内部流れを対象とした流出流量比を考慮可能な
レベルセット法に基づくトポロジー最適化久保 世志^{*1}, 矢地 謙太郎^{*2}, 山田 崇恭^{*2}, 泉井 一浩^{*2}, 西脇 眞二^{*3}Level set-based topology optimization of steady state incompressible viscous flows under
outflow rate inequality constraintSeiji KUBO^{*1}, Kentaro YAJI^{*2}, Takayuki YAMADA^{*2}, Kazuhiro IZUI^{*2} and Shinji NISHIWAKI^{*3}^{*1} Numerical Engineering Department, R&D Technology Center, IHI Corporation

1, Shin-Nakahara-cho, Isogo-ku, Yokohama, 235-8501, Japan

^{*2, *3} Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Kyotodaigaku-katsura C3, Nishikyo-ku, Kyoto, 615-8540, Japan

Received 29 January 2014

Abstract

Historically, fluidic devices such as switches, amplifiers, and oscillators, have an advantage, compared with electronic devices, in terms of maintenance-free operation and operating life. Therefore, prior to the great progress in electronic technologies that has occurred during the past several decades, the structure and function of fluidic devices were the subject of extensive research. In particular, the structures of these fluidic devices are often composed of complicated flow channel layouts. Recently, fluidic devices are again attracting significant attention, stimulated by progress in the development of MEMS technologies. In this study, to develop an energy-efficient structure for a MEMS-scale fluidic device, we apply a topology optimization method to an optimal design problem for a steady state incompressible viscous flow field. We use a level set-based topology optimization method incorporating the concept of the phase field method for the topology optimization so that clear boundaries between the solid and fluid domains are expressed in the optimal configurations. To define the topology optimization problem for a fluid regime, the expressions of the primary and adjoint problems are formulated concretely, to minimize viscous energy dissipation. Moreover, to ensure the intended design outflow rate at a designated outlet, the optimization problem includes an outflow rate inequality constraint in this paper. Following the concept of the standard adjoint variable method, a stable optimization process that satisfies the outflow rate inequality constraint is achieved. Two numerical examples, one for two-terminal and the other for multi-terminal flow, are provided to demonstrate the usefulness of the proposed level set-based topology optimization method.

Key words : Level set method, Topology optimization, Navier-stokes equations, Fluidic device, Outflow rate inequality constraint

1. 緒 言

機械的な作動部品を使用せずに、流体の有する特性を利用して流体の流れを切換えたり、制御したりする流体機械は、一般に流体素子と呼ばれる。これまでに、スイッチング、発振、増幅など様々な制御機能を持つ流体素子が提案され、これらを組み合わせる事により、電気回路と同様の理論回路を流体素子を用いた制御システムによって

No. 14-00051 [DOI: 10.1299/transjsme.2014dsm0213]

^{*1} 正員, (株)IHI 技術開発本部 R&D テクノセンター解析技術部 (〒235-8501 神奈川県横浜市磯子区新中原町1番地)^{*2} 正員, 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻 (〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)^{*3} 正員, フェロー, 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻

E-mail of corresponding author: seiji.kubo@ihi.co.jp

実現可能である事が示されている(尾崎他, 1974). 流体素子には機械的作動部が無い事から, メンテナンスフリー, 長寿命, 低コストなどの利点があるが, 電気回路の代替として利用するには, 通常の電気素子と比較して小型化, 集積化に関する課題があり, 流体素子の利用価値は低いと考えられてきた. しかしながら, 近年の MEMS 分野の発展による小型化, 集積化技術の進歩によって, 流体素子をマイクロマシンやマイクロ化学プラント技術へ応用する研究, 開発が活発になってきている (Jensen, 1999; DeWitt, 1999; Stone, et al., 2004).

このような背景から, 流体素子を応用した制御機器がいくつか提案されているが, 多くの場合, 流体素子の制御機能の発現や製品への応用技術へ重点が置かれ, 流体素子の構造そのものは, 過去に提案された構造の流用である場合が多く, 必ずしも高性能な構造設計案を得るには至っていない.

このような問題を解決し, 高性能な構造設計案を得る方法として, 構造最適化の適用が考えられる. 特に, トポロジー最適化 (Bendsøe and Kikuchi, 1988) は, 力学的, 数学的根拠に基づき構造設計案を創出することができる最も自由度の高い最適化手法である. 現在までに, 構造物の剛性最大化問題 (Suzuki and Kikuchi, 1991; Allaire, et al., 2004), 固有振動数最大化問題 (Diaz and Kikuchi, 1992; Ma, et al., 1995) や熱伝達率最大化問題 (Bruns, 2007; Matsumori, et al., 2013) など多くの問題に適用され, 広く普及している. トポロジー最適化の基本的な考え方は, 構造最適化問題の材料分布問題への置き換えにあり, これにより構造の形状だけでなく, 形態の変更も可能となる. その反面, 材料分布問題への置き換えにより, 無限小の空隙が無数に存在するような多孔質体の存在を許容することとなり, この結果, 得られる最適構造が至るところで不連続となる不適切問題 (ill-posed problem) となることが知られている. この問題を解決する方法として, SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法 (Bendsøe, 1989) や均質化設計法 (Suzuki and Kikuchi, 1991) などが提案されている. しかしながらこれらの方法は, 0 から 1 までの連続な値を設計変数として用いるため, 設計変数が中間値を持つグレースケールで構成される最適構造を解として与える場合がある. このような構造は数学的に最適解であり, グレースケールを微小空孔を有する多孔質体とみなすこともできるが, 製造不可能であることが多く, また必ずしも工学的に意味のある構造であるとは言えない.

