ロータの 1 次元梁モデルの計算精度向上のための
軸直径変化部のモデル化長江 信顕^{*1}, 後藤 知伸^{*2}Accurate one dimensional beam modeling method for a rotor shaft
with stepped cross-sections in the finite element methodNobuaki NAGAE ^{*1} and Tomonobu GOTO ^{*2}^{*1} Kawasaki Technology Co., Ltd

3-1 Kawasaki-cho, Akashi-shi, Hyogo 673-0014, Japan

^{*2} Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Tottori University

4-101 Koyama-cho-minami, Tottori 680-8552, Japan

Received 11 March 2014

Abstract

The bending stiffness at the stepped cross-section of a rotor decreases in accordance with the elasticity in the face of the cross-section. This study proposes a method to deal with this decrease in bending stiffness in one dimensional (1D) beam modeling. The 1D beam modeling is widely used in practice to predict the rotor vibration characteristics represented by the eigenvalues because reasonable accuracy can be obtained in shorter computational time compared to three dimensional (3D) modeling—this is applicable to precisely predict the vibration including the cross-sectional face elasticity. Furthermore, the 1D beam modeling is especially useful to save computational time for identifying optimum rotor shapes or dimensions in which iterative complex eigenvalue calculations are required. In the 1D beam modeling, however, the decrease in bending stiffness is not included unless a special treatment is introduced into it. In this paper, the authors propose an accurate and easy-to-use 1D beam modeling method which takes into account the cross-sectional face elasticity of a rotor shaft with stepped cross-sections. This newly proposed method considerably reduces the calculation error regarding the rotor's bending stiffness—an inherent functional limitation of the 1D beam modeling.

Key words : Vibration of rotating body, Modeling, Flexible rotor, Bending, Finite element method, Eigenvalue analysis

1. 緒 言

ロータの軸振動解析モデルには今なお 1 次元梁モデルが使用される場合が多い。その利点は、第一に計算負荷が軽い点、第二に実用的な精度で軸振動を予測できる点である。特に、ロータの軸形状の最適設計 (内海他, 2013) を行う場合などでは、複素固有値解析を繰り返し行う必要があるため、1 次元梁モデルが有効である。一方、1 次元梁モデルの精度が問題となる場合がある。例えば、大型コンプレッサロータの軸振動解析モデルの曲げ 1 次～4 次の固有振動数の予測誤差は、+5.3%、+6.2%、-3.9%、-32%とやや大きな値となることもある (Vannini, et al., 2006)。誤差の要因としては、インペラや軸のモデル化精度が低い点を挙げることができる。特に、軸直径変化部では大径部側面の弾性変形による小径軸の傾きに起因する曲げ剛性の低下があり、軸のモデル化精度が固有振動数の予測誤差に大きな影響を与えることがありうる。

軸直径変化部の曲げ剛性の低下については、これまでも問題とされており、1 次元梁モデルにおいて、その影

響を考慮する方法が検討されている（小堀，1966，高田他，2009）．しかし，軸直径変化部の形状によっては適用範囲外となって適切な曲げ剛性が得られないという問題（付録 A1）や，1 次元梁の有限要素モデルが適用された軸振動解析環境では低下した曲げ剛性を組み込み難いといった問題があった（付録 A2）．

本研究では，軸直径変化部を持つ中実円形断面軸についてこれらの問題を解決し，既存の 1 次元梁の有限要素モデルを用いた軸振動解析環境で利用可能な軸直径変化部のモデル化の方法を提案する．第 3 章に提案方法の詳細を示す．第 4 章では，提案方法の妥当性を検証するために，提案方法を適用した 1 次元梁モデルを用いて自由支持された軸の曲げモードの固有振動数と静荷重による曲げ変形を求めて，3 次元モデルの解析結果との比較を行った．

2. 主な記号

- A : 軸の断面積 [m^2]
- E : ヤング率 [N/m^2]
- E' : 補正後のヤング率 [N/m^2]
- G : 横弾性係数 [N/m^2]
- I : 軸の断面二次モーメント [N/m^2]
- I_1 : 大径軸の断面二次モーメント [N/m^2]
- I_1' : 軸直径変化部の大径軸側断面の曲げ剛性の等価断面二次モーメント [N/m^2]
- I_2 : 小径軸の断面二次モーメント [N/m^2]
- I_2' : 軸直径変化部の小径軸側断面の曲げ剛性の等価断面二次モーメント [N/m^2]
- I_A : 断面 A-A における曲げ剛性の等価断面二次モーメント [N/m^2]
- I_d : 軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性の等価断面二次モーメント [N/m^2]
- I_{eq} : 長さ $9d/32$ の小径梁要素の曲げ剛性の等価断面二次モーメント [N/m^2]
- I'' : 軸直径変化部断面の等価断面二次モーメント [N/m^2]
- M : 曲げモーメント [$\text{N}\cdot\text{m}$]
- c_1, c_2, c_3 : たわみ曲線の 3 次多項式近似曲線の係数（切片を 0 とした場合）
- d : 小径軸の軸径 [m]
- d_0 : 円板または大径軸の軸径 [m]
- d_e : 等価曲げ剛性を与える大径部の軸径 [m]
- d_{eq} : 等価曲げ剛性を与える小径部の軸径 [m]
- h : 円板または大径部の厚さまたは軸方向長さ [m]
- l : 梁要素の長さ [m]
- l_1 : 小径軸要素の長さ [m]
- m_1 : 大径軸要素の慣性モーメント [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
- m_2 : 小径軸要素の慣性モーメント [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
- m_d : 長さ $9d/32$ の要素の慣性モーメント [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
- k_1 : 大径軸要素の回転ばね定数 [$\text{N}\cdot\text{m/rad}$]
- k_2 : 小径軸要素の回転ばね定数 [$\text{N}\cdot\text{m/rad}$]
- k_d : 長さ $9d/32$ の要素の回転ばね定数 [$\text{N}\cdot\text{m/rad}$]
- α : 曲げモーメントと傾き角の比例係数
- β : 軸直径比
- $\bar{\varepsilon}$: 固有角振動数の平均誤差
- κ : せん断定数
- ν : ポアソン比
- ρ : 密度 [kg/m^3]
- τ : せん断係数
- ψ : 曲げモーメントによる軸直径変化部断面の傾き角 [rad]

ω_n : 固有角振動数 [rad/s]

