下負荷超過応力摩擦モデル

橋口 公一^{*1}, 桑山 卓也^{*2}, 鈴木 規之^{*3}, 上野 正実^{*4}, 米村 繁^{*2}

Subloading-overstress friction model

Koichi HASHIGUCHI^{*1}, Takuya KUWAYAMA^{*2},
Noriyuki SUZUKI^{*3}, Masami UENO^{*4} and Shigeru YONEMURA^{*2}^{*1}Dept. Dependent and Optimum Design, Joining and Welding Research Institute, Osaka university

11-1 Mihogaoka, Ibaragi-shi, Osaka 567-0047, Japan

^{*2, *3} Steel Research Laboratories, Nippon Steel & Sumitomo Metal Corporation

20-1 Shintomi, Futtsu-shi, Chiba 293-8511, Japan

^{*4} Dept. Agricultural Engineering, University of the Ryukyus

1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, Japan

Received 29 June 2014

Abstract

The subloading-friction model proposed formerly is capable of describing the transition from the static to the kinetic friction and the recovery of static friction, which leads to the negative rate-sensitivity, i.e. the decrease of friction resistance with the increase of sliding velocity. The generalized friction model, called the subloading-overstress friction model, is proposed by extending the subloading-friction model so as to describe not only the negative rate-sensitivity but also the positive rate-sensitivity, i.e. the increase of friction resistance with the increase of sliding velocity in this article. The numerical experiments for several levels of material parameters are shown in order to clarify the influences and the physical meanings of the material parameters in the generalized model. Further, the validity is verified by comparisons with test data obtained by executing the friction test using lubricated steels.

Key words : Friction, Overstress model, Positive rate-sensitivity, Sliding, Subloading surface model

1. 緒 言

自然界の物体は、真空中に浮遊する状態を除いて、互いに摩擦現象を生じており、静止摩擦や動摩擦は、初等教育でも学ぶ重要な物理用語であるが、これらの理論定式化は物理学の歴史における大きな空白であった。応力が降伏面に近づくにつれて塑性すべりが徐々に発達すると仮定する下負荷面 (subloading surface) の概念 (Hashiguchi, 1980, 1989) に基づく下負荷摩擦モデル(subloading-friction model) (Hashiguchi, et al., 2005; Hashiguchi and Ozaki, 2008) においては、摩擦係数は徐々に静止摩擦に達した後、滑らかに動摩擦に低下するが、その後、すべりが停止すると、停止時間に応じて接触応力比つまり接線応力/法線応力が回復する現象を統一的に表現し得、本モデルの提案により、この歴史の空白が埋められるに至った。

上記の下負荷摩擦モデルにおいては、すべり速度が大きいほど、摩擦抵抗が低下する。これは、凝着説 (Bowden and Tabor, 1958) により説明し得る。つまり、摩擦抵抗は接触表面の突起 (asperity) の凝着 (adhesion) に基づき、すべりにより凝着が剥がれて摩擦抵抗が低下して動摩擦に向かう一方、時間経過により凝着が再生されるが、すべり速度が大きいほど、凝着が再生されないことによる。これは、通常の金属、岩石、コンクリート等の乾性摩擦(dry friction)において生じるが、すべり速度の増大により、摩擦抵抗が低下するので、“負の速度鋭敏性” (negative

No. 14-00352 [DOI: 10.1299/transjsme.2014smm0575]

^{*1} 正員, 大阪大学接合科学研究所 (〒567-0047 大阪府茨木市美穂ヶ丘 11-1)^{*2} 新日鐵住金(株) (〒293-8511 千葉県富津市新富 20-1)^{*3} 正員, 新日鐵住金(株)^{*4} 琉球大学農学部農業工学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1)

E-mail of corresponding author: khashi@kyudai.jp

rate-sensitivity) と呼ばれる。逆に、すべり速度の増大とともに、摩擦抵抗が増大する現象も観察される。これは、インジウム、テフロン、高分子材料等の軟い固体や潤滑摩擦において主として粘性抵抗によって生じ、“正の速度鋭敏性” (positive rate-sensitivity) と呼ばれる。なお、通常、前者の負の速度鋭敏性を示す場合には、摩擦抵抗は後者の正の速度鋭敏性を示す場合の摩擦抵抗に比して大きく、また、前者における接触応力比の変動幅は後者の接触応力比の変動幅に比して大きく、スティックスリップ (間欠すべり) 現象を生じる。したがって、前者はネジ、楔、杭等の締結部に採用される。一方、ギア、ベアリング等の動的接触機械要素においては、後者を採用して、摩擦抵抗を低減させるとともに、スティックスリップ現象の発生が回避される。

