quad (28)$$

u_0 および u_s は材料定数であるが, 前者は u の平均値に相当する.

さて, 式(18)に, 関数 $f(\bar{\sigma})$ は $\bar{\sigma}$ に関する 1 次の同次関数であるので, Euler の同次関数に関する定理に基づく

$$\frac{\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \bar{\sigma}}{f(\bar{\sigma})} = \frac{\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \bar{\sigma}}{RF} = 1 \quad (29)$$

を考慮すれば, 次式となる.

$$\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} - \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \left[\dot{\bar{\alpha}} + \left(\frac{\dot{F}}{F} + \frac{\dot{R}}{R} \right) \bar{\sigma} \right] = 0 \quad (30)$$

つまり,

$$\bar{N} : \dot{\bar{\sigma}} - \bar{N} : \left[\dot{\bar{\alpha}} + \left(\frac{\dot{F}}{F} + \frac{\dot{R}}{R} \right) \bar{\sigma} \right] = 0 \quad (31)$$

ここに,

$$\bar{N} \equiv \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} / \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right\| \quad (32)$$

式(22)を式(31)に代入して得られる

$$\bar{N} : \dot{\bar{\sigma}} - \bar{N} : \left(\dot{\bar{\alpha}} + (1-R) \left\{ c \|\dot{\varepsilon}^p\| \left[\frac{\tilde{\sigma}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{s} \right] + \frac{\dot{F}}{F} \hat{s} \right\} - \dot{R} \hat{s} + \left(\frac{\dot{F}}{F} + \frac{\dot{R}}{R} \right) \bar{\sigma} \right) = 0 \quad (33)$$

つまり,

$$\bar{N} : \dot{\bar{\sigma}} - \bar{N} : \left\{ \dot{\bar{\alpha}} + c(1-R) \|\dot{\varepsilon}^p\| \left[\frac{\tilde{\sigma}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{s} \right] + \frac{\dot{F}}{F} [\bar{\sigma} + (1-R)\hat{s}] + \frac{\dot{R}}{R} (\bar{\sigma} - R\hat{s}) \right\} = 0 \quad (34)$$

に, 式(15)~式(17)に基づく関係式

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} + (1-R)\hat{s} &= \sigma - \bar{\alpha} + s - \alpha - (s - \bar{\alpha}) = \hat{\sigma} \\ \bar{\sigma} - R\hat{s} &= \sigma - \bar{\alpha} - (s - \bar{\alpha}) = \tilde{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

を考慮し, また, 式(23)を代入すれば, 式(34)は次式となる.

$$\bar{N} : \dot{\bar{\sigma}} - \bar{N} : \left\{ \frac{\dot{F}}{F} \hat{\sigma} + \dot{\bar{\alpha}} + \frac{\dot{R}}{R} \tilde{\sigma} + c(1-R) \|\dot{\varepsilon}^p\| \left[\frac{\tilde{\sigma}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{s} \right] \right\} = 0 \quad (36)$$

式(36)に関連流動則

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \bar{N} \quad (\dot{\lambda} > 0) \quad (37)$$

および式(23)を代入すれば, 次式を得る.

$$\bar{N} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - M^p \dot{\bar{\lambda}} = 0 \quad (38)$$

ここに,

$$\bar{M}^p \equiv \bar{N} : \left\{ \frac{F'}{F} h \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{a} + U \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} + c(1-R) \left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\boldsymbol{s}} \right] \right\} \quad (39)$$

$$F' \equiv dF/dH \quad (40)$$

$$h(\bar{N}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \equiv \dot{H}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) / \dot{\bar{\lambda}}, \quad \boldsymbol{a} \equiv \dot{\boldsymbol{\alpha}} / \dot{\bar{\lambda}} \quad (41)$$

式(37)および式(38)より, 正値の比例係数 $\dot{\bar{\lambda}}$ および塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ は次式で与えられる.

$$\dot{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{N} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{M^p}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\bar{N} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{M^p} \bar{N} \quad (42)$$

式(2)に式(10)の弾性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ および式(42)の塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ を代入して, ひずみ速度は次式で与えられる.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\bar{N} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{M^p} \bar{N} \quad (43)$$

これより, ひずみ速度で表された関連流動則における正値の比例係数 $\dot{\bar{\lambda}}$ は次式で与えられる.

$$\dot{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{N} : \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{M^p + \bar{N} : \boldsymbol{E} : \bar{N}} \quad (44)$$

式(43)および式(44)より, 応力速度は次式で与えられる.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\bar{N} : \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{M^p + \bar{N} : \boldsymbol{E} : \bar{N}} \boldsymbol{E} : \bar{N} \quad (45)$$

負荷基準は次式で与えられる (Hashiguchi, 1994).

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \boldsymbol{0} : \dot{\bar{\lambda}} > 0 \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{0} : \text{otherwise} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

下負荷面モデルによれば, 前進 Euler 法においても, 現応力は常に負荷面の役割を有する下負荷面上に存在するので, 応力が降伏面上に有るか否かの降伏判定は不要で, 式(46)により, ひずみ速度の方向のみの判定を行えばよい. 一方, リターンマッピングにおいては, 後述の式(65)により, 応力が塑性変形とともに発展する下負荷面の外部に在るか否かの判定が求められる.

3. 金属の材料関数

Mises 降伏条件に基づく等方・移動硬化材料の負荷関数 $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$ および式(28)に含まれる相似中心面関数 $f(\hat{\boldsymbol{s}})$ は, 次式で与えられる (Hashiguchi, 2012).