3. 提案方法

本研究では、高田らの方法を参考にして、軸直径変化部の形状によらず、その部分の曲げ剛性低下を考慮することのできる方法を提案する。この方法では、一般的な1次元梁の有限要素モデル（以下、1D FEMモデルと表記）を用いた軸振動解析ソフトウェアに適用することを想定すると、断面が一般的な梁要素では、どの梁要素においても、その両端における曲げ剛性は等しいことが望ましい。しかし、軸直径変化部の要素においては、曲げ剛性の低下があるため、その両端における曲げ剛性が異なってしまう。そこで、小径側に有限長さの軸要素を設け、その要素の曲げ剛性を適切に設定することにより、軸直径変化部の曲げ剛性低下を既存のソフトウェアを改修することなく考慮できるようにする。

3・1 1次元梁の有限要素モデルによるロータのモデル化

1D FEMモデルを用いた軸振動解析ソフトウェアでは、付録A3の式(A3.1)の運動方程式を用いて軸振動の数値解析が行われる。付録A4と付録A5にそれぞれ、梁要素の質量行列と剛性行列を示す。軸全体の剛性行列は、付録A6に示されるように重ね合わせによって構成される。ここで、重ね合わせとは単純和であり、ばねの結合方法では並列結合に相当する。軸全体の質量行列も同様の重ね合わせによって構成される。

3・2 軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性

小径軸の先端に作用する曲げモーメント M によって生じる軸直径変化部断面の傾き角 ψ (図A2.1参照)を、片持ち梁のたわみ角と等価とにおいて、軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性を求める。

曲げモーメント M と軸直径変化部断面のたわみ角 ψ の関係は式(1)で与えられる(付録A2参照)。

$$M = \alpha E h^3 \psi \quad (1)$$

図1に示される長さ l 、ヤング率 E 、断面二次モーメント I_d の一様断面の片持ち梁が先端に曲げモーメント M を受けたときの先端のたわみ角 ψ は、式(2)で与えられる(中沢他, 1973)。

Fig. 1 Slope of cantilever beam by bending moment

$$\psi = \frac{Ml}{EI_d} \quad (2)$$

式(1)と式(2)から、軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性 EI_d を表す式(3)が得られる。

$$EI_d = E \alpha h^3 l \quad (3)$$

3・3 回転ばねの直列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形による剛性低下を考慮したモデル

1D FEMモデルにおいて、軸直径変化部断面の弾性変形による剛性低下を考慮したモデルを図2に示す。

Fig. 2 1D beam model in consideration for elasticity of stepped cross-section

3つの節点で2つの梁要素を定義し、大径梁右端の節点2の曲げ剛性 EI_1' と小径梁の左端の節点2の曲げ剛性 EI_2' をそれぞれ式 (4) と式 (5) の直列結合によって求める。

$$EI_1' = E \frac{I_1 I_d}{I_1 + I_d} \quad (4)$$

$$EI_2' = E \frac{I_2 I_d}{I_2 + I_d} \quad (5)$$

次に、大径梁と小径梁の結合部（節点2）の曲げ剛性を、通常の重ね合わせ、すなわち並列結合によって求める。

$$EI'' = EI_1' + EI_2' = E \left(\frac{I_1 I_d}{I_1 + I_d} + \frac{I_2 I_d}{I_2 + I_d} \right) \quad (6)$$

式 (4), (5), (6) を図3を用いて説明する。

図3(a)は、2つの梁要素について1つの回転自由度に着目した慣性モーメントと回転ばねの結合を模式的に示したものである。

1D FEM モデルにおける運動方程式、梁要素の質量行列、梁要素の剛性行列、軸全体の剛性行列の構成方法をそれぞれ、付録 A3, A4, A5, A6 に示す。付録 A3 の運動方程式における変位ベクトル $\{X\}$ の x 軸周りの回転角 θ_x のみを考えると、付録 A5 より、節点1と節点2で定義される要素1と要素2の回転ばね k_1 と k_2 はそれぞれ、 $k_1 = EI_1(4+\tau)/\{(1+\tau) \cdot h\}$ と $k_2 = EI_2(4+\tau)/\{(1+\tau) \cdot l_2\}$ で与えられ、これらの回転ばねが付録 A6 に示される様に2つの要素が重複する節点2では重ね合わせ、すなわち並列結合されて k_1+k_2 となる。要素1と要素2の慣性モーメント m_1 と m_2 についても回転ばねと同様に重ね合わせられて2つの要素が重複する節点2では m_1+m_2 となる。また、一様断面の1つの梁要素の両端において質量、慣性モーメント、並進ばね、回転ばねは同一の値となる。一般的な1D FEM モデルではこの様にして質量と剛性の全体行列が構成される。並進自由度についても同様である。但し、図3(a)では軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性低下は考慮されていない。

一方、図3(b)は、軸直径変化部の節点2における断面の弾性変形による曲げ剛性低下を、断面の弾性変形を表す回転ばね k_d を用いて、 k_1 と k_d の直列結合ばね $k_1 k_d / (k_1 + k_d)$ と k_2 と k_d の直列結合ばね $k_2 k_d / (k_2 + k_d)$ を並列結合したモデルで表したものであり、節点2における回転ばねは図3(b)中に示される様に $k_1 k_d / (k_1 + k_d) + k_2 k_d / (k_2 + k_d)$ となる。

(a) Parallel connection of each rotational spring for two beam elements

(b) Parallel connection of each series-connected rotational spring for two beam elements