そこで, グレースケールを排除する方法としてレベルセット法に基づく最適化手法が提案されている (Wang, et al., 2003; Allaire, et al., 2004). この方法では, レベルセット関数のゼロ等位面により物体境界を陰的に表現するため, 上述のグレースケールを根本的に除去できる. しかしながら従来提案されている手法 (Wang, et al., 2003; Allaire, et al., 2004) は, 形状変更の際のレベルセット関数の更新に移流型の時間発展方程式を用いており, 設計領域内に新たな境界が生成されるような形態の変化は許容されない点で厳密には形状最適化に分類される. 他方, Yamada ら (Yamada, et al., 2010) は, レベルセット法による境界表現とフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適化の方法を提案している. この方法では, フェーズフィールド法の考え方に基づき, レベルセット関数の時間発展方程式として反応拡散方程式を用いており, 設計領域内に新たな境界の生成を許容する方法である.

トポロジー最適化の流体問題への適用については, 現在までに幾つか報告されている. 流体問題を対象とした研究は, Stokes 流れに関する Borrvall らの研究 (Borrvall and Petersson, 2003) に始まり, 近年ではレイノルズ数が 1,000 以下の層流を対象としたトポロジー最適化の研究が報告されている (Olesen, et al., 2006; Zhou and Li, 2008; Duan, et al., 2008). 特に Hansen ら (Gersborg-Hansen, et al., 2005) は, 設計領域内の任意の位置において所望の向きに流れる流体の流量を目的関数として, また, Deng ら (Deng, et al., 2011) は, 非定常流れを対象に流出流量に関する制約条件のもと, 粘性エネルギー散逸を目的関数として, いずれも MMA (the Method of Moving Asymptotes) (Svanberg, 1987) に基づくトポロジー最適化を行っている. さらに Liu ら (Liu, et al., 2011) は, 流出流量の等式制約条件に対し, ペナルティ関数を用いた拡張随伴変数法により, 最適化問題の無制約問題への置換を行っている. しかしながら, ペナルティ関数の導入に起因して解の収束性が悪化する問題が生じるため, これを克服するために各最適化ステップで適切なペナルティ係数を求めるための収束計算が別途必要となり, 複雑な形状を対象とした場合には必ずしも効率の良い手法であるとは言えない.

そこで本研究では, 収束性を悪化させることなく流出流量比制約を考慮する方法を開発し, Yamada ら (Yamada, et al., 2010) により提案されたトポロジー最適化の方法に基づき, 複数の出口を有する流体素子の流路構造を対象として, 流路抵抗を最小化可能な流路構造を得るためのトポロジー最適化手法を構築する. すなわち, 第 2 章ではまず, レベルセット法を用いたトポロジー最適化の方法について簡単に説明するとともに, 非圧縮粘性流体を対象とした流出流量比に関する制約条件を伴う最適化問題への展開方法について説明する. 次に, 第 3 章では, 前章

で定式化した最適化問題を解く際に必要となる設計感度を随伴変数法により求める方法を説明するとともに、その設計感度を用いた最適化アルゴリズムについて説明する。第4章では、複数の出口を有する管路の最適化問題に対し、本研究で提案する方法の妥当性と有用性を検証する。

2. 定 式 化

2.1 レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化

ここでは、レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化について簡単に説明する。トポロジー最適化の基本的な考え方は、固定設計領域 D の設定と次式に示す特性関数 $\chi_{\Omega}(\mathbf{x})$ の導入にある。すなわち、最適構造となるべき領域 Ω を包含する固定設計領域 D を設け、特性関数 $\chi_{\Omega}(\mathbf{x})$ を用いて最適設計問題を材料分布問題に置き換える。

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は固定設計領域内の任意の点の位置を示す。しかしながら、この特性関数 $\chi_{\Omega}(\mathbf{x})$ は D 内にて至るところ不連続な特性をもつことが許容されており、最適設計問題は不適切な (ill-posed) 問題となる。この問題を解決するためには、何らかの方法を用いて正則化する必要がある。ここではフェーズフィールド法の考え方をもとにその正則化を行う。すなわち、まず図1に示したようなプロファイルをもつ次式に示すレベルセット関数を導入する。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{for } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{for } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{for } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (2)$$

ここでレベルセット関数に上限値と下限値を設けているのは、後述する目的汎関数に付加する正則化項を、レベルセット関数の勾配を用いて表現する際に必要となるためである。そして、式(1)の特性関数 $\chi_{\Omega}(\mathbf{x})$ をレベルセット関数の関数と考え、次のように書き換える。

$$\chi_{\phi}(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi < 0 \end{cases} \quad (3)$$

これにより、固定設計領域 D 内の Ω の任意の形状は、レベルセット関数により表現することができる。

上述のレベルセット法による形状表現を用いて、目的汎関数を J 、制約汎関数を G とすると、最適設計問題は以下のように記述される。

$$\inf_{\phi} \quad J(\Omega(\phi)) = \int_D j(\mathbf{x}) \chi_{\phi} dD \quad (4)$$

$$\text{subject to} \quad G(\Omega(\phi)) = \int_D g(\mathbf{x}) \chi_{\phi} dD - G_{\max} \leq 0 \quad (5)$$

ただし $G_{\max}$ は、許容される $\int_D g(\mathbf{x}) \chi_{\phi} dD$ の最大値を表す。そして、Yamada らの方法に基づき、チコノフの正則化法を用いて最適化問題の正則化を行う (Yamada, et al., 2010)。

$$\inf_{\phi} \quad J_R(\Omega(\phi)) = \int_D j(\mathbf{x}) \chi_{\phi} dD + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 dD \quad (6)$$

$$\text{subject to} \quad G(\Omega(\phi)) = \int_D g(\mathbf{x}) \chi_{\phi} dD - G_{\max} \leq 0 \quad (7)$$

Fig. 1 Fixed design domain D and level set function ϕ

ここで、 τ は正則化の度合いを示すパラメータであり、正則化係数と呼ぶ事とする。これにより、従来から提案されている正規化された密度を設計変数とするトポロジー最適化とは異なり、グレースケールの存在しない最適構造を得ることができる。

2.2 定常非圧縮粘性流体を対象とした最適化問題への展開方法

次に、前節で説明したトポロジー最適化の方法を、定常非圧縮粘性流体を対象とした最適化問題へ展開する方法について説明する。今、固定設計領域 D において、領域 Ω を流体により充填された領域（以下、流体領域と呼ぶ。）、領域 $D \setminus \Omega$ を固体により充填された領域（以下、固体領域と呼ぶ。）とし、管路の設計問題を考える。