本稿では、下負荷摩擦モデル (Hashiguchi, et al., 2005; Hashiguchi and Ozaki, 2008) が表現し得る負の速度鋭敏性に加えて、正の速度鋭敏性を表現し得るように拡張された摩擦モデルを提案する。また、本モデルに含まれる諸材料パラメータを数水準に変化させて数値実験を行って、本モデルの基本特性および諸材料パラメータの物理的意味の把握に資する。さらに、潤滑摩擦実験を実施し、その実測値との比較により、本拡張モデルの妥当性を実証する。

2. 下負荷摩擦モデルの概要

本章では、次章以降における正の速度鋭敏性を示す下負荷超過応力摩擦モデルの定式化に当たって、その基礎となる下負荷摩擦モデル (Hashiguchi, et al., 2005; Hashiguchi and Ozaki, 2008) について、合理的な物理的解釈を与えつつ簡明な説明に努める。

2・1 すべり速度、接触応力の分解および弾性すべり速度

当該物体に対する接触物体のすべり速度 (ベクトル) $\bar{\mathbf{v}}$ を当該物体の外向き法線方向部分 $\bar{\mathbf{v}}_n$ と接線方向部分 $\bar{\mathbf{v}}_t$ に加算的分解する。

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_n + \bar{\mathbf{v}}_t = -\bar{v}_n \mathbf{n} + \bar{\mathbf{v}}_t \mathbf{t}_v \quad (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}} = -\bar{v}_n \mathbf{n} \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_t \mathbf{t}_v \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\mathbf{n}$ は当該物体の表面に立てた単位外向き法線方向ベクトルであり、また、 $\bar{v}_n$, $\bar{\mathbf{v}}_t$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_n &\equiv -\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}_n = -\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{v}}_t &\equiv \|\bar{\mathbf{v}}_t\|, \mathbf{t}_v \equiv \frac{\bar{\mathbf{v}}_t}{\|\bar{\mathbf{v}}_t\|} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_v = 0, \|\mathbf{t}_v\| = 1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、摩擦現象は相手の物体が当該物体に近づくとき生じ、離反するときには生じないので、法線方向速度 $\bar{v}_n$ の定義に負号が付されている。

物質粒子の速度は、観察者の運動 (移動・回転) 速度の影響を直接受けて、異なって観察される。つまり、物質粒子の速度は非客観量である。しかし、二つの接触物体の接触点は、同一の位置ベクトルを有し、これらは観察者の運動速度の同等の影響を受ける。したがって、これらの相対速度は元より、その接触面方向の成分つまりすべり速度は、観察者の運動速度に依存しない客観量であることに留意する。

また、すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$ を弾性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^e$ と塑性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^p$ に加算的に分解する。つまり、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e + \bar{\mathbf{v}}^p \quad (4)$$

なお、弾性すべりは、接触表面のアスペリティの弾性変形による微小なものであるが、後述のように、塑性すべり速度は、接触応力には依存し、接触応力速度には依存しないと仮定されるので、弾性すべり速度を無視すると、ひずみ速度に対して接触応力速度は唯一に決まらないことになり、物理的のみならず、解析上の不都合を生じる。これは、塑性ポテンシャル論に基づく弾塑性構成式に共通の基本特性である。なお、塑性すべりに比して弾性す

べりは遥かに小さいので、すべり速度の加算分解を採用し、また、弾性すべり速度は、超弾性タイプによらず、接触応力速度に対して亜弾性タイプで関係づけられると仮定する。

法線すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}_n$ および接線すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}_t$ は、次のように、弾、塑性成分に加算分解される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= \bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}}_t^e + \bar{\mathbf{v}}_t^p \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがって、

$$\bar{\mathbf{v}}^e = \bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_t^e \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \bar{\mathbf{v}}_n^p + \bar{\mathbf{v}}_t^p \quad (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n^e &= (\bar{\mathbf{v}}^e \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^e \\ \bar{\mathbf{v}}_t^e &= \bar{\mathbf{v}}^e - \bar{\mathbf{v}}_n^e = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^e \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n^p &= (\bar{\mathbf{v}}^p \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^p \\ \bar{\mathbf{v}}_t^p &= \bar{\mathbf{v}}^p - \bar{\mathbf{v}}_n^p = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^p \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