Fig. 3 Assembling rotational springs for two adjacent elements in 1D FEM Model

式 (6) において軸直径変化部断面の弾性変形を表す断面二次モーメント I_d は式 (3) で与えられるが、このままでは軸要素長 l によって I_d が変化してしまうため、妥当な l の値を検討する。式 (3) に式 (A2.3) を代入すると円板の厚さ h が消去され、式 (7) に示される様に断面二次モーメント I_d は小径軸の要素の直径 d と長さ l のみで表される。

$$I_d = \frac{\pi}{18} d^3 l \quad (7)$$

断面二次モーメント I_d を小径軸の断面二次モーメント I_2 と等価とおくと、中実円形断面軸では

$$I_d = I_2 = \frac{\pi}{64} d^4 \quad (8)$$

となり、式 (7) と式 (8) より、軸直径変化部断面の弾性変形分と等価な曲げ剛性を与える小径軸の長さを表す式 (9) の条件が得られる。

$$l = \frac{9}{32} d \quad (9)$$

式 (9) は、曲げモーメントによる軸直径変化部断面の傾き角と小径軸のたわみ角が等価となる、小径軸の長さを示している。すなわち、式 (9) で与えられる長さを持つ直径 d の小径軸の要素は、軸直径変化部断面の等価な曲げ剛性 EI_d の性質と通常の曲げ剛性 EI_2 の性質を兼ね備えている。

$$EI_d = EI_2 \quad (10)$$

よって、妥当な l として式 (9) の値を採用し、 I_d としては式 (8) の値を採用する。その結果、断面 A-A における曲げ剛性 EI_A を表す式 (6) は、式 (11) となる。

$$EI_A = EI'' = E \left(\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_2 I_2}{I_2 + I_2} \right) = E \left(\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_2}{2} \right) \quad (11)$$

式 (11) によって、軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性低下を考慮することができるが、大径梁要素、小径梁要素、共に梁要素の両端で曲げ剛性が異なるため ($EI_1 \neq EI_1'$, $EI_2' \neq EI_2$)、一般的な 1D FEM モデルが適用された軸振動解析環境にこの方法を適用することが容易ではない。

3・4 回転ばねの並列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形による剛性低下を考慮したモデル

一般的な 1D FEM モデルで用いられている回転ばねの並列結合によって、軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性低下を考慮することができるモデル化方法を提案する。

図 4 は、ここで提案する軸直径変化部のモデル化方法を示したものである。

Fig. 4 1D beam model in consideration for elasticity of stepped cross-section using the method proposed by the authors

まず、長さ $9d/32$ の梁要素を軸直径変化部の小径部に設ける。

次に、式 (11) で示される断面 A-A における曲げ剛性 EI_A を、一般的な 1D FEM モデルで用いられる重ね合わせ、すなわち並列結合で表すことを考える。図 4 において、長さ $9d/32$ の小径梁要素の等価曲げ剛性を EI_{eq} とおいて節点 2 と節点 3 で各々の曲げ剛性が並列結合され、節点 2, 3 の剛性が直列結合されたものが式 (12) であり、これは式 (11) と等価である。

$$EI_A = E \frac{(I_1 + I_{eq}) \cdot (I_2 + I_{eq})}{(I_1 + I_{eq}) + (I_2 + I_{eq})} \quad (12)$$

式 (12) について図 5 を用いて説明する。

図 5 は、図 4 の軸直径変化部の節点 2 における断面の弾性変形による曲げ剛性低下を、節点 2 と節点 3 で定義される長さ $9d/32$ の梁要素の回転ばね k_{eq} を用いて、節点 2 と節点 3 のトータルの回転ばねで表したモデルである。図 5 では、長さ $9d/32$ の梁要素の慣性モーメントを m_d で表している。節点 2 の回転ばねは要素 1 の回転ばね k_1 と長さ $9d/32$ の要素の回転ばね k_{eq} が並列結合されて k_1+k_{eq} となり、節点 3 の回転ばねは長さ $9d/32$ の要素の回転ばね k_{eq} と要素 2 の回転ばね k_2 が並列結合されて k_2+k_{eq} となる。節点 2 と節点 3 のトータルの回転ばねは、節点 2 の回転ばね k_1+k_{eq} と節点 3 の回転ばね k_2+k_{eq} が直列結合されて $(k_1+k_{eq}) \cdot (k_2+k_{eq}) / \{(k_1+k_{eq}) + (k_2+k_{eq})\}$ となる。

Fig. 5 Assembling rotational springs for tree adjacent elements in 1D FEM Model

式 (12) が式 (11) と等価であるので、曲げ剛性の等価断面二次モーメント I_{eq} は式 (13) となる。

$$I_{eq} = \frac{I_1 I_2 - I_1^2 + \sqrt{I_1^4 + 7I_1^2 I_2^2 + 6I_1 I_2^3 + 2I_2^4}}{2(I_1 + I_2)} \quad (13)$$

図 4 の節点 2 と節点 3 で定義される長さ $9d/32$ の梁要素を軸直径変化部の小径側に設けて、その部分の曲げ剛性を EI_{eq} とおくことで、断面 A-A の弾性変形を考慮した曲げ剛性を表現することができる。ただし、式 (13) が成立するのは、式 (A2.3) が成立するおよそ $h/d_0 \geq 0.2$ の範囲においてである。また、小径軸の長さ l_2 が $9d/32$ に近くなるような短い梁要素を用いざるを得ないような場合は適用対象外となる。しかし、これらの制約を受けない形状の軸については、モデル化の精度を向上させることができる。

3・5 曲げ剛性の等価軸径の検討

本節では、軸直径変化部の曲げ剛性低下を把握し易くするために、等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} を定義し、 d_{eq} が軸直径比 $\beta (=d/d_0)$ に対してどのように変化するかを検討する。

等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径を d_{eq} として、式 (13) で示される曲げ剛性の等価断面二次モーメント I_{eq} を式 (8) の中実円形断面軸の断面二次モーメントの形で表すと、式 (14) となる。

$$I_{eq} = \frac{\pi}{64} d_{eq}^4 \quad (14)$$

式 (14) より、等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} は式 (15) で表される。

$$d_{eq} = \sqrt[4]{\frac{64}{\pi} I_{eq}} \quad (15)$$

式 (13) に $I_1=\pi d_0^4/64$, $I_2=\pi d^4/64$ を代入して I_{eq} を d_0 と d の関数で表し, 軸直径比 $\beta(=d/d_0)$ と等価軸径比 d_{eq}/d の関係を求めると, 図 6 の曲線が得られる. この関係の特徴は, 軸直径比 β が小さくなると等価軸径比 d_{eq}/d が 0.8409 に漸近する点である. これより, 式 (A2.3) が成り立つ h/d_0 の範囲では, 大径軸直径 d_0 が小径軸直径 d に対していくら大きくなっても, 等価な曲げ剛性 EI_{eq} は小径軸の曲げ剛性 EI_2 の $0.8409^4=0.4979$ 倍を下回らないと言える.