流体領域 Ω 内の速度ベクトルと圧力をそれぞれ $\mathbf{u}$, p とすると、それらは次式に示す定常状態における Navier-Stokes 方程式および連続の式の解として与えられる。

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (8)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{u}$ および p は、いずれも流れ場の代表長さ L 、代表速度 U 、流体の密度 ρ で無次元化されているものとする。また、 $\mathbf{f}$ はソース項、 Re はレイノルズ数 ($Re = \rho LU / \mu$, μ : 粘性係数) である。ここで、本研究で想定する設計対象はマイクロスケールの流体素子であるため、取り扱う流れは $Re < 1000$ の層流領域に限る。なお、より高いレイノルズ数範囲の流れを取り扱うためには、渦の生成・消滅を伴う乱流現象をモデル化する必要があることを注記しておく。

さらに、管路の入口境界 Γ_{in} における速度分布および出口境界 Γ_{out} における圧力が既知である場合、境界条件は次式となる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} \quad \text{on } \Gamma_{in} \quad (10)$$

$$\left(-p\mathbf{I} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{out} \quad (11)$$

ただし、 $\mathbf{I}$ は単位行列、 $\mathbf{u}_{in}$ は入口境界から流入する予め規定された速度の分布関数を表す。

続いて、固体領域 $D \setminus \Omega$ を仮想的な多孔質体と仮定することで、支配方程式が定義される空間を固定設計領域 D へ拡張する。すなわち、図 2 に示す固定設計領域 D 内の固体領域 $D \setminus \Omega$ において流速がゼロとなるように、次式に示す仮想的な体積力 $\mathbf{f}$ を作用させる (Borrvall and Petersson, 2003)。

$$\mathbf{f} = -\alpha \mathbf{u} \quad (12)$$

$$\alpha = (\alpha_{\min} - \alpha_{\max}) \chi_{\phi} + \alpha_{\max} \quad (13)$$

ここで, $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ はそれぞれ流体領域の透過抵抗係数, 固体領域の透過抵抗係数である. ここでは, $\alpha_{\min}$ は 0 に設定する. これに対して $\alpha_{\max}$ は, 理想的には無限に大きい値に設定すべきであるが, 数値計算上不可能であるため, 十分大きな値として 1.0×10^4 に設定する. これにより, 流体領域で $\mathbf{f}$ はゼロとなるため, 流れ場に影響を与えないが, 固体領域では $\mathbf{f}$ の値が極めて大きくなり, 流速がほぼゼロで流れのない領域を表すことができる.

Fig. 2 Design domain settings for flow field optimization problem

次に, 目的関数について考える. 本研究では, 目的汎関数 J として流路抵抗を考える. すなわち, 目的汎関数 J は次式で示すように, 流体の粘性エネルギー散逸と抵抗力により生じるエネルギーで構成される全ポテンシャルエネルギーとして定式化できる (Borrvall and Petersson, 2003).

$$J = \int_D \frac{1}{2Re} \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} : \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} dD - \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dD \quad (14)$$

ここで, $\left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\}$ および $\nabla \mathbf{u}$ はそれぞれせん断ひずみ速度テンソル, 速度勾配テンソルを表し, 記号 $:$ はテンソル積を意味する.

2.3 流出流量比に関する制約の導入

単一の管路を用いて管継手などを利用し新たな配管ラインを設計する場合, 既設の配管に新たに分岐を設けることで各分岐配管出口において所望の流量を得ることが要求される.

すなわち, N 個 ($2 \leq N$) の出口境界を有する固定設計領域 D において, 出口境界 Γ_{out}^n ($1 \leq n \leq N$) における流出流量の比を規定する制約関数 G^n は, 流入流量 Q_{in} に対する流出流量の比を r_n ($0 \leq r_n \leq 1$) として, 次式により定式化できる.

$$G^n(\mathbf{u}) = \left(\int_{\Gamma_{\text{out}}^n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - r_n Q_{\text{in}} \right)^2 \leq 0 \quad (15)$$

ただし, $\mathbf{n}$ は出口境界における外向き単位法線ベクトルを表す.

以上より, 流出流量比に関する制約条件 (以下, 流出流量比制約条件と呼ぶ.) を考慮した管路の最適設計問題は以下のように記述される.

$$\inf_{\phi} \quad J_R = \int_D \frac{1}{2Re} \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} : \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} dD - \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dD + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 dD \quad (16)$$

$$\text{subject to} \quad A(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, p, \chi_\phi) = \int_D (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dD - \int_D p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} dD + \frac{1}{Re} \int_D \nabla \mathbf{u} \nabla \tilde{\mathbf{u}} dD + \int_D \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dD = 0 \quad (17)$$

$$B(\mathbf{u}, \tilde{p}) = - \int_D \tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{u} dD = 0 \quad (18)$$

$$G_1 = \int_D \chi_\phi dD - V_{\max} \leq 0 \quad (19)$$

$$G_2 = \left(\int_{\Gamma_{\text{out}}^n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - r_n Q_{\text{in}} \right)^2 \leq 0 \quad (20)$$

ここで、 $A(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, p, \chi_\phi)$ および $B(\mathbf{u}, \tilde{p})$ は、式(8)~(11)の弱形式で、 $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}$ は試験関数である。 G_1 および G_2 はそれぞれ体積制約および流出流量比制約を表す不等式制約条件、 $V_{\max}$ は流体領域の体積の上限値を意味する。また、固定設計領域 D 内の流れは、 $(\mathbf{u}, p) \in U \times P$ および $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \in U_0 \times P$ なる次の関数空間で定義される。

$$U = \{ \tilde{\mathbf{u}} \in H^1(D) \mid \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_{\text{in}} \text{ on } \Gamma_{\text{in}} \} \quad (21)$$

$$U_0 = \{ \tilde{\mathbf{u}} \in H^1(D) \mid \tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ on } \Gamma_{\text{in}} \} \quad (22)$$

$$P = \{ \tilde{p} \in L^2(D) \} \quad (23)$$

ただし、 $H^1(D)$ はソボレフ空間、 $L^2(D)$ はルベーグ空間を表す。

次に、ラグランジュ未定乗数法を用いて最適設計問題を無制約問題に置き換える。すなわち、ラグランジュアンを $\bar{J}_R$ とすれば、上述の最適設計問題は次式で表される。

$$\inf_{\phi} \quad \bar{J}_R = J_R + A + B + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 \quad (24)$$