他方、当該物体に作用する接触応力（単位面積当りに作用する力ベクトル） $\mathbf{f}$ を法線方向部分 $\mathbf{f}_n$ と接線方向部分 $\mathbf{f}_t$ に分解する。つまり、

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t = -f_n \mathbf{n} + f_t \mathbf{t}_f \quad (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_n &\equiv (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} = -f_n \mathbf{n} \\ \mathbf{f}_t &\equiv \mathbf{f} - \mathbf{f}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} = f_t \mathbf{t}_f \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} f_n &\equiv -\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \\ f_t &\equiv \|\mathbf{f}_t\|, \mathbf{t}_f \equiv \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_f = 0, \|\mathbf{t}_f\| = 1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

なお、接触物体が当該物体の表面に向かって来る、または、当該物体の表面に正圧が作用するとき、摩擦が作用するので、このような状態で $\bar{v}_n > 0$ および $f_n > 0$ となるように、これらの定義式(3)₁および(12)₁にマイナス記号が付されている。

まず、弾性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^e$ は、次のように亜弾性式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^e &= \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} \\ \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}}^e \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、 $(^\circ)$ は接触面の剛体回転による共回転速度を示す。接触弾性係数テンソル $\mathbf{C}^e$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}^e &= \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbf{C}^{e-1} &= \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

α_n および α_t は接触面のそれぞれ法線方向および接線方向の弾性係数で、また、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソルである。したがって、次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^e &= \frac{1}{\alpha_n} \dot{\mathbf{f}}_n + \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}}_t \\ \dot{\mathbf{f}} &= \alpha_n \bar{\mathbf{v}}_n^e + \alpha_t \bar{\mathbf{v}}_t^e \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2・2 正規すべり降伏面および下負荷すべり面

すべり降伏面を次式で与える.

$$f(\mathbf{f}) = \mu \quad (16)$$

ここに, μ はすべり降伏面の拡大・縮小を表す硬・軟化関数である. クーロン則の場合 (図 1 参照), 左辺の接触応力関数 $f(\mathbf{f})$ は次式で与えられる.

$$f(\mathbf{f}) = \frac{f_t}{f_n} \quad (17)$$

なお, 4 章以降の具体的計算においては, 本式を採用する.

さて, すべり降伏面の内部を純粋弾性域と仮定する場合, 弾性状態から, いきなり顕著な塑性すべり速度を生じるすべり降伏状態に急変する. つまり, すべり降伏面の内部の接触応力の変化によっては, 弾性すべり速度のみが生じ, 塑性すべり速度は生じないことになる. しかし, 実際の摩擦現象においては, すべり降伏面の内部の接触応力変化によっても, 塑性すべり速度が生じ, 接触応力がすべり降伏面に近づくにつれて徐々に塑性すべり速度が発達してすべり降伏状態に至る. そこで, すべり降伏面の内部の接触応力の変化による塑性すべり速度を合理的に表現するに当って, 実験結果の物理的観察に基づいて, 次の仮定を設ける (図 1 参照).

基本弾塑性仮定 (下負荷面モデルの基本概念) : 塑性すべり速度が生じるときには接触応力はすべり降伏面に近づくが, 弾性すべり速度のみが生じるときには接触応力はすべり降伏面から遠ざかる. 言い換えれば, 応力がすべり降伏面に近づくときには塑性すべり速度が生じるが, 応力がすべり降伏面から遠ざかるときには弾性すべり速度のみが生じる.

そこで, まず, 式(16)で表されるすべり降伏面 (以後, 正規すべり降伏面 (normal-sliding yield surface) と呼ぶ) への接近の度合を表すため, 正規すべり降伏面に相似で, 現接触応力点を通る次の下負荷すべり面 (subloading-sliding surface) を導入する.

$$f(\mathbf{f}) = r\mu \quad (18)$$

ここに, r ($0 \leq r \leq 1$) は, 正規すべり降伏面に対する下負荷すべり面の大きさの比であり, 正規すべり降伏比 (normal-sliding yield ratio) と呼ばれる. クーロン則の場合には, 法線応力一定面において, 下負荷すべり面の断面は正規すべり降伏面の断面に相似で, 正規すべり降伏比 r は, これらの断面の大きさの比で与えられる (図 1 参照).