Fig. 6 Relationship between β and d_{eq}/d

以上により, 長さ $9d/32$ の小径梁要素の曲げ剛性を EI_{eq} とする, あるいは, 長さ $9d/32$ の小径梁要素の直径を式 (15) の等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} とすれば, 一般的な一次元梁モデルが適用された軸振動解析ソフトウェアで, 軸直径変化部の弾性変形を考慮した軸振動 (曲げ振動) の解析を簡便に実現することができる. ただし, 本提案方法では長さ $9d/32$ の小径梁要素で軸直径変化部の曲げ剛性低下を表現しているため, 等価軸径 d_{eq} を用いたモデル化では軸の質量と軸の有効せん断面積を実際の軸より小さく見積もることになる. そこで, 等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} を使って高精度なモデル化を行うには, 長さ $9d/32$ の小径梁要素の部分に外径 d , 内径 d_{eq} のディスク要素を付加し, 有効せん断面積を $\kappa\pi d_{eq}^2/4$ ではなく $\kappa\pi d^2/4$ とすれば良い. ここで, κ はせん断定数 $\kappa=6(1+\nu)/(7+6\nu)$ である. なお, 有効せん断面積を $\kappa\pi d^2/4$ とした場合のせん断係数 τ は $\tau=(7+6\nu)d^2/(4l^2)$ となる (付録 A4 参照).

4. 提案方法の妥当性の検証

本研究で提案する, 1D FEM モデルにおける軸直径変化部のモデル化方法の妥当性を検証するために, 自由支持状態の曲げモードの固有振動数と静荷重による曲げ変形を, 付録 A7 に示す方法で 1D FEM モデルとの等価性を高めた 3 次元有限要素モデル (以下, 3D FEM モデルと表記) と比較した.

4・1 曲げモードの固有振動数

ここでは, 図 7 の(a)と(b)に示す 2 種類の軸を取り上げる.

軸 A は 2 箇所 to 同一径の大径部を持ち, 軸 B は 2 箇所 to 異なる径の大径部を持つ. 軸の寸法を以下に示す.

- ・ Shaft A ; 全長 350mm, 小径部外径 $\phi 20$ mm, 大径部外径 $\phi 25.4$ mm ($\beta=0.7874$) と $\phi 25.4$ mm ($\beta=0.7874$)
大径部の位置 : 左端から 57.3mm~82.7mm ($h/d_0=1$), 162.3mm~187.7mm ($h/d_0=1$)
- ・ Shaft B ; 全長 350mm, 小径部外径 $\phi 20$ mm, 大径部外径 $\phi 25.4$ mm ($\beta=0.7874$) と $\phi 35.4$ mm ($\beta=0.5650$)
大径部の位置 : 左端から 57.3mm~82.7mm ($h/d_0=1$), 162.3mm~187.7mm ($h/d_0=0.7175$)

軸 A, 軸 B 共に, 材料特性はヤング率 $E=2.09\times 10^{11}$ N/m², 横弾性係数 $G=8.0335\times 10^{10}$ N/m², ポアソン比 $\nu=0.3008$, 密度 $\rho=7846$ kg/m³ とした.

Fig. 7 3D FEM models of shafts with stepped cross-sections

図7の3D FEMモデルの自由支持状態の固有値解析結果（曲げ1次～4次の固有振動数）を参照して、図8の1D FEMモデルに提案方法を適用した場合の固有振動数を評価した．ここで、3D FEMモデルのヤング率は補正後の $E' = 2.05175 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ とした（付録A7参照）．なお、図8の1D FEMモデルでは左端から5, 10, 17, 22番目の要素長を $9d/32$ としている．

Fig. 8 1D FEM models of shafts with stepped cross-sections

図9は軸Aの曲げ1次～4次の固有モードを示したものである．

Fig. 9 Eigenmodes of Shaft A

表 1 は、図 7(a)の軸直径変化部を有する軸 A の 3D FEM モデル（参照モデル）と、図 8(a)の軸 A の下記の 3 つの 1D FEM モデルについて曲げ 1 次～4 次の固有振動数の比較を示したものである。

- ・ 1D Model 1 : 軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D FEM モデル
- ・ 1D Model 2 : 小堀の方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D FEM モデル
- ・ 1D Model 3 : 提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D FEM モデル

Table 1 Comparison of Eigenfrequencies of Shaft A

Mode	3D Model	Unit: Hz			
		1D Model 1 (Error)	1D Model 2 (Error)	1D Model 3 (Error)	
1	763.64	772.55 (1.17%)	772.55 (1.17%)	767.09 (0.45%)	
2	2050.9	2064.1 (0.64%)	2064.1 (0.64%)	2055.0 (0.20%)	
3	3964.3	4027.7 (1.60%)	4027.7 (1.60%)	3985.8 (0.54%)	
4	6307.7	6382.3 (1.18%)	6382.3 (1.18%)	6323.7 (0.25%)	

軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 では最大で 1.60%の誤差がある。図 8(a)の軸 A のモデルでは、式 (A1.1) の等価曲げ剛性を与える大径部の軸径 d_{eq} が大径部外径 d_0 より大きくなるため、小堀の方法は適用できない。そのため、1D Model 2 の固有振動数は 1D Model 1 と同一の値となっている。提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の誤差は 0.54%以下である。

表 2 は、図 7(b)の軸直径変化部を有する軸 B の 3D FEM モデル（参照モデル）と、図 8(b)の軸 B の前述の 3 つの 1D FEM モデルについて曲げ 1 次～4 次の固有振動数の比較を示したものである。

Table 2 Comparison of Eigenfrequencies of Shaft B

Mode	3D Model	Unit: Hz			
		1D Model 1 (Error)	1D Model 2 (Error)	1D Model 3 (Error)	
1	733.33	754.86 (2.94%)	739.64 (0.86%)	731.99 (-0.18%)	
2	2034.8	2049.8 (0.74%)	2047.6 (0.63%)	2036.1 (0.06%)	
3	3804.9	3924.8 (3.15%)	3841.9 (0.97%)	3812.8 (0.21%)	
4	6161.8	6245.6 (1.36%)	6226.5 (1.05%)	6160.2 (-0.03%)	

軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 では最大で 3.15% の誤差がある. 図 8(b) の軸 B のモデルにおいて, 左端から 57.3mm~82.7mm の位置にある大径部では図 8(a) の軸 A のモデルと同様に式 (A1.1) の等価曲げ剛性を与える大径部の軸径 d_{eq} が大径部外径 d_0 より大きくなるため小堀の方法は適用できないが, 左端から 162.3mm~187.7mm の位置 (中央部) にある大径部では d_{eq} が d_0 より小さくなるため, 小堀の方法を適用することができる ($d_{eq}=31.41$ mm). 小堀の方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 2 では, 最大で 1.05% の誤差がある. 提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の誤差は 0.21% 以下である.