ただし、 λ_1 および λ_2 はラグランジュ乗数である。この時、上記の式(24)を解いて得られる最適解に関して、一次の最適性条件である次の KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件が成立する。

$$\left\langle \frac{d\bar{J}_R}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle = 0, \quad \lambda_1 G_1 = 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad G_1 \leq 0, \quad \lambda_2 G_2 = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad G_2 \leq 0 \quad (25)$$

ただし、 $\langle d\bar{J}_R/d\phi, \delta\phi \rangle$ は $\bar{J}_R$ の ϕ に対するフレシェ微分を表す。

2.4 時間発展方程式に基づくレベルセット関数の更新

式(25)の KKT 条件を満足するレベルセット関数 ϕ が最適解の候補となるが、これを直接導く事は困難である。本研究では擬似的な時間 t を導入し、時間発展方程式によってレベルセット関数 ϕ を更新する。すなわち、フェーズフィールド法の考え方に従い、レベルセット関数 ϕ はラグランジュアンの勾配に比例して駆動されるものと仮定する (Yamada, et al., 2010)。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \frac{d\bar{J}_R}{d\phi} \quad (26)$$

ここで、 $K(\phi) > 0$ は比例定数を表す。よって式(26)に式(24)を代入し、固定設計領域の境界 ∂D のうち、常に流

体を考慮する非設計境界 ∂D_D に対してディリクレ境界条件, その他の設計境界 $\partial D \setminus \partial D_D$ にはノイマン境界条件を与えると, 本研究で解くべき時間発展方程式として次の反応拡散方程式が得られる.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \left(\frac{d\bar{J}_R}{d\phi} - \tau \nabla^2 \phi \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \partial D_D \\ \phi = 1 & \text{on } \partial D_D \end{cases} \quad (27)$$

なお, 式 (27) は相分離問題において用いられる Allen-Cahn 方程式と同形となるが, 本手法では二重井戸ポテンシャルを考慮しない点で, 一般的なフェーズフィールド法に基づく最適化手法 (Wang and Zhou, 2004) とは本質的に異なる点を注記しておく.

3. 数 値 実 装 法

3.1 最適化アルゴリズム

図 3 に最適化アルゴリズムを示す. まず, 固定設計領域 D に初期のレベルセット関数値を設定する. その後, 与えられた境界条件に従って有限要素法により流体解析を行い, 流速 $\mathbf{u}$, 圧力 p および目的汎関数 J , 制約汎関数 G の値を得る. ここで, 得られた目的汎関数の値が収束している場合は最適化計算を終了させる. 収束していない場合, 得られた状態変数 $(\mathbf{u}, p)$ を用いて後述する随伴方程式を解き, 随伴変数 $(\mathbf{v}, q)$ を求める. これら状態変数および随伴変数を用いて設計感度を算出し, 得られた設計感度を用いて有限要素法により反応拡散方程式を時間発展させて解き, レベルセット関数を更新する.

ここで, 本研究における最適化計算の収束判定条件は次式に示す通りである.

$$\left| \frac{J_{i+1} - J_i}{J_i} \right| < \varepsilon \quad (28)$$

ただし, i は最適化計算の反復数を表し, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$ である.

なお本研究では, 流体領域と固体領域の境界を陽に抽出することなくレベルセット関数に基づく形状表現を用いて有限要素法による流体解析を行う. その際, 最適化の過程を通じて変化しない共通の有限要素メッシュを用いるため, 特性関数 χ_ϕ を次式に示す近似されたヘビサイド関数へ置き換える.

$$\chi_\phi(\phi) \approx H(\phi) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq \phi(\mathbf{x}) < w) \\ \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{w} \left[\frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{w^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16} \frac{\phi^2}{w^2} \right) \right] \right\} & (-w < \phi(\mathbf{x}) < w) \\ 1 & (w < \phi(\mathbf{x}) \leq 1) \end{cases} \quad (29)$$

ここで, w はヘビサイド関数の遷移幅を表すパラメータである.

3.2 随伴変数法に基づく感度解析

本節では, 目的汎関数の設計感度の導出について説明する. 式 (25) の第 1 式より, 目的汎関数の設計感度は随伴変数法を用いて次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{J}_R}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle &= \left\langle \frac{dJ_R}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle + \left\langle \frac{dA}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle + \left\langle \frac{dB}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle + \lambda_1 \left\langle \frac{dG_1}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \frac{dG_2}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial J_R}{\partial \mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J_R}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial \mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial p}, \delta p \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial (\nabla \mathbf{u})}, \delta(\nabla \mathbf{u}) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial B}{\partial \mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \right\rangle + \lambda_1 \left\langle \frac{\partial G_1}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \right\rangle \end{aligned} \quad (30)$$

ここで, 流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p の変分を含む項は, 後述する随伴方程式を解くことで消去される. すなわち, 境界

Fig. 3 Flowchart of the optimization procedure

条件を考慮してガウスの発散定理および部分積分を行い、流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p の変分を含む項を各積分範囲で整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\partial J_R}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial p}, \delta p \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial (\nabla \mathbf{u})}, \delta (\nabla \mathbf{u}) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial B}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle \\
 &= \int_D \left(\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + 2\alpha \mathbf{u} - \nabla \cdot \frac{2}{Re} \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v} + \nabla q \right) \delta \mathbf{u} dD \\
 &+ \int_D (-\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta p dD \\
 &+ \int_{\Gamma_N} \left\{ \frac{2}{Re} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - q \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} + \lambda_2 \frac{2}{r_n Q_{in}} \left(\frac{Q_{out}^n}{r_n Q_{in}} - 1 \right) \cdot \mathbf{n} \right\} \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma_D} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \delta p d\Gamma
 \end{aligned} \tag{31}$$