Fig. 1 Coulomb-type normal- and subloading-sliding surfaces

さて、正規すべり降伏比 r は、正規すべり降伏面への接近の測度の役割を果たすが、上記の仮定により、その変化速度は次式を満たさねばならない。

$$\dot{r} \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{for } r=0 \\ > 0 & \text{for } r < 1 \\ = 0 & \text{for } r = 1 \\ (< 0 & \text{for } r > 1) \end{cases} \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\dot{r} \begin{cases} = 0 & \text{for } \bar{\mathbf{v}}^e = \mathbf{0} \\ < 0 & \text{for } \bar{\mathbf{v}}^e \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0} \quad (20)$$

ここに、正規すべり降伏比は、塑性すべり速度が生じる状態においては、内部変数として式(19)の諸式を満たす発展則によって変化するが、弾性すべり速度のみが生じる状態においては、弾性すべり速度式に従って算定される接触応力 $\mathbf{f}$ と所定の摩擦係数 μ に対して下負荷すべり面式(18)に基づいて算定され、次式が成り立つ。

$$\dot{r} = \bar{U}(r) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} \quad (21)$$

$$r = \frac{f(\mathbf{f})}{\mu} \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0} \quad (22)$$

ここに、図2に示すように、 $\bar{U}(r)$ は r の単調減少関数で次の条件を満たす。

$$\bar{U}(r) \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{for } r = 0 \text{ (quasi-elastic sliding state)} \\ > 0 & \text{for } 0 < r < 1 \text{ (sub-sliding yield state)} \\ = 0 & \text{for } r = 1 \text{ (normal - sliding yield state)} \\ < 0 & \text{for } r > 1 \text{ (over normal - sliding yield state)} \end{cases} \quad (23)$$

本モデルにおいては、すべり降伏面の内部の接触応力状態から連続的に発展する塑性すべり速度を表現するので、接触応力がすべり降伏面に達したか否かの降伏判定は必要でない。さらに、塑性すべり速度が生じるとき、接触応力は正規降伏面に引き付けられる。したがって、数値計算において増分入力後に接触応力が降伏面から飛び出すと ($r > 1$)、式(22), (23)において $\bar{U} < 0$ で、 $\dot{r} < 0$ となり、接触応力が自動的に正規すべり降伏面に引き戻される制御機能が賦与される。これらにより、数値計算上、際立ったメリットがもたらされる。

式(23)を満たす関数 $\bar{U}$ の具体形として次式を仮定する。

$$\bar{U}(r) = \tilde{u} \cot\left(\frac{\pi}{2} r\right) \quad (24)$$

ここに、 $\tilde{u}$ は材料定数である。なお、単調すべりにおいて、式(24)に対して式(21)は、次のように解析的に積分し得る。

$$r = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} r_0\right) \exp\left\{-\frac{\pi}{2} \tilde{u} (\bar{u}^p - \bar{u}_0^p)\right\} \right] \quad (25)$$

ここに、 $\bar{u}_t (= \int \bar{v}_t dt)$ は接線すべり変位であり、 r_0 および $\bar{u}_0^p$ は、それぞれ、 r および $\bar{u}^p$ の初期値である。

正規降伏比の解析的積分は、数値計算上、有利な場合(リターンマッピングの定式化等)があるが、次式 (Hashiguchi, et al., 2005; Hashiguchi and Ozaki, 2008) を用いる場合には、解析的積分は不可能である。

$$\bar{U}(r) = -\tilde{u} \ln r \quad (26)$$

後の具体的計算においては、式(24)を用いる。なお、金属結晶間に高い凝集力が作用する金属の変形においては、塑性変形が生じる応力状態に閾値が存在するが、構成粒子間の凝集力が低い土や異なる物体の接触に過ぎない摩擦現象においては、このような閾値は無視し得ると考えられる。