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|, \quad \bar{N} = \bar{N}' = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \quad (47)$$

$$f(\hat{\mathbf{s}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\hat{\mathbf{s}}'\|, \quad \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\mathbf{s}}'}{\|\hat{\mathbf{s}}'\|} \quad (48)$$

また、相当塑性ひずみ ε^{EP} により硬化し、その増大とともに飽和状態に漸近する次の硬化関数を採用する (Hashiguchi, 1989).

$$\left. \begin{aligned} F(H) &= F_0 \{1 + h_1 [1 - \exp(-h_2 H)]\} \\ F' &= F_0 h_1 h_2 \exp(-h_2 H) \\ \dot{H} &= \dot{\varepsilon}^{EP} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}^p\|, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ここに、 h_1, h_2 は材料定数である.

移動硬化変数の発展則は、次式で与える (Armstrong and Frederick, 1966).

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{a} \|\dot{\varepsilon}^p\| = \dot{\lambda} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = a_\alpha \left(r_\alpha F \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|} - \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\alpha} \right) \quad (50)$$

ここに、 a_α および r_α は材料定数である.

式(47)~式(48)に対して、式(25)~式(28)の材料関数は、次のように表される.

$$\mathcal{H}_s = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}'\|}{F} \quad (51)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_s = \frac{\hat{\mathbf{s}}'}{\|\hat{\mathbf{s}}'\|} \quad (52)$$

$$S_\sigma \equiv \frac{\hat{\mathbf{s}}'}{\|\hat{\mathbf{s}}'\|} : \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \quad (53)$$

$$u = u_0 \exp \left(u_s \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}'\|}{F} \frac{\hat{\mathbf{s}}'}{\|\hat{\mathbf{s}}'\|} : \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \right) \quad (54)$$

式(47)および式(48)を式(20)および式(39)に代入して、相似中心の発展則および塑性係数は次のように表される.

$$\dot{\mathbf{s}} = \|\dot{\varepsilon}^p\| \left\{ c \left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right] + \mathbf{a} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F'}{F} \hat{\mathbf{s}} \right\} \quad (55)$$

$$\bar{M}^p \equiv \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|} : \left\{ \frac{F'}{F} h \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a} + U \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} + c(1-R) \left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right] \right\} \quad (56)$$

下負荷面関数式(47)に対して、正規降伏比 R は次のように与えられる. まず、式(14)に式(47)₁および式(16)を代入して拡張下負荷面は次のように表される.

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' + R \hat{\mathbf{s}}'\| = RF(H) \quad (57)$$

つまり、

$$\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' + R \hat{\mathbf{s}}')^2 = \frac{2}{3} R^2 F^2 \quad (58)$$

この2次方程式から R は解析的に次式で求められる.

$$R = \frac{\tilde{\sigma}' : \hat{s}' + \sqrt{(\tilde{\sigma}' : \hat{s}')^2 + \left(\frac{2}{3}F^2 - \|\hat{s}'\|^2\right)\|\tilde{\sigma}'\|^2}}{\frac{2}{3}F^2 - \|\hat{s}'\|^2} \quad (59)$$

4. リターンマッピング

下負荷面モデルは、常に応力を正規降伏面に引き付ける自動制御機能を有している。しかし、正規降伏面に至る前の下降伏状態はこの制御機能の対象外である。また、正規降伏状態においても、増分ステップを大きくすると計算精度が大きく低下する。したがって、何らかの数値計算の高度化が求められる。リターンマッピング (return-mapping) は弾塑性構成式に基づく数値計算の高度化に広く用いられているが、従来のリターンマッピング (Simo, 1988; Simo and Hughes, 1988) は、応力を正規降伏面に効率的に帰着させるもので、下降伏状態の下負荷面に帰着させるものではない。本章では、正規降伏状態のみならず下降伏状態に適用できるように、下負荷面モデルに拡張されたカッティングプレーン・プロジェクション (cutting-plane projection) (Simo and Ortiz, 1985) に基づくリターンマッピングを示す。なお、完全陰解法としてのクローゼストポイント・プロジェクション (closest-point projection) においては、構成式に含まれる諸材料関数の解析的微分式の導出作業が求められるが、カッティングプレーン・プロジェクションにおいてはその作業を回避できるので、多様な変形特性を表す数学的に精緻な構成式に対するリターンマッピングに有効であり、本論文では後者を採用する。クローゼストポイント・プロジェクションにおいては、陰的に仮定される増分後の降伏面（下負荷面モデルの場合は、下負荷面）の外向き法線に向かって最短距離で応力が低下するのに対して、カッティングプレーン・プロジェクションにおいては、下負荷面の Taylor 展開の一次近似によって得られる応力増分と内部変数の増分の線形関係で描かれる平面の現応力点における内向き法線方向に応力低下を生じる。なお、下負荷面モデルを対象とした陰解法については、山川他 (2010), Yamakawa, et al. (2010), 千田他 (2013) および橋口 (2011) により論じられている。しかし、前三者においては、乗算分解による有限変形論に基づく土の構成式を対象としているが、Yamakawa et al. (2010) および千田 (2013) は相似中心の移動を考慮しない初期下負荷面モデルを導入しており、また、山川ら (山川他, 2010) は拡張下負荷面モデルを導入しているが、移動硬化や回転硬化を考慮しない相似中心の移動則を用いている。また、橋口 (2011) は、整合接線係数は導入されておらず、また、応力境界条件を満たす厳密な収束計算は実現されていない。