なお, 軸 A の 1D Model 3 より, 軸 B の 1D Model 3 の方が固有振動数の誤差が小さい理由は, 軸直径比 β の影響によるものと考えられる. 付録 A2 に示したように, 軸直径比 β が大きいほど式 (A2.3) による近似精度が低下する. そのため, 提案方法を適用した 1D Model 3 では, $\beta=0.7874$ の軸直径変化部を 4 箇所持つ軸 A より, $\beta=0.7874$ と $\beta=0.5650$ の軸直径変化部を 2 箇所ずつ持つ軸 B の方が精度の高いモデルとなっている.

以上, 図 8 の軸直径変化部を有する 2 つの軸, 軸 A と軸 B の 1D FEM モデルについて, 図 7 の 3D FEM モデルを参照して, 軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない場合, 小堀の方法で考慮した場合, 提案方法で考慮した場合の 3 ケースで曲げ 1 次~4 次の固有振動数を比較し, 提案方法の妥当性を確認した.

4・2 静荷重による曲げ変形

ここでは, 図 7(b) の軸 B の中央の大径部と右側の小径部からなる軸, すなわち図 8(b) の軸 B の節点 18 から節点 35 までの軸を取り上げる. 大径部外周面を拘束して小径部先端に曲げモーメントを与えたときのたわみ曲線を, 図 10 の 3D FEM モデルと図 11 の 1D FEM モデルについて求めて比較を行った. 図 11 の 1D FEM モデルでは左端から 5 番目の要素長を $9d/32$ としている.

Fig. 10 3D FEM model of shaft with stepped cross-section

Fig. 11 1D FEM model of shaft with stepped cross-section

1D FEM モデルでは, 軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1, 小堀の方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した提案方法を適用した 1D Model 2, 提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の 3 つのモデルについてたわみ曲線を求めた. ここで, 小径部先端に与える曲げモーメントは $M=100$ N·m とした. ヤング率とポアソン比は, 4.1 節で用いたものと同じ値を用いた.

図 12 は各モデルのたわみ曲線を示したものである. 同図には先端に生じる最大たわみの値を凡例の順に示した. 3D FEM モデルに対する 1D Model 1, 1D Model 2, 1D Model 3 の最大たわみの絶対値の誤差はそれぞれ, -3.92%, -1.33%, -0.10% であり, 提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮することによってたわみ量の誤差を大幅に低減できることが確認された.

Fig. 12 Deflection of shaft with stepped cross-section due to bending moment

5. 結 言

軸直径変化部を持つ中実円形断面軸の曲げ振動解析の高精度化を目的として、軸直径変化部の小径軸側に設けた長さ $9d/32$ の梁要素の曲げ剛性を減じることによって、軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性の低下を表現する方法を提案し、妥当性を確認した。提案方法は、軸直径変化部においても隣接する梁要素の曲げ剛性の結合に特別な配慮を必要としないため、一般的な 1 次元梁の有限要素モデルを用いた軸振動解析環境に容易に適用可能である。

文 献

- Darlow, M. S., Murphy, B. T., Elder, J. A. and Sandor, G. N., Extension of the transfer matrix method for rotordynamic analysis to include a direct representation of conical sections and trunnions, Transactions of the ASME, Vol.102 (1980).
- Friswell, M.I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D. and Lees, A. W., Dynamics of rotating machines, Cambridge University Press, (2010).
- 林 巖, 岩附 信行, 牧 泰希, 軸一体円板の固有振動モードについて (第 2 報 円板と軸の境界部における弾性境界条件式のばね定数), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.56, No.524 (1990), pp952-957.
- 小堀 与一, タービン車軸の曲げこわさと固有振動数の模型実験, 日本機械学会誌, Vol.32, No.243 (1966), pp.1675-1681.
- 長江 信顕, 後藤 知伸, ロータの振動方程式における特性行列の実験同定 (理論とシミュレーション), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.803 (2013), pp.2314-2328.
- 中沢 一, 長屋 二郎, 加藤 博, 最新機械工学講座 材料力学, 産業図書 (1973), p.111.
- 高田 昌二, 舟竹 良雄, 稲垣 嘉之, 軸直径変化部を有するロータの曲げ振動モードに関する振動計算の高精度簡易モデルの提案, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.75, No.752 (2009), pp.824-829.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., 長谷川 節 訳, Theory of plates and shells 板とシェルの理論, ブレイン図書出版(1973), p.272.
- 内海 政春, 川崎 聡, 瀧田 純也, 島垣 満, 安達 和彦, 井上 剛志, モンテカルロ法と実験計画法によるロケットターボポンプ用ロータの軸形状の最適設計, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2013 講演論文集 (2013).
- Vannini, G., Smalley, A. J., Hattenbach, T., Weyermann, H. P. and Hollingsworth, J. R., Calibrating a large compressor's rotordynamic model - method and application, 7th IFFoMM Conference on Rotordynamics, Vienna, Austria (2006), pp.25-28.