ただし、 Γ_D , Γ_N はそれぞれディリクレおよびノイマン境界を表し、境界 Γ_{out}^n における流出流量 $\int_{\Gamma_{out}^n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Gamma$ を Q_{out}^n と置いている。そして、式 (31) の被積分量がゼロとなるように任意のラグランジュ乗数 $\mathbf{v}$, q を定義する。すなわち、以下の随伴方程式および境界条件を満足する $\mathbf{v}$, q を求める。

$$-\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \nabla q = -\alpha \mathbf{v} - \left(\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + 2\alpha \mathbf{u} - \nabla \cdot \frac{2}{Re} \nabla \mathbf{u} \right) \quad \text{in } D \tag{32}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } D \tag{33}$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{on } \Gamma_D \tag{34}$$

$$\left(-q \mathbf{I} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} - \frac{2}{Re} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \lambda_2 \frac{2}{r_n Q_{in}} \left(\frac{Q_{out}^n}{r_n Q_{in}} - 1 \right) \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_N \tag{35}$$

上記の式 (32) および式 (33) が定常非圧縮粘性流体を対象とした最適設計問題における随伴方程式を表し、ラグランジュ乗数 $\mathbf{v}$, q は随伴場における流速および圧力とみなす事ができる。また、式 (34) および式 (35) が随伴場の満たすべき境界条件である。

以上より、状態場および随伴場における支配方程式を解くことによって、状態場の流速 $\mathbf{u}$, 圧力 p , および随伴場の流速 $\mathbf{v}$, 圧力 q が得られ、ラグランジュアン $\bar{J}_R$ のレベルセット関数 ϕ に対する感度である式 (30) は最終的に次式となる。

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d\bar{J}_R}{d\phi}, \delta \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial J_R}{\partial \phi}, \delta \phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial \phi}, \delta \phi \right\rangle + \lambda_1 \left\langle \frac{\partial G_1}{\partial \phi}, \delta \phi \right\rangle \\
 &= \int_D \{ (\alpha_{\min} - \alpha_{\max}) (\mathbf{u}^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + \tau \nabla^2 \phi + \lambda_1 \} \delta \phi dD
 \end{aligned} \tag{36}$$

ところで、式(32)～式(35)の随伴場を解くためには、流出流量比制約条件を考慮したことにより現れるラグランジュ乗数 λ_2 を求めておく必要がある。Liu らは、ペナルティ関数を用いた拡張随伴変数法 (Liu and Korvink, 2009) により最適設計問題を定式化しているため、ラグランジュ乗数に加えペナルティ係数を決定する必要が生じ、そのために別途収束計算を必要としている (Liu, et al., 2011)。そこで本研究では、収束計算の必要なくラグランジュ乗数 λ_2 を求める方法論を提案する。

すなわち、式(15)の制約条件が非活性のとき、 $\lambda_2 = 0$ 、活性のとき、指数関数で与えられる係数 C_1 を導入し、各最適化ステップにおける流出流量と規定流出流量との相対誤差に依存した大きさを持つように随伴変数 λ_2 を次のように与える。

$$\lambda_2 = C_1 \lambda_2^* \quad (37)$$

$$C_1 = \exp \left\{ \left(\frac{Q_{\text{out}}^n}{r_n Q_{\text{in}}} - 1 \right)^2 + a_n \right\}^{b_n} \geq 0 \quad (38)$$

$$\lambda_2^* = \frac{\int_{\Gamma_{\text{out}}^n} \left| \frac{\partial G_2^n}{\partial \mathbf{u}} \right| d\Gamma}{\int_{\Gamma_{\text{out}}^n} d\Gamma} \geq 0 \quad (39)$$

ただし、式(38)中の a_n , b_n は指数関数形状を与える任意のパラメータである。また、上式から求められる λ_2 は常に正の値となることから、KKT 条件を満足する。ここで、任意のパラメータ a_n , b_n は、流出流量比制約条件を考慮せず随伴場を解くことで見積もられる式(35)右辺のオーダと、式(35)の右辺第三項のオーダが乖離しないよう定めれば良い。したがって、流出流量比制約条件が活性の場合、式(35)の右辺第三項を考慮した境界条件が出口境界 Γ_N に作用する。これにより、規定流出流量からの相対誤差に応じて出口境界における流れが助長または抑制され、所望の流量比を実現可能な流路構造の創生が可能となる。

3.3 時間発展方程式の数値解法

はじめに式(27)を時間方向に離散化すると、以下の式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = -K(\phi(t)) \left(\frac{d\bar{J}_R}{d\phi} - \tau \nabla^2 \phi(t+\Delta t) \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D \setminus \partial D_D \\ \phi = 1 \quad \text{on } \partial D_D \end{cases} \quad (40)$$

ここで、 Δt は時間増分である。次に、有限要素法を用いて空間方向に離散化するために上式を弱形式で表現し直せば次式となる。

$$\begin{cases} \int_D \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} \tilde{\phi} dD + \int_D \nabla^T \phi(t+\Delta t) (\tau K(\phi(t)) \nabla \tilde{\phi}) dD = \int_D \left(-K\phi(t) \frac{d\bar{J}_R}{d\phi} + \frac{\phi(t)}{\Delta t} \right) \tilde{\phi} dD \quad \text{for } \phi, \forall \tilde{\phi} \in \tilde{\Phi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D \setminus \partial D_D \\ \phi = 1 \quad \text{on } \partial D_D \end{cases} \quad (41)$$

式(41)を解くことで、レベルセット関数 $\phi(t+\Delta t)$ を求める。ここで、 $\tilde{\Phi}$ は以下の式で定義される関数空間である。

$$\tilde{\Phi} = \{ \tilde{\phi} \in H^1(D) | \tilde{\phi} = 0 \text{ on } \partial D_D \} \quad (42)$$