さて、応力速度について次式が成り立つ。

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{elastic} + \dot{\sigma}^{plastic} \quad (60)$$

ここに、

$$\dot{\sigma}^{elastic} \equiv E : \dot{\varepsilon}^e, \quad \dot{\sigma}^{plastic} \equiv -E : \dot{\varepsilon}^p \quad (61)$$

なお、塑性緩和応力速度 $\dot{\sigma}^{plastic}$ は式(37)より次のように表し得る。

$$\dot{\sigma}^{plastic} = -E : \dot{\lambda} \bar{N} \quad (62)$$

さて、 n 回ひずみ増分 $\Delta \varepsilon$ を与えて、 n 段階における応力 σ_n 、塑性ひずみ ε_n^p 、等方硬化変数 H_n 、背応力 α_n 、相似中心 s_n および正規降伏比 R_n が既に計算されたとする。 $n+1$ 段階目の計算を行うに当たって、まず、剛性方程式を解いて得られる変位の境界条件を満たすひずみ増分 $\Delta \varepsilon$ を入力し、それにより弾性変形が生じるとして算定される弾性予測応力を σ_{n+1}^{trial} 、弾性ひずみを $\varepsilon_{n+1}^{trial}$ と記せば、次式が成り立つ。

$$\varepsilon_{n+1}^{trial} = \varepsilon_n^e + \Delta \varepsilon \quad (63)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E : \varepsilon_{n+1}^{trial} \quad (64)$$

ここで、 σ_{n+1}^{trial} が n 段階の下負荷面内に存在するか否かの判定を次式により行う。

$$\left. \begin{aligned} f(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \bar{\alpha}_n) - R_n F(H_n) \leq 0 \quad \text{or} \quad f(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \bar{\alpha}_n) - R_e F(H_n) \leq 0 : \Delta \varepsilon_{n+1}^p = \mathbf{0}, \sigma_{n+1}^{\text{Final}} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \\ \text{Otherwise} : \Delta \varepsilon_{n+1}^{p(1)} \neq \mathbf{0}, \sigma_{n+1}^{\text{Final}} \neq \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

本式の第1の弾性除荷の場合には、試行応力は n 段階の計算終了時点の下負荷面の内部に留どまることになり、入力ひずみ速度を弾性ひずみ速度として計算したことに矛盾は無かったといえるので、 $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$ を $n+1$ 段階の正解応力として次の計算段階に移る。なお、そのときの正規降伏比 R_n を式(59)により算定しておく。第2の場合、塑性変形過程として、応力、内部変数を更新する必要がある。このような計算を次の下負荷面式が満たされるまで繰り返す。

$$f(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k+1)}) - R_{n+1}^{(k+1)} F(H_{n+1}^{(k+1)}) = 0 \quad (66)$$

ここに、 k は反復収束計算の繰り返し回数を示す。

以下では、繰り返し計算において算定すべき塑性ひずみについて考えよう。そこで、下負荷面式に基づく次の関数を導入しよう。

$$g(\bar{\sigma}, R, F) \equiv f(\bar{\sigma}) - RF \quad (67)$$

本式に対して Taylor 展開を行い、第1微分のみを取れば、次式となる。

$$\begin{aligned} g(\bar{\sigma} + d\bar{\sigma}, R + dR, F + dF) \\ = g(\bar{\sigma}, R, F) + \frac{\partial g(\bar{\sigma}, R, F)}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} + \frac{\partial g(\bar{\sigma}, R, F)}{\partial R} dR + \frac{\partial g(\bar{\sigma}, R, F)}{\partial F} dF \\ = f(\bar{\sigma}) - RF + \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} - \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\alpha} - FdR - RdF \end{aligned} \quad (68)$$

もし、すでに、下負荷面式 $f(\bar{\sigma}) - RF = 0$ が満たされている場合、式(68)は次式になる。

$$\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} - \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\alpha} - dRF - RdF = \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right\| (\bar{N} : d\bar{\sigma} - d\bar{\lambda} \bar{M}^p) \quad (69)$$

式(69)をゼロとおいた式は下負荷面の時間微分式の増分形に他ならない。式(69)に、リターンマッピング過程においては、弾性ひずみであるひずみを固定して、応力を低下させることに基づく $d\bar{\sigma} = d\bar{\sigma}^{\text{plastic}}$ とみなして、式(62)を代入すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} - \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\alpha} - dRF - RdF = - \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right\| d\bar{\lambda} (\bar{N} : \mathbf{E} : \bar{N} + \bar{M}^p) \quad (70)$$

Taylor 展開式(68)の増分項に式(70)を代入して、ゼロとおけば、次式を得る。

$$f(\bar{\sigma}) - RF - \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right\| d\bar{\lambda} (\bar{N} : \mathbf{E} : \bar{N} + \bar{M}^p) = 0 \quad (71)$$

これより、正值の比例係数および塑性ひずみ増分は次の諸式で与えられる。

$$d\bar{\lambda} = \frac{f(\bar{\sigma}) - RF}{\left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right\| (\bar{M}^p + \bar{N} : \mathbf{E} : \bar{N})}, \quad d\varepsilon^p = \frac{f(\bar{\sigma}) - RF}{\left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right\| (\bar{M}^p + \bar{N} : \mathbf{E} : \bar{N})} \bar{N} \quad (72)$$

式(72)は、超過応力 $f(\bar{\sigma}) - RF$ が残留している状態で、応力が下負荷面まで下降するために生じるべき塑性ひずみ増分を示している。