References

- Darlow, M. S., Murphy, B. T., Elder, J. A. and Sandor, G. N., Extension of the transfer matrix method for rotordynamic Analysis to include a direct representation of conical sections and trunnions, Transactions of the ASME, Vol.102 (1980).
- Friswell, M.I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D. and Lees, A. W., Dynamics of rotating machines, Cambridge University Press, (2010).
- Hayashi, I., Iwatsuki, N. and Maki, H., Natural mode of vibration of a circular plate with a solid shaft : 2nd report: spring coefficients in elastic boundary conditions between circular plates and solid shafts, Transactions of the JSME, Series C, Vol.56, No.524 (1990), pp.952-957 (in Japanese).
- Kobori, Y., An experiment on the bending stiffness and natural frequency of turbine - rotor - model shaft, Transactions of the JSME, Vol.32, No.243 (1966), pp.1675-1681 (in Japanese).
- Nagae, N. and Goto, T., Experimental identification of characteristic matrices in vibration equation for a rotor (theory and simulation), Transactions of the JSME, Series C, Vol.79, No.803 (2013), pp.2314-2328 (in Japanese).
- Nakazawa, H., Nagaya, J. and Kato, H., Zairyo rikigaku, Sangyo Tosho Publishing (1973), p.111 (in Japanese).
- Takada, S., Funatake, Y. and Inagaki, Y., Proposal of simplified model for improved prediction of bending mode vibration of stepped rotor, Transactions of the JSME, Series C, Vol.75, No.752 (2009), pp.824-829 (in Japanese).
- Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., trans. Hasegawa, S., Theory of plates and shells, Burein Tosho Shuppan (1973), p.272 (in Japanese).
- Uchiumi, M., Kawasaki, S., Takida, J., Shimagaki, M., Adachi, K. and Inoue, T., Optimum design of shaft configuration by monte carlo method and design of experiments method for rocket turbopump rotor, JSME Dynamics and Design Conference 2013, (2013) (in Japanese).
- Vannini, G., Smalley, A. J., Hattenbach, T., Weyermann, H. P. and Hollingsworth, J. R., Calibrating a large compressor's rotordynamic model - method and application, 7th IFFoMM Conference on Rotordynamics, Vienna, Austria (2006), pp.25-28.

付 録

A1. 小堀の方法

小堀 (1966) は、図 A1.1 に示される軸において、軸直径変化部の曲げ剛性の低下を、等価曲げ剛性を与える大径部の軸径 d_{eq} を用いて表した。式 (A1.1) は、小堀によって提案された、幅径比 h/d の 3 次式によって d_{eq} を与える式である。

Fig. A1.1 Modeling of Shaft with stepped cross-section using Kobori Method

$$d_{eq} = d \left[1 + 0.4080 \left(\frac{h}{d} \right) + 0.04515 \left(\frac{h}{d} \right)^2 - 0.0099 \left(\frac{h}{d} \right)^3 \right] \quad (A1.1)$$

大径部の等価軸径 d_{eq} を与える式 (A1.1) の妥当性は実験で評価されている。しかし、等価軸径 d_{eq} は h/d のみの関数であり大径部の軸外径 d_0 が考慮されないため、形状によっては、等価軸径 d_{eq} が大径部外径 d_0 より大きくなるという不適切な結果を与える。図 A1.2 は h/d と d_{eq}/d の関係を示したものである。例えば、 h/d が 1 の場合には d_{eq} が $1.443 d$ となり、 $d_0 < 1.443 d$ であればこの方法を適用することができない。

Fig. A1.2 Equivalent diameter of shaft on bending stiffness

A2. 高田らの方法

図 A2.1 は、大径軸外周面が固定された軸直径変化部を持つ軸において、小径軸の先端に曲げモーメント M が作用した場合に軸直径変化部断面 A-A が弾性変形することによって断面 A-A の法線に角度 ψ の傾きが生じる様子を示したものである。なお、図 A2.1 は MATLAB® のサードパーティ Toolbox である SDTools 社製の Structural Dynamics Toolbox を使用して作成した 3 次元有限要素モデルである。

曲げモーメント M と傾き角 ψ の間には式 (A2.1) の関係が成り立つ (Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1973)。

Fig. A2.1 Deflection of stepped cross-section by bending moment

$$M = \alpha E h^3 \psi \quad (\text{A2.1})$$

M : 曲げモーメント [Nm]

α : 曲げモーメントと傾き角の比例係数
 ψ : 軸直径変化部断面の傾き角 [rad]
 h : 円板の厚さ (大径軸の軸方向長さ) [m]
 E : ヤング率 [N/m²]

式 (A2.1) における α は, 円板の厚さと直径との比 h/d_0 がゼロに近付くと式 (A2.2) で示され, h/d_0 が大きくなると式 (A2.3) で示される.

$$\alpha = \frac{\pi}{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1 - (\beta^2 + 1) \ln \beta}, \left(\frac{h}{d_0} \cong 0 \right) \quad (\text{A2.2})$$

$$\alpha = \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{\beta d_0}{h} \right)^3 \quad (\text{A2.3})$$

式 (A2.2) は軸直径変化部の直径比 $\beta (=d/d_0)$ とポアソン比 ν のみの関数で表され (Darlow, et al., 1980), 式 (A2.3) は円板の厚さ h , 大径軸直径 d_0 , 軸直径比 β で表される (高田他, 2009, 林他, 1990).

高田らは, 式 (A2.1) と長さ l の片持ち梁の理論式の関係から求めた軸直径変化部断面の弾性変形分の曲げ剛性 EI_d は式 (A2.4) で表され, 軸直径変化部の等価な曲げ剛性 EI' は EI_d と通常の梁の曲げ剛性 EI を直列結合した式 (A2.5) で表されるとしている.

$$EI_d = E \frac{4}{9} \alpha h^3 l \quad (\text{A2.4})$$

$$EI' = \frac{EI \cdot EI_d}{EI + EI_d} \quad (\text{A2.5})$$

式 (A2.2) が成り立つ $h/d_0 \cong 0$ の薄い円板の場合は, 円板が軸の曲げ剛性に及ぼす影響を無視できる. しかし, 式 (A2.3) が成り立つ状況では, 軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性の低下が起こる. そこで, 高田らは, 式 (A2.3) が成り立つ場合の軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性低下を, 式 (A2.5) の回転ばねの直列結合で表現している. また, 高田らは, 3次元有限要素法数値解析コード SAMCEF-ROTOR を用いて, 軸直径比 $\beta=0.3175$ の場合に式 (A2.3) が成り立つ h/d_0 の範囲が $h/d_0 \geq 0.2$ であることを示している.

高田らの方法では, 式 (A2.5) に示されるように, 長さを持たない回転ばね EI_d を梁要素の片側の節点の回転ばねに直列結合する必要がある. 1次元梁の有限要素モデルを用いた軸振動解析ソフトウェアでは, 有限長の梁要素でのみ回転ばねが定義され, 隣接する梁要素の回転ばねは重複節点において重ね合わせによって結合 (並列に結合) されるため, 特定の節点で回転ばねを直列に結合することが困難と思われる.