4. 数 値 計 算 例

本章では数値計算例として、管路流れを対象に固定設計領域 D における流路抵抗の最小化を目的とした定常非圧縮粘性流体のトポロジー最適化問題を考える。以降の数値計算例では、流入速度に関する分布関数 $\mathbf{u}_{\text{in}}$ を発達し

たチャンネル流れの速度分布と仮定し、座標 $s \in [-l/2, l/2]$ において以下のように定義する。

$$\mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n} = \bar{g} \left\{ 1 - \left(\frac{2s}{l} \right)^2 \right\} \quad (43)$$

ただし、 $\bar{g}$ は速度分布の中央位置における絶対流速の最大値、 l は入口境界長さを表す。

なお、本研究における以降全ての数値計算例では、流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p に対してそれぞれ四角形 2 次および四角形 1 次要素を用いて有限要素法による流体解析を行った。

4.1 2 分岐流路問題

本数値計算例では、流出流量比制約条件の有無による最適流路構造の違いを示すとともに、本研究で提案する流出流量比制約条件の有効性を検証する。

図 4 に最適設計問題の固定設計領域 D を示す。すなわち、入口境界 Γ_{in} から流入した流れが二つの異なる出口境界 Γ_{out}^1 , Γ_{out}^2 へ分岐して流出する場合を想定する。正則化係数 $\tau = 5.0 \times 10^{-3}$ 、流体領域から固体領域へのヘビサイド関数の遷移幅 $w = 0.8$ 、流体領域の透過抵抗係数 $\alpha_{\text{min}} = 0$ 、固体領域の透過抵抗係数 $\alpha_{\text{max}} = 1.0 \times 10^4$ とし、まず流体領域の体積の上限 $V_{\text{max}} = 0.5 \int_{\Omega} d\Omega$ とする体積制約条件 G_1 のみを考慮した場合の最適設計問題を考える。なお、入口境界における速度分布 $\mathbf{u}_{\text{in}}$ の最大値は $\bar{g} = 0.1$ とし、入口流速の平均値を代表速度、入口境界長さを代表長さとした場合のレイノルズ数 $Re = 1$ である。要素分割に用いた固定設計領域の構造格子数は $35 \times 25 = 875$ とした。

図 5 に最適流路構造 (青色領域) を示す。本最適設計問題における目的汎関数は、流体の粘性エネルギー散逸と抵抗力により生じるエネルギーの和で構成される流路抵抗である。すなわち、流体領域と固体領域の境界の長さが短く、かつ直線的な流路構造である方が流路抵抗が小さくなる。このため、図 5 に示すような入口境界から最も近い箇所に位置する出口境界へ直線的に接続する最適流路構造が得られたと考えられる。すなわち、流路抵抗が減少するように流路構造が決定されるため、出口境界 Γ_{out}^1 へのみ接続する最適流路構造が得られ、体積制約条件 G_1 を考慮するだけでは出口境界 Γ_{out}^2 からは流出しない。なお、レイノルズ数を大きくしても、出口境界 Γ_{out}^2 からのみ流出する直線的な最適流路となる。この最適流路構造の違いは、流れの慣性力の違いに起因するものであるが、入口から各出口までの距離がそれぞれ異なる本数値例の場合は、レイノルズ数を変えても両出口へ接続する分岐流路構造は得られないことを注記しておく。

Fig. 4 Design settings of two-terminal flow problem

Fig. 5 Optimized flow channel layout ($Re = 1$) (blue, fluid domain; white, solid domain)

次に、体積制約条件 G_1 に加えて各出口境界において流出流量比制約条件 G_2 を考慮した場合を考える。まず、規

定流出流量比 $r_1 = 0.3$ の場合の $Re = 1$ における最適流路構造を図 6 に示す. なお, パラメータ $(a_{1,2}, b_{1,2}) = (0.3, 8.0)$ とした. 図 6 より明らかなように, 流出流量比制約条件 G_2 を考慮することによって, 二つの出口へ接続する最適流路構造が得られた. また, 図 7 に最適化計算の収束履歴を示す. 目的汎関数の変化の大きい最適化の初期では流出流量が変動するものの, 最終的には各出口において所望の流出流量が得られ目的汎関数も十分に収束していることが分かる. 図 8 に, 規定流出流量比 r_1 を 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 と変化させた場合の最適流路構造を示す. また表 1 には, すべての条件における最終的な各出口の流出流量比 Q_{out}^n , 固定設計領域に占める流体の体積 $V = \int_D \chi_\phi dD$, 出口境界 Γ_{out}^1 における流出流量比制約条件の残差 R_1 および目的汎関数値 J を示す. なお, $r_1 = 0.4$ のとき $(a_{1,2}, b_{1,2}) = (0.1, 2.0)$, $r_1 = 0.5$ のとき $(a_{1,2}, b_{1,2}) = (0.3, 5.0)$, $r_1 = 0.6$ のとき $(a_{1,2}, b_{1,2}) = (0.1, 2.0)$, $r_1 = 0.7$ のとき $(a_1, b_1) = (0.2, 5.0)$, $(a_2, b_2) = (0.2, 8.0)$ である. 図 8 より, 規定流出流量比 r_1 の変化に応じて, 各出口へ接続する流路幅が異なる最適流路構造が得られる事が分かる. さらに, $r_1 = 0.3, 0.7$ における最適流路構造の流体領域と固体領域の境界長は他の条件における最適流路構造に比べて短い. 故に表 1 に示した目的汎関数値は, 確かに $r_1 = 0.4, 0.5, 0.6$ の場合に比べ $r_1 = 0.3, 0.7$ の方がより小さくなっている事が分かる.