式(72)に基づいて、 k 回目の計算で得られた応力、内部変数値から $k+1$ 回目の塑性ひずみ増分は、次式によって計算し得る。

$$d\Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \frac{f(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)}) - R_{n+1}^{(k)} F_{n+1}^{(k)}}{\left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}^{(k)}} \right\| (\bar{M}_{n+1}^{p(k)} + \bar{N}_{n+1}^{(k)} : E : \bar{N}_{n+1}^{(k)})}, \quad d\Delta\epsilon_{n+1}^{p(k)} = d\Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} \bar{N}_{n+1}^{(k)} \quad (73)$$

ここに、 k 回目の計算において得られる増分を $d(\quad)$ 、また、これらを n 段階において集積して算定される増分を $\Delta(\quad)$ で示している。

なお、式(47)の Mises 則に対して、下負荷面式(14)および式(73)は、具体的に次の諸式で表される。

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{\sigma}_{n+1}'^{(k+1)}\| - R_{n+1}^{(k+1)} F(H_{n+1}^{(k+1)}) = 0 \quad (74)$$

$$d\Delta\bar{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} = \frac{\|\bar{\sigma}_{n+1}'^{(k)}\| - \sqrt{2/3} R_{n+1}^{(k)} F_{n+1}^{(k)}}{\bar{M}_{n+1}^{p(k)} + 2G}, \quad d\Delta\epsilon_{n+1}^{p(k+1)} = d\Delta\bar{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} \bar{N}_{n+1}^{(k)} \quad (75)$$

$$\bar{N}_{n+1}^{(k)} = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}'^{(k)}}{\|\bar{\sigma}_{n+1}'^{(k)}\|} \quad (76)$$

ここに、塑性係数 $\bar{M}_{n+1}^{p(k)}$ は次式で与えられる。

$$\bar{M}_{n+1}^{p(k)} \equiv \bar{N}_{n+1}^{(k)} : \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F_{n+1}'^{(k)}}{F_{n+1}^{(k)}} \hat{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + U_{n+1}^{(k)} \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{R_{n+1}^{(k)}} + c(1 - R_{n+1}^{(k)}) \left[\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{R_{n+1}^{(k)}} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{s}_{n+1}^{(k)} \right] \right\} \quad (77)$$

本式に含まれる諸変数は、以下の諸式により更新される。

$$\mathbf{a}_{n+1}^{(k)} = a_\alpha (r_\alpha F_{n+1}^{(k)} \bar{N}_{n+1}^{(k)} - \sqrt{2/3} \alpha_{n+1}^{(k)}) \quad (78)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k)} - s_{n+1}^{(k)}, \quad \hat{s}_{n+1}^{(k)} = s_{n+1}^{(k)} - \alpha_{n+1}^{(k)} \quad (79)$$

$$\bar{\alpha}_{n+1}^{(k)} = s_{n+1}^{(k)} - R_{n+1}^{(k)} \hat{s}_{n+1}^{(k)}, \quad \bar{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k)} - \bar{\alpha}_{n+1}^{(k)} \quad (80)$$

$$u_{n+1}^{(k)} = u_0 \exp \left(u_s \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{s}_{n+1}'^{(k)}}{F_{n+1}^{(k)}} : \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}'^{(k)}}{\|\tilde{\sigma}_{n+1}'^{(k)}\|} \right) \quad (81)$$

$$U_{n+1}^{(k)} = u_{n+1}^{(k)} \cot \left(\frac{\pi}{2} \frac{\langle R_{n+1}^{(k)} - R_e \rangle}{1 - R_e} \right) \quad (82)$$

$$R_{n+1}^{(k)} = \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} : \hat{s}_{n+1}^{(k)} + \sqrt{(\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} : \hat{s}_{n+1}^{(k)})^2 + \left(\frac{2}{3} F_{n+1}^{(k)2} - \|\hat{s}_{n+1}^{(k)}\|^2 \right) \|\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)}\|^2}}{\frac{2}{3} F_{n+1}^{(k)2} - \|\hat{s}_{n+1}^{(k)}\|^2} \quad (83)$$

特に、塑性ひずみ増分に直接依存する変数は、式(75)および式(76)により、塑性ひずみ速度を算定した後、以下の諸式により更新される。

$$H_{n+1}^{(k+1)} = H_{n+1}^{(k)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\Delta\epsilon_{n+1}^{p(k+1)}\| \quad (84)$$

$$F_{n+1}^{(k+1)} = F_0 \{1 + h_1 [1 - \exp(-h_2 H_{n+1}^{(k+1)})]\} \quad (85)$$

$$F'^{(k+1)}_{n+1} = F_0 h_1 h_2 \exp(-h_2 H^{(k+1)}_{n+1}) \quad (86)$$

$$\alpha^{(k+1)}_{n+1} = \alpha^{(k)}_{n+1} + a^{(k)}_{n+1} \|d\Delta \epsilon^{p(k)}_{n+1}\| \quad (87)$$

$$s^{(k+1)}_{n+1} = s^{(k)}_{n+1} + \left\{ c \left[\frac{\tilde{\sigma}^{(k)}_{n+1}}{R^{(k)}_{n+1}} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{s}^{(k)}_{n+1} \right] + a^{(k)}_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F'^{(k)}_{n+1}}{F^{(k)}_{n+1}} \hat{s}^{(k)}_{n+1} \right\} \|d\Delta \epsilon^{p(k+1)}_{n+1}\| \quad (88)$$

$$R^{(k+1)}_{n+1} = R^{(k)}_{n+1} + U^{(k)}_{n+1} \|d\Delta \epsilon^{p(k)}_{n+1}\| \quad (89)$$