高田らが示した式 (A2.3) が成り立つ h/d_0 の範囲を Structural Dynamics Toolbox で確認すると共に, 軸直径比 β が異なる場合に式 (A2.3) が成り立つ h/d_0 の範囲がどのようになるかを確認するために, 図 A2.1 の3次元有限要素モデルを用いて, 軸直径比 $\beta=0.3175$, $\beta=0.5650$, 及び $\beta=0.7874$ の場合について α と h/d_0 の関係を求めた. ここで, 図 A2.1 の3次元有限要素モデル寸法は $d_0=25.4\text{mm}$, $l=12.7\text{mm}$ とし, 材料特性はヤング率 $E=2.050 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 横弾性係数 $G=7.880 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, ポアソン比 $\nu=0.3008$ とした.

3次元有限要素モデルによる α と h/d_0 の関係の算出手順は次の通りである.

図 A2.1 において座標原点を A-A 断面の軸中心におき, x 軸周りの曲げモーメント M が小径軸の先端の座標 (0, 0, l) に作用したときの yz 平面における小径軸のたわみ曲線を求めて, 式 (A2.6) の3次式で近似する.

$$y(z) = c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z, \quad (0 \leq z \leq l) \quad (\text{A2.6})$$

c_1, c_2, c_3 : たわみ曲線の係数

A-A 断面の傾き角 ψ は、座標原点での傾き $dy(0)/dz=c_3$ から

$$\psi = \tan^{-1} c_3 \quad (\text{A2.7})$$

で与えられる。よって、大径部の軸方向長さ（円板の厚さ） h を変えて下記の (a)から(d)の手順を実施することで1つの β について α と h/d_0 の関係を求めることができる。

- (a) 図 A2.1 の 3D FEM モデルで小径軸の先端に曲げモーメント M を与えて小径軸のたわみ曲線を求める。
- (b) 小径軸のたわみ曲線を式 (A2.6) の 3 次式で曲線適合して原点での傾き c_3 を求める。
- (c) 式 (A2.7) によって A-A 断面の傾き角 ψ を求める。
- (d) 式 (A2.1) によって α を求める。

図 A2.2, 図 A2.3, 及び図 A2.4 はそれぞれ、軸直径比 $\beta=0.3175$, $\beta=0.5650$, 及び $\beta=0.7874$ の場合について α と h/d_0 の関係を求めた結果である。これらの図には式 (A2.2) と式 (A2.3) の値をそれぞれ青色と緑色の実線で示した。式 (A2.3) が成り立つ h/d_0 の範囲は、いずれの β の場合にも、およそ $h/d_0 \geq 0.2$ である。また、 β が大きくなる程、式 (A2.3) による近似精度が低下している。

Fig. A2.2 Relationship between α and h/d_0 ($\beta=0.3175$)

Fig. A2.3 Relationship between α and h/d_0 ($\beta=0.5650$) Fig. A2.4 Relationship between α and h/d_0 ($\beta=0.7874$)

A3. 運動方程式

1次元梁の有限要素モデルでは、軸受で支持され、回転数 Ω で回転する節点数 n のロータの運動方程式は式 (A3.1) で表される。ここで、 $[]$ は行列を表し、 $\{ \}$ はベクトルを表す。

$$[M]\{\ddot{X}\} + ([C] + [C_b] + \Omega[G])\{\dot{X}\} + ([K] + [K_b])\{X\} = \{F\} \quad (\text{A3.1})$$

$[M]$: ロータの質量行列, サイズ $4n \times 4n$, 対称行列

$[C]$: ロータの減衰行列, サイズ $4n \times 4n$, 対称行列

$[C_b]$: 軸受の減衰行列, サイズ $4n \times 4n$

$[G]$: ロータのジャイロ行列, サイズ $4n \times 4n$, 歪対称行列

$[K]$: ロータの剛性行列, サイズ $4n \times 4n$, 対称行列

$[K_b]$: 軸受の剛性行列, サイズ $4n \times 4n$

$\{X\}$: 変位ベクトル, サイズ $4n \times 1$,

$\{X\} = \{x_1, y_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, x_2, y_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \dots, x_n, y_n, \theta_{xn}, \theta_{yn}\}^T$, T は転置を表す記号

$\{F\}$: 力ベクトル, サイズ $4n \times 1$,

$\{F\} = \{f_{x1}, f_{y1}, M_{\theta_{x1}}, M_{\theta_{y1}}, f_{x2}, f_{y2}, M_{\theta_{x2}}, M_{\theta_{y2}}, \dots, f_{xn}, f_{yn}, M_{\theta_{xn}}, M_{\theta_{yn}}\}^T$, f は力 [N], M はモーメント [Nm]

変位ベクトルの要素 $x_i, y_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ ($i=1, 2, \dots, n$) はそれぞれ, i 番目の節点の x 軸方向並進変位, y 軸方向並進変位, x 軸周りの回転角, y 軸周りの回転角である.

自由支持された非回転時のロータの運動方程式は, 式 (A3.1) から軸受剛性項 $[K_b]$, 軸受減衰項 $[C_b]$, 及びロータのジャイロ項 $[G]$ を取り除いて式 (A3.2) で表される.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (\text{A3.2})$$

A4. 梁要素の質量行列

梁要素の質量行列 $[M_e]$ (対称行列) の要素 m_{ij} ($i=1, 2, \dots, 8, j=1, 2, \dots, 8$) は以下のように定義される (長江, 後藤, 2013) .

$$\left. \begin{aligned} m_{12} &= m_{13} = m_{16} = m_{17} = m_{24} = m_{25} = m_{28} = m_{34} = m_{35} = m_{38} = m_{46} = m_{47} = m_{56} = m_{57} = m_{68} = m_{78} = 0 \\ m_{11} &= m_{22} = m_{55} = m_{66} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (312 + 558\tau + 280\tau^2) + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot 36 \\ m_{14} &= -m_{23} = -m_{58} = m_{67} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (44 + 77\tau + 35\tau^2) \cdot l + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (3 - 15\tau) \cdot l \\ m_{15} &= m_{26} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (108 + 252\tau + 140\tau^2) - \left\{ \alpha_i / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot 36 \\ m_{18} &= -m_{27} = m_{36} = -m_{45} = -\left\{ \alpha_m / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (26 + 63\tau + 35\tau^2) \cdot l + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (3 - 15\tau) \cdot l \\ m_{33} &= m_{44} = m_{77} = m_{88} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (8 + 14\tau + 7\tau^2) \cdot l^2 + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (4 + 5\tau + 10\tau^2) \cdot l^2 \\ m_{37} &= m_{48} = -\left\{ \alpha_m / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (6 + 14\tau + 7\tau^2) \cdot l^2 + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau)^2 \right\} \cdot (-1 - 5\tau + 5\tau^2) \cdot l^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.1})$$