Fig. 6 Optimized flow channel layout ($r_1=0.3$, $Re = 1$) (blue, fluid domain; white, solid domain)

Fig. 7 Convergence histories of the objective function value (J) and the actual outflow rates relative to inflow rate on each outlet boundaries Γ_{out}^1 and Γ_{out}^2 (Q_{out}^1/Q_{in} , Q_{out}^2/Q_{in})

Fig. 8 Comparison of optimized flow channel layouts ($Re = 1$) (blue, fluid domain; white, solid domain)

Table 1 Computational results of two-terminal flow

r_1	Q_{out}^1	Q_{out}^2	V	R_1	J
0.3	0.31	0.69	0.42	4.5×10^{-4}	2.75
0.4	0.41	0.59	0.26	7.3×10^{-4}	3.88
0.5	0.51	0.49	0.26	1.4×10^{-4}	3.81
0.6	0.61	0.39	0.25	3.5×10^{-4}	4.04
0.7	0.68	0.32	0.36	1.2×10^{-3}	3.10

4.2 多分岐流路問題

続いて、図 9 に示すようなそれぞれ 3 つの入口および出口を有する流路の最適設計問題を考える。すなわち、異なる 3 つの入口境界 Γ_{in}^n ($n=1,2,3$) から流入した流れが 3 つの出口境界 Γ_{out}^n へ分岐して流出する場合を想定する。

なお本数値計算例では、各入口境界における速度分布 $\mathbf{u}_{in}^n$ の最大値はいずれも $\bar{g}_n = 1.0$ ($Re = 10$)、要素分割に用いた設計領域の構造格子数は $58 \times 60 = 3480$ である。また各パラメータは、 $\tau = 1.0 \times 10^{-5}$ 、 $w = 0.4$ 、 $\alpha_{min} = 0$ 、 $\alpha_{max} = 1.0 \times 10^4$ 、 $V_{max} = 0.7 \int_{\Omega} d\Omega$ である。

Fig. 9 Design settings of multi-terminal flow problem

まず、各出口から等しく流れが流出する場合、すなわち各出口境界における規定流出流量比が等しい場合 ($r_n = 1/3$) を考える。なお、 $(a_{1,2,3}, b_{1,2,3}) = (0.3, 4.0)$ である。図 10 および図 11 に、最適化の結果得られた最適流路構造を示す。これより、最適流路構造では、各入口に最も近い場所に位置する出口から流れが流出するような流路構造となることが分かる。

次に、 $r_1 = 0.6$ 、 $r_2 = 0.2$ 、 $r_3 = 0.2$ の場合を考える。なお、 $(a_1, b_1) = (-3.0, 15.5)$ 、 $(a_2, b_2) = (2.5, 0.2)$ 、 $(a_3, b_3) = (7.0, 0.1)$ である。この場合、図 12 および図 13 に示すように、 Γ_{in}^2 および Γ_{in}^3 から流入した流れは、それぞれ Γ_{out}^2 および Γ_{out}^3 へ流出するとともに、流路が途中で分岐し、 Γ_{out}^1 へも流出する流路構造が最適構造として得られた。また、表 2 に示す通り、最適流路構造における各出口の流出流量 Q_{out}^n と規定流出流量との相対誤差 R_n は十分に小さく、規定した所望の流出流量比が維持されていることが確認できる。以上より、複数の入口および出口を有する分岐流路問題においても、本研究において提案した流出流量比制約条件が正しく機能している事が確かめられた。

Fig. 10 Optimized flow channel layout ($r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$) (blue, fluid domain; white, solid domain)

Fig. 11 Velocity contour distribution and velocity vector in optimized flow channel ($r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$)

Fig. 12 Optimized flow channel layout ($r_1 = 0.6, r_2 = 0.2, r_3 = 0.2$) (blue, fluid domain; white, solid domain)

Fig. 13 Velocity contour distribution and velocity vector in optimized flow channel ($r_1 = 0.6, r_2 = 0.2, r_3 = 0.2$)

Table 2 Residual of outflow rate on each outlet boundaries in optimal configuration

R_1	R_2	R_3
2.21×10^{-3}	9.32×10^{-7}	2.02×10^{-2}

5. 結 言

本研究では、定常非圧縮粘性流れを対象とした流出流量比を考慮可能なレベルセット法による境界表現に基づくトポロジー最適化手法を提案した。本研究で得られた結果を以下に示す。

- (1) レベルセット法による形状表現に基づくトポロジー最適化の方法を、定常非圧縮粘性流体を対象とした最適設計問題へ展開するための方法を示すと同時に、流出流量比制約条件を考慮した場合の随伴方程式および境界条件の定式化を行った。
- (2) 流出流量比制約条件の導入に起因して随伴境界条件に生じる付加項に含まれる未定乗数に対して、各最適化ステップにおける流出流量と規定流出流量との相対誤差の大きさに依存した値を簡易的に与える方法論を構

築し、流れ場と随伴場の解析、およびレベルセット関数の更新に有限要素法を用いた最適化アルゴリズムを開発した。これにより、未定乗数を求めるためにペナルティ関数などを導入する必要がなく、解の収束性を悪化させることなく安定的に最適化問題を解くことが可能となった。

- (3) 数値計算例として、複数の出口境界に対して流出流量比制約条件を考慮した流路抵抗の最小化問題を設定し、提案手法の有効性を検証した。その結果、二つの出口境界を有する数値計算例において、解の収束性を悪化させることなく所望の流出流量比を有する分岐管流路構造が得られることを示した。さらに、入口および出口境界の数を増やした問題設定においても、同様に規定の流出流量比に応じた最適な分岐管流路構造が得られることを示した。