また, 塑性ひずみを

$$\epsilon^{p(k+1)}_{n+1} = \epsilon^{p(k)}_{n+1} + d\Delta \epsilon^{p(k+1)}_{n+1} \quad (90)$$

により更新し, これを式(12)に用いて, 次式により応力を更新する.

$$\sigma^{(k+1)}_{n+1} = E : \epsilon^{e(k+1)}_{n+1} = E : (\epsilon^{(k+1)}_{n+1} - \epsilon^{p(k+1)}_{n+1}) \quad (91)$$

なお, 帰着させるべき目標である下負荷面についての正規降伏比は塑性ひずみ速度により発展するので, 塑性ひずみ速度式(75)の分子における不平衡量に含まれる正規降伏比に対しては塑性ひずみ速度についての集積式(89)を用いるが, $\tilde{\sigma}^{(k)}_{n+1}/R^{(k)}_{n+1}$ における正規降伏比 $R^{(k)}_{n+1}$ は, 応力と連動するので, 現応力点を通る下負荷面式を解いて得られる式(83)が用いられる. なお, 塑性ひずみの集積により算定される正規降伏比の記号 R と現応力点を通る下負荷面式を解いて得られる正規降伏比を区別するため, 後者に対して記号 $\bar{R}$ を用いている.

5. 整合接線係数

前章で述べたリターンマッピングにより, 各要素内の積分点における応力更新が高効率に実行される. しかし, リターンマッピングにおいては, ひずみを固定して塑性修正計算を行うので, 通常, 塑性修正過程終了 (応力が降伏面に帰着) 時点で, 境界値問題の解析における釣合い条件は満たされない. そこで, 次の手順で, 釣合い条件を満たす高効率な計算法を導入する.

1. 応力不釣合い量を打ち消すため, 塑性修正過程の終了時にリターンマッピングに整合した陰的な接線係数テンソル, つまり, 整合接線係数テンソル (consistent (or algorithmic) tangent modulus) を計算する. これにより, 降伏条件に加えて, 釣合い条件を満たす計算を高効率で実行し得る.
2. 整合接線係数テンソルを用いて, 応力不釣合い量を打ち消すための補正すべきひずみ増分を求める.
3. ひずみ, 内部変数値等を全て, n 段階の計算終了時点に戻して, 直前のリターンマッピング計算において入力されたひずみ増分に補正ひずみ増分を加えたものを入力して, リターンマッピングをやり直す.
4. このようなリターンマッピングを繰返して, 降伏条件および釣合い条件が所定の誤差内で満たされる解が得られたら, $n+1$ 段階の計算を終了して, $n+2$ 段階の計算に移る.

整合接線係数の求め方には, 解析的な方法と数値的な方法があるが, 本稿では, 汎用性の高い数値的手法 (Miehe, 1996) を採用する. 以下に, その骨子を記す.

リターンマッピングにより, $n+1$ 段階においてひずみ増分 $\Delta \epsilon$ の入力に対する応力 $\sigma_{n+1}(\epsilon_n + \Delta \epsilon_{n+1}, \epsilon_n^p, H_n)$ を得たとする. そこでさらに, 摂動ひずみ増分 $\epsilon \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s$ ($\epsilon \ll \|\Delta \epsilon\|$) を加えたひずみ増分 $\Delta \epsilon_{n+1} + \epsilon \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s$ を入力して, 再びリターンマッピングを行って, $n+1$ 段階における新たな応力 $\sigma_{n+1}(\epsilon_n + \Delta \epsilon_{n+1} + \epsilon \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s, \epsilon_n^p, H_n)$ を計算する. その際, 全ての内部変数をステップ n の終了時の状態に戻して, 計算を開始する. これらにより, 整合接線係数 $K_{n+1}^{ep, \text{algo}}$ は, 次式で与えられる.

$$K_{n+1}^{ep, \text{algo}} = \frac{\partial(\sigma_{n+1}(\epsilon_n + \Delta \epsilon_{n+1} + \epsilon \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s, \epsilon_n^p, H_n) - \sigma_{n+1}(\epsilon_n + \Delta \epsilon_{n+1}, \epsilon_n^p, H_n))}{\partial(\epsilon \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s)} \quad (\text{no sum})$$

$$(\mathbf{K}_{n+1}^{ep, algo})_{ijkl} = \frac{\sigma_{n+1ij}(\boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \varepsilon \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \mathbf{H}_n) - \sigma_{n+1ij}(\boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \mathbf{H}_n)}{\varepsilon} \quad (92)$$

ここに、 $\mathbf{H}_n$ は n 段階終了時のスカラーおよびテンソルの内部変数をまとめて示している。また、4 階テンソル $(\mathbf{K}_{n+1}^{ep, algo})_{ijkl}$ の $6 \times 6 = 36$ 個の成分は、式(92)において、 $(k, l) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ の各々について、他の摂動ひずみ増分成分はゼロとして、計 6 回の計算を実行して得られる。なお、摂動ひずみは、通常、 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6} \sim 1.0 \times 10^{-8}$ に取られる。

有限要素解析においては、各要素において式(92)により得られる整合接線係数に基づいて、全体剛性マトリクスを求め、これにより、解析対象全域において、所定の誤差内で下負荷面式および釣合い条件を満たす解を求める。