α_m : 質量係数, $\alpha_m = \rho \pi d^2 l / 3360$

α_i : 慣性係数, $\alpha_i = \rho \pi d^4 / (1920l)$

τ : せん断係数, $\tau = 12EI / (\kappa A G l^2) = (7 + 6\nu)d^2 / (4l^2)$

d : 円形断面の梁要素の外径 [m]

E : ヤング率 [N/m²]

I : 断面二次モーメント, $I = \pi d^4 / 64$ [m⁴]

κA : 有効せん断面積 [m²]

κ : せん断定数, $\kappa = (7 + 6\nu)d^2 / (4l^2)$

A : 断面積, $A = \pi d^2 / 4$ [m²]

G : 横弾性係数, $G = E / \{2(1 + \nu)\}$ [N/m²]

ν : ポアソン比

l : 梁要素の長さ [m]

A5. 梁要素の剛性行列

梁要素の剛性行列 $[K_e]$ (対称行列) の要素 k_{ij} ($i=1, 2, \dots, 8, j=1, 2, \dots, 8$) は以下のように定義される (Friswell, et al., 2010) .

$$\left. \begin{aligned}
 k_{12} &= k_{13} = k_{16} = k_{17} = k_{24} = k_{25} = k_{28} = k_{34} = k_{35} = k_{38} = k_{46} = k_{47} = k_{56} = k_{57} = k_{68} = k_{78} = 0 \\
 k_{11} &= k_{22} = k_{55} = k_{66} = -k_{15} = -k_{26} = 12EI / \{(1+\tau) \cdot l^3\} \\
 k_{14} &= k_{18} = -k_{23} = -k_{27} = k_{36} = -k_{45} = -k_{58} = k_{67} = 6EI / \{(1+\tau) \cdot l^2\} \\
 k_{33} &= k_{44} = k_{77} = k_{88} = EI(4+\tau) / \{(1+\tau) \cdot l\} \\
 k_{37} &= k_{48} = EI(2-\tau) / \{(1+\tau) \cdot l\} \\
 I &: \text{断面二次モーメント, } I = \pi d^4 / 64 \text{ [m}^4\text{]}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5.1})$$

A6. 軸全体の剛性行列の構成方法

n 個の節点で定義される $n-1$ 個の梁要素で構成される軸全体の剛性行列 $[K]$ は図 A6.1 のように、梁要素の剛性行列 $[K_e]$ の重ね合わせによって構成される (Friswell, et al., 2010)。

Fig. A6.1 Assembling Stiffness Matrix

A7. 3次元有限要素モデルの高精度化

詳細なモデル化がなされた軸の 3D FEM モデルは、節点自由度が 6 であるため、軸の曲げやねじりに加えて軸直径変化部の弾性変形も表現することができる。しかし、要素のタイプやメッシュサイズ等によって固有値解析結果が変化する。1D FEM モデルでも要素分割数によって固有値解析結果が変化するが、着目する固有モードに対して十分な要素数を確保すれば高い精度で固有値を求めることができる。そこで、ここでは一様断面軸の 1D FEM モデルの曲げ振動の固有振動数を参照して、3D FEM モデルのヤング率を補正する方法で 3D FEM モデルの高精度化を行う。以下にその手順を示す。

まず、全長が図 7 の軸と同一の 350mm で外径が図 7 の軸の小径部と同一の 20mm の、図 A7.1 に示した一様断面軸の 3D FEM モデルについて、自由支持状態の固有値解析を行って 4 次までの曲げ振動の固有振動数を求める。要素分割は図 7 の小径部と同一とする。材料特性はヤング率 $E=2.09 \times 10^{11}$ N/m²、横弾性係数 $G=8.0335 \times 10^{10}$ N/m²、ポアソン比 $\nu=0.3008$ 、密度 $\rho=7846$ kg/m³ とした。

Fig. A7.1 3D FEM model of shaft with uniform cross-section

次に、図 A7.1 の一様断面軸の 3D FEM モデルと同一寸法、同一材料特性の、図 A7.2 の 1D FEM モデルについて自由支持状態の固有値解析を行って 4 次までの曲げ振動の固有振動数を求める。要素分割は図 8 と同一とする。

Fig. A7.2 1D FEM model of shaft with uniform cross-section

最後に、一様な中実円形断面軸の 1D FEM モデルの曲げ 1 次～4 次の固有振動数を参照して 3D FEM モデルのヤング率を補正する。ヤング率の補正には、式 (A7.1) の固有角振動数 ω_n と曲げ剛性 EI の関係から得られる式 (A7.2) を用いる。

$$\omega_n^2 \propto EI \quad (\text{A7.1})$$

$$E' = \left(\frac{1}{1 + \bar{\varepsilon}} \right)^2 \cdot E \quad (\text{A7.2})$$

E : 補正前のヤング率 [N/m^2]

E' : 補正後のヤング率 [N/m^2]

$\bar{\varepsilon}$: 曲げ 1 次～4 次の固有角振動数の平均誤差

表 A7.1 は、図 A7.2 の 1D FEM モデル（参照モデル）と図 A7.1 の 3D FEM モデルの曲げ 1 次～4 次の固有振動数の比較を示したものである。3D Model 0 がヤング率を補正する前の $E=2.09 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ としたモデルあり、3D Model 1 がヤング率を式 (A7.2) によって補正した $E'=2.05175 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ としたモデルである。1D FEM モデルに対する、ヤング率を補正する前の 3D FEM モデルの固有振動数の誤差の絶対値は最大で 1.02% であるのに対して、ヤング率を補正した後の 3D FEM モデルの固有振動数の誤差の絶対値は最大で 0.09% と約 1/11 に低減している。

Table A7.1 Comparison of Eigenfrequencies of a shaft with uniform cross-section between 1D model and 3D model

Unit: Hz

Mode	1D Model	3D Model 0 (Error)		3D Model 1 (Error)	
1	743.69	750.04	(0.85%)	743.14	(0.07%)
2	2018.8	2037.6	(0.93%)	2018.84	(0.00%)
3	3873.7	3908.8	(0.90%)	3872.85	(0.02%)
4	6236.7	6300.5	(1.02%)	6242.59	(-0.09%)