文 献

- Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol.194, No.1 (2004), pp.363–393.
- Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, No.2 (1988), pp.197–224.
- Borrvall, T. and Petersson, J., Topology optimization of fluids in Stokes flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.41, No.1 (2003), pp.77–107.
- Bruns, T. E., Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.50, No.15 (2007), pp.2859–2873.
- Deng, Y., Liu, Z., Zhang, P., Liu, Y. and Wu, Y., Topology optimization of unsteady incompressible Navier-Stokes flows, *Journal of Computational Physics*, Vol.230, No.17 (2011), pp.6688–6708.
- DeWitt, S. H., Micro reactors for chemical synthesis, *Current Opinion in Chemical Biology*, Vol.3, No.3 (1999), pp.350–356.
- Diaz, A. R. and Kikuchi, N., Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.35 (1992), pp.1487–1502.
- Duan, X. B., Ma, Y. C. and Zhang, R., Shape-topology optimization for Navier-Stokes problem using variational level set method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.222 (2008), pp.487–499.
- Gao, Z., Ma, Y. and Zhuang, H., Optimal shape design for Stokes flow via minimax differentiability, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.48 (2008), pp.429–446.
- Gersborg-Hansen, A., Sigmund, O. and Haber, R. B., Topology optimization of channel flow problems, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.30, No.3 (2005), pp.181–192.
- Guest, J. K. and Prevost, J. H., Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.66, No.3 (2006), pp.461–484.
- Jensen, K. F., Microchemical systems: Status, challenges, and opportunities, *AIChE Journal*, Vol.45, No.10 (1999), pp.2051–2054.
- Liu, Z., Gao, Q., Zhang, P., Xuan, M. and Wu, Y., Topology optimization of fluid channels with flow rate equality constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.44 (2011), pp.31–37.
- Liu, Z. and Korvink, J. G., Using artificial reaction force to design compliant mechanism with multiple equality displacement constraints, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.45 (2009), pp.555–568.
- Ma, Z. D., Kikuchi, N. and Cheng, H. C., Topological design for vibrating structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.121, No.1 (1995), pp.259–280.
- Matsumori, T., Kondoh, T., Kawamoto, A. and Nomura, T., Topology optimization for fluid-thermal interaction problems under constant input power, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.47, No.4 (2013), pp.571–581.
- Olesen, L. H., Okkels, F. and Bruus, H., A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state Navier-Stokes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.65, No.7 (2006), pp.975–1001.
- Othmer, C., A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows,

International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.58, No.8 (2008), pp.861–877.

尾崎省太郎, 原美明, 折田豊樹, 純流体素子入門 (1974), 日刊工業新聞社.

Stone, H. A., Stroock, A. D. and Ajdari, A., Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol.36 (2004), pp.381–411.

Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.121 (1991), pp.291–318.

Svanberg, K., The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.24 (1987), pp.359–373.

Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., A level set method for structural topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.192, No.1–2 (2003), pp.227–246.

Wang, M. Y. and Zhou, S. W., Phase Field: A variational method for structural topology optimization, Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.6, No.6 (2004), pp.547–566.

Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.199, No.45–48 (2010), pp.2876–2891.

Zhou, S. and Li, Q., A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier-Stokes flow, Journal of Computational Physics, Vol.227 (2008), pp.10178–10195.

References

Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, Journal of Computational Physics, Vol.194, No.1 (2004), pp.363–393.

Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71, No.2 (1988), pp.197–224.

Borrvall, T. and Petersson, J., Topology optimization of fluids in Stokes flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.41, No.1 (2003), pp.77–107.

Bruns, T. E., Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.50, No.15 (2007), pp.2859–2873.

Deng, Y., Liu, Z., Zhang, P., Liu, Y. and Wu, Y., Topology optimization of unsteady incompressible Navier-Stokes flows, Journal of Computational Physics, Vol.230, No.17 (2011), pp.6688–6708.

DeWitt, S. H., Micro reactors for chemical synthesis, Current Opinion in Chemical Biology, Vol.3, No.3 (1999), pp.350–356.

Diaz, A. R. and Kikuchi, N., Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.35 (1992), pp.1487–1502.

Duan, X. B., Ma, Y. C. and Zhang, R., Shape-topology optimization for Navier-Stokes problem using variational level set method, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.222 (2008), pp.487–499.

Gao, Z., Ma, Y. and Zhuang, H., Optimal shape design for Stokes flow via minimax differentiability, Mathematical and Computer Modelling, Vol.48 (2008), pp.429–446.

Gersborg-Hansen, A., Sigmund, O. and Haber, R. B., Topology optimization of channel flow problems, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.30, No.3 (2005), pp.181–192.

Guest, J. K. and Prevost, J. H., Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.66, No.3 (2006), pp.461–484.

Jensen, K. F., Microchemical systems: Status, challenges, and opportunities, AIChE Journal, Vol.45, No.10 (1999), pp.2051–2054.

Liu, Z., Gao, Q., Zhang, P., Xuan, M. and Wu, Y., Topology optimization of fluid channels with flow rate equality constraints, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.44 (2011), pp.31–37.

Liu, Z. and Korvink, J. G., Using artificial reaction force to design compliant mechanism with multiple equality displacement constraints, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.45 (2009), pp.555–568.

- Ma, Z. D., Kikuchi, N. and Cheng, H. C., Topological design for vibrating structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.121, No.1 (1995), pp.259–280.
- Matsumori, T., Kondoh, T., Kawamoto, A. and Nomura, T., Topology optimization for fluid-thermal interaction problems under constant input power, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.47, No.4 (2013), pp.571–581.
- Olesen, L. H., Okkels, F. and Bruus, H., A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state Navier-Stokes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.65, No.7 (2006), pp.975–1001.
- Othmer, C., A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.58, No.8 (2008), pp.861–877.
- Ozaki, S., Hara, Y. and Orita, T., Junryuutaisoshi (1974), NIKKAN KOGYO SHIMBUN, LTD. (in Japanese).
- Stone, H. A., Stroock, A. D. and Ajdari, A., Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.36 (2004), pp.381–411.
- Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.121 (1991), pp.291–318.
- Svanberg, K., The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24 (1987), pp.359–373.
- Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., A level set method for structural topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.192, No.1–2 (2003), pp.227–246.
- Wang, M. Y. and Zhou, S. W., Phase Field: A variational method for structural topology optimization, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.6, No.6 (2004), pp.547–566.
- Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.199, No.45–48 (2010), pp.2876–2891.
- Zhou, S. and Li, Q., A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier-Stokes flow, *Journal of Computational Physics*, Vol.227 (2008), pp.10178–10195.