4～5 章に述べたリターンマッピングおよび整合接線係数に基づく数値計算手順を表 1 に示す。

Table 1 Implicit elastoplastic deformation calculation procedure

1. Set incremental load or displacement. 2. Compute element tangent stiffness matrices from consistent tangent tensor calculated in step 7 (2). 3. Compute global tangent stiffness matrix by assembling element tangent stiffness matrices. 4. Solve linearized equilibrium equation for displacement corrector. 5. Apply Newton correction to displacements. 6. Compute strain increment at material points. 7. Update stresses and other state variables and consistent tangent tensor by using return-mapping algorithm   (1) Return-mapping to update stress and internal variables   i) Input strain increment $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ ii) Elastic trial step: Calculate trial stress by $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e trial} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$ iii) Check subloading condition by Eq. (65). If $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ stays inside subloading surface in the step n, it is adopted as final stress in step $n+1$ and we move to the procedure 7 (2). If not, we move to the step iv). iv) Plastic corrector step: Calculate plastic strain increment by Eq. (73), and update stress and internal variables by Eqs. (77)~(91). Calculations are repeated until Eq. (66) is satisfied, stress reaching subloading surface. (2) Calculate consistent tangent tensor by Eq. (92) through calculations for six directions (k, l) with inputs of last strain increments plus perturbation increments, i.e. $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \varepsilon \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$. 8. Compute element internal force vectors based on updated stresses 9. Compute global internal force vector by assembling element internal force vectors and update residual 10. Check convergence

6. 数値実験

2～3章に述べた下負荷面モデルによる金属の弾塑性構成式に、4～5章に述べたリターンマッピングおよび整合接線係数を適用した数値解析の有効性を検証するため、陰解法有限要素法プログラムABAQUS/Standard (Hibbit et al., 2001) にUser subroutine UMATを用いて実装し、多自由度非線形問題における収束性の検討を行った。

一要素（独立自由度は、軸方向変位と側方変位の計3自由度）モデルの単軸負荷状態における単調および繰返し負荷現象を対象に、数値計算の収束精度・速度を、増分形構成式(45)に微小ひずみ増分を与えて、収束計算無しに逐次算定する前進Euler法による数値計算と比較して示す。なお、Euler法においては、正規降伏状態に応力を引き付ける下負荷面モデルの応力制御機能が作用するので、応力を降伏面に引き戻すための操作は用いていない。

数値実験で用いた材料パラメータ値は次の通りである。これらは鋼材に用いられる平均的な値 (Hashiguchi, et al., 2012) である。

材料定数：

弾性定数： $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$,

硬化 等方： $h_1 = 0.5$, $h_2 = 100$,

移動： $\alpha_a = 50$, $r_a = 0.3$,

正規降伏面の発展： $R_e = 0.3$, $\bar{u} = 200$, $u_s = 3$,

相似中心の移動： $c = 200$, $\chi = 0.8$,

初期値：

等方硬化関数： $F_0 = 1000 \text{ MPa}$

軸ひずみ増分：

単調負荷：

リターンマッピング：0.01, 0.10, 0.50, 1.00, 2.50, 5.00 %,

前進Euler法：0.01, 0.05, 0.10, 0.50 %

繰返し負荷

リターンマッピング：0.01, 0.10, 0.50, 1.00 %,

前進Euler法：0.01, 0.10, 0.20, 0.50 %

なお、極めて微小な軸ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_a = 0.0005\%$ により前進Euler法で算定される計算曲線に対する収束状態を検証する。

まず、単調引張負荷におけるリターンマッピング・整合接線係数法および前進Euler法による軸応力-軸ひずみ関係および側方ひずみ-軸ひずみ関係の計算結果を示すそれぞれ図2および図3に示す。なお、上記の微小なひずみ増分による計算結果を実線で示している。リターンマッピング、整合接線係数を用いる場合には、極めて大きなひずみ増分5%を入力した場合においても、高精度な計算がなされている。図2に、各計算ステップにおける応力の収束状況が示されているが、いずれも3回以内の塑性緩和計算で収束に至ることがわかる。図2には、塑性修正過程 (plastic corrector step) における応力の変化を楕円点で示している。一方、前進オイラー法によれば、降伏状態近傍で応力が振動し、応力を降伏面に引き戻す下負荷モデルの応力制御機能が作用している状況が示されているが、0.1%増分になると計算値が僅かながら振動し、0.5%増分では計算が完全に大きな誤差が発生していることが示されている。

つぎに、一般単軸負荷後の繰返し負荷特性を分かり易く表示するため、3%まで単軸引張を与えた後、1～3%の間で繰返し負荷を与えた場合におけるリターンマッピング・整合接線係数法および前進Euler法による計算結果を図4および図5に示す。前進Euler法によれば、応力を降伏面に引き戻す下負荷モデルの応力制御機能が作用するが、0.2%増分になると計算値がわずかに振動し、0.5%増分では計算が破綻することが示されている。一方、リターンマッピング・整合接線係数を用いる場合には、大きなひずみ増分1.0%を入力した場合にも、高精度な計算がなされている。

Fig. 2 Numerical calculations for monotonic uniaxial loading behavior by return-mapping with consistent tangent modulus for six levels of axial strain increments.

Fig. 3 Numerical calculations for monotonic uniaxial loading behavior by forward-Euler method.

(a) Axial strain vs. axial stress relation

(b) Axial strain vs. lateral strain relation

Fig. 4 Numerical calculation for cyclic uniaxial loading behavior by return-mapping with consistent tangent modulus.

(a) Axial strain vs. axial stress relation

(b) Axial strain vs. lateral strain relation

Fig. 5 Numerical calculation for cyclic uniaxial loading behavior by forward-Euler method.

7. 結 言

下負荷面モデルを対象にリターンマッピングの定式化を行った．ここに示したリターンマッピングの定式化はカッティングプレーン・プロジェクション (Simo and Ortiz, 1985) に基づくものである．完全陰解法のクローゼストポイント・プロジェクション (Simo, 1988; Simo and Hughes, 1988; de Souza, et al., 2008) に比して，収束速度は多少劣るが，5章の諸式に見られるように，降伏関数の2次偏微分による Hessian matrix 等の解析演算が不要で定式化が簡明である．また，単軸負荷状態の単調負荷および繰返し負荷を対象に，前進オイラー法による場合との比較により，本文で定式化したリターンマッピング，整合接線係数による計算速度・精度の検証を行った．その結果，下負荷面モデルの応力制御機能にもかかわらず，前者に比して後者によれば，大きなひずみ増分でも高精度な計算が可能であることが示された．第2報においては，本報に定式化したリターンマッピングおよび整合接線係数テンソルの FEM プログラムへの導入による境界値問題の数値解析法を論じるとともに，数種の境界値問題の解析結果について報告する．

なお，現在のリターンマッピングには，次の基本的制約が存在する．

- 1) 非線形負荷経路においては，その程度に応じて増分ステップを小さく取らざるを得ない，
- 2) 降伏面に応力を引き戻すと同時に，非硬化領域面に塑性ひずみ (Yoshida and Uemori (2003) モデルの場合には，背応力) を引き戻すことは難しい．したがって，他の繰返し塑性モデルに対するリターンマッピング (Ohno and Wang (1993) モデルに対する論文 (Kobayashi, et al., 2002), Yoshida and Uemori (2002) モデルに対する論文 (Ghaei and Green, 2010) を参照) と同様に，非硬化領域の概念は，本研究においても導入していない，
- 3) 接線非弾性ひずみ速度 (Hashiguchi, et al., 2012) に対しては機能しない．

これらは，今後，鋭意，解決に向けて研究に取り組まねばならない基本的課題である．なお，これらを伴う負荷現象の解析には，滑らか条件 (Hashiguchi, 1993) を満たすことにより応力および塑性ひずみの自動引き戻し機能を構成特性として内包する下負荷面モデルによれば，特別な計算制御プログラムを付加することなく Euler 前進法により，移動硬化の概念に基づく他の繰返しモデルに比して大きな増分入力により対応し得る．したがって，現時点では，これらを伴う一般負荷現象の解析に対しては，リターンマッピングによらない下負荷面モデルが有力であることが指摘される．

なお，正規降伏面と下負荷面の相似中心を固定した初期下負荷面モデルおよび本モデルについてのリターンマッピングについては，Hashiguchi and Yamakawa (2012) により，有限変形論に拡張されている．また，塑性変形とともに相似中心が移動する拡張下負荷面モデルは，Hashiguchi and Yamakawa (2013) により，金属を対象に有限変形論に拡張されている．今後，本論に基づくリターンマッピングの開発が求められる．

謝 辞

数値解析法全般に亘って，東北大学工学部・山川優樹准教授により多くの貴重な助言を賜った．さらに，本稿の記述の改善に向けて多くの有益な指摘を頂戴した．ここに，付記して，心より謝意を表する次第である．

文 献

- ABAQUS-Standard User's Manual, Version 6.2. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. (2001).
- Armstrong, P.J. and Frederick, C.O., A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, G.E.G.B. Report RD/B/N 731 (1966).
- 千田大, 山川優樹, 橋口公一, 池田清宏, 塑性変形勾配テンソルの乗算分解による有限変形・異方性回転硬化下負荷面 Cam-clay モデル, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 69, No. 2 (2013), pp.I_255-I_266.
- Ghaei, A. and Green, D.E., Numerical implementation of Yoshida-Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme, Computational Materials Science, Vol.48 (2010), pp.195-205.
- Hashiguchi, K., Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol.47 (1980), pp.266-272.

- Hashiguchi, K., Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.25 (1989), pp.917-945.
- Hashiguchi, K., Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *International Journal of Plasticity*, Vol. 9 (1993), pp.721-748.
- Hashiguchi, K., Loading criterion, *International Journal of Plasticity*, Vol. 8 (1994), pp.871-878.
- 橋口公一, 詳説・弾塑性力学 (50) 金属の弾塑性構成式およびリターンマッピング: その 2, *機械の研究*, Vol.63 (2011), 養賢堂, pp.674-678.
- Hashiguchi, K., General description of elastoplastic deformation/sliding phenomena of solids in high accuracy and numerical efficiency: Subloading Surface Concept, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 20 (2013), pp.361-417.
- Hashiguchi, K., Ueno, M. and Ozaki, T. (2012): Elastoplastic model of metals with smooth elastic-plastic transition, *Acta Mechanica*, Vol.223 (2012), pp.985-1013.
- Hashiguchi, K. and Yamakawa, Y., *Introduction to Finite Strain Theory in Continuum Elasto-plasticity*, John-Wiley (2012).
- Hashiguchi, K. and Yamakawa, Y., Finite strain elastoplastic constitutive equation based on subloading surface model, *Proceeding of 62nd National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, OS21-10 (2013).
- Kobayashi, M., Mukai, M., Takahashi, H., Ohno, N., Kawakami, T. and Ishikawa, T., Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.53 (2002), pp.2217-2238.
- Miehe, C., Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.134 (1996), pp.223-240.
- Ohno, N. and Wang, J.D., Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Parts I: Formulation and basic features for ratcheting behavior. Part II: Application to experiments of ratcheting behavior, *International Journal of Plasticity*, Vol.9 (1993), pp.375-403.
- Simo, J.C. and Ortiz, M., A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.49 (1985), pp.221-245.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R., *Computational Inelasticity*, Springer (1998).
- Simo, J.C. (1998): In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (eds.) *Numerical analysis and simulation of plasticity*, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol.6, Part 3, Elsevier (1998).
- de Souza, E.N., Peric, D. and Owen, D.J.R., *Computational Methods for Plasticity*, John Wiley and Sons (2008).
- Yamakawa, Y., Hashiguchi, K., Ikeda, K., Implicit stress-update algorithm for isotropic Cam-clay model based on the subloading surface concept at finite strains, *International Journal of Plasticity*, Vol. 26 (2010), pp.634-658.
- 山川優樹, 山口洋介, 橋口公一, 池田清宏, 拡張下負荷面 Cam-clay モデルの有限変形理論に基づく定式化とリターンマッピングを用いた拡張下負荷面 Cam-clay モデルの有限変形理論に基づく定式化とリターンマッピングを用いた陰的応力更新法, *応用力学論文集*, Vol.13 (2010), pp.1-12.
- Yoshida, F. and Uemori, T., Elastic-plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension-compression at large strain, *International Journal of Plasticity*, Vol.18 (2002), pp.633-659.

References

- ABAQUS-Standard User's Manual, Version 6.2. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. (2001).
- Armstrong, P.J. and Frederick, C.O., A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, G.E.G.B. Report RD/B/N 731 (1966).
- Chida, Y., Yamakawa, Y., Hashiguchi, K. and Ikeda, K., Subloading surface Cam-clay model with anisotropic rotational hardening for finite strains based on multiplicative decomposition of plastic deformation gradient tensor, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Series A2 (Applied Mechanics)*, Vol. 69, No. 2 (2013), pp.I_255-I_266 (in Japanese).

- Ghaei, A. and Green, D.E., Numerical implementation of Yoshida–Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme, *Computational Materials Science*, Vol.48 (2010), pp.195-205.
- Hashiguchi, K., Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, Vol.47 (1980), pp.266-272.
- Hashiguchi, K., Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.25 (1989), pp.917-945.
- Hashiguchi, K., Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *International Journal of Plasticity*, Vol. 9 (1993), pp.721-748.
- Hashiguchi, K., Loading criterion, *International Journal of Plasticity*, Vol. 8 (1994), pp.871-878.
- Hashiguchi, K., Monograph on Elastoplasticity (50): Elastoplastic constitutive equation and return-mapping for metals, *Science of Machine*, Vol.63 (2011), Yokendo, Ltd., pp.674-678 (in Japanese).
- Hashiguchi, K., General description of elastoplastic deformation/sliding phenomena of solids in high accuracy and numerical efficiency: Subloading Surface Concept, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 20 (2013), pp.361-417.
- Hashiguchi, K., Ueno, M. and Ozaki, T. (2012): Elastoplastic model of metals with smooth elastic-plastic transition, *Acta Mechanica*, Vol.223 (2012), pp.985-1013.
- Hashiguchi, K. and Yamakawa, Y., *Introduction to Finite Strain Theory in Continuum Elasto-plasticity*, John-Wiley (2012).
- Hashiguchi, K. and Yamakawa, Y., Finite strain elastoplastic constitutive equation based on subloading surface model, *Proceeding of 62nd National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, OS21-10 (2013).
- Kobayashi, M., Mukai, M., Takahashi, H., Ohno, N., Kawakami, T. and Ishikawa, T., Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.53 (2002), pp.2217–2238.
- Miehe, C., Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.134 (1996), pp.223–240.
- Ohno, N. and Wang, J.D., Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Parts I: Formulation and basic features for ratcheting behavior. Part II: Application to experiments of ratcheting behavior, *International Journal of Plasticity*, Vol.9 (1993), pp.375–403.
- Simo, J.C. and Ortiz, M., A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.49 (1985), pp.221-245.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R., *Computational Inelasticity*, Springer (1998).
- Simo, J.C. (1998): In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (eds.) *Numerical analysis and simulation of plasticity*, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol.6, Part 3, Elsevier (1998).
- de Souza, E.N., Peric, D. and Owen, D.J.R., *Computational Methods for Plasticity*, John Wiley and Sons (2008).
- Yamakawa, Y., Hashiguchi, K., Ikeda, K., Implicit stress-update algorithm for isotropic Cam-clay model based on the subloading surface concept at finite strains, *International Journal of Plasticity*, Vol. 26 (2010), pp.634-658.
- Yamakawa, Y., Yamaguchi, Y., Hashiguchi, K. and Ikeda, K., Formulation and implicit stress-update algorithm of the extended subloading surface Cam-clay model with kinematic hardening for finite strains, *Journal of Applied Mechanics (JSCE)*, vol.13 (2010), pp.1-12 (in Japanese).
- Yoshida, F. and Uemori, T., Elastic-plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension-compression at large strain, *International Journal of Plasticity*, Vol.18 (2002), pp.633-659.