Fig. 2 Function $\bar{U}(r)$ for evolution rule of normal-sliding yield ratio

2・3 摩擦係数の発展則

凝着説 (Boden and Tabor, 1958)に基づいて、相互すべりにより表面突起の凝着が剥がれることにより摩擦係数が低下する一方、すべりが停止またはすべり速度が小さい場合、一旦剥がれた凝着が時間経過により回復する。これらの現象を反映し得るように、次の摩擦係数の発展則を仮定する。

$$\dot{\mu} = -\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) \quad (27)$$

ここに、 μ_s および μ_k ($\mu_s \geq \mu \geq \mu_k$) は摩擦係数のそれぞれ最大および最小値を示す材料定数であるが、それぞれ静止摩擦係数および動摩擦係数と呼ぶことにする。 κ は塑性すべりによる摩擦係数の低下を支配する材料定数であり、すべり軟化係数、また、 ξ は時間経過による摩擦係数の回復を支配する材料定数であり、クリープ硬化係数と呼ぶことにする。なお、式(27)の右辺第1項は塑性すべりによる摩擦係数の低下(軟化)を示し、逆に、第2項は時間経過による摩擦係数の回復を示す。

2・4 接触応力速度—すべり速度式

下負荷すべり面に関する式(18)を時間微分して次式を得る.

$$\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}} = r \dot{\mu} + \dot{r} \mu \quad (28)$$

式(22)₁ および(27)を式(28)に代入すると次式が得られる.

$$\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}} = r \left[-\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) \right] + \bar{U}(r) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \mu \quad (29)$$

塑性すべり速度は、接触面の接線方向で、また、下負荷すべり面と法線応力一定面 $\mathbf{f}_n = \text{const.}$ の交線の外向き法線方向であるとし、次の接線関連すべり流動則を仮定する.

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{t}_n \quad (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}^p = 0) \quad (30)$$

ここに,

$$\mathbf{t}_n \equiv \frac{\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} - (\mathbf{n} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}}) \mathbf{n}}{\left\| \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} - (\mathbf{n} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}}) \mathbf{n} \right\|} = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}}}{\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \right\|} \quad (\|\mathbf{t}_n\|=1, \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_n = 0) \quad (31)$$

$\dot{\lambda}$ および $\mathbf{t}_n$ は、塑性すべり速度のそれぞれ大きさおよび方向を表す. なお、 $\mathbf{t}_n$ は、下負荷面の外向き法線ベクトルから、それを当該物体の外向き法線に射影したベクトルを除いたベクトル、つまり、下負荷面の外向き法線ベクトルを当該物体の表面に射影したベクトルを正規化したベクトルに他ならない. なお、式(17)のクーロンすべり降伏面の場合には,

$$\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \left(\frac{f_t}{f_n} \right) = \frac{1}{f_n^2} \left(f_n \frac{\partial f_t}{\partial \mathbf{f}} - f_t \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{f}} \right) = \frac{1}{f_n^2} (f_n \mathbf{t}_f - f_t (-\mathbf{n})) = \frac{1}{f_n^2} (f_n \mathbf{t}_f + f_t \mathbf{n}) \quad (32)$$

を式(31)に考慮すれば,

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_f \quad (33)$$

となり、図1に示すように、塑性すべり速度の方向は接線応力方向に一致する.

式(30)を式(29)に代入して次式を得る.

$$\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}} = \dot{\lambda} m^p + m^c \quad (34)$$

ここに,

$$m^p \equiv -\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) r + \bar{U}(r) \mu \quad (35)$$

$$m^c \equiv \xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) r \quad (\geq 0) \quad (36)$$

なお、 m^p および m^c は、それぞれ、塑性すべりおよびクリープすべりに関するものである.

式(30)および(34)から得られる

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p}, \quad \bar{\mathbf{v}}^p = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t}_n \quad (37)$$

および式(13)₁を式(4)に代入して、すべり速度は

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} + \frac{\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t}_n \quad (38)$$

で与えられる。これより、すべり速度で表される正值の比例係数（記号 $\dot{\bar{\lambda}}$ で示す）は次のように記される。

$$\dot{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{C}^e \mathbf{t}_n} \left(= \frac{\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \right) \quad (39)$$

式(4), (13)₂ および(39)から、接触応力ベクトルは次式で表される。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \left(\bar{\mathbf{v}} - \frac{\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{C}^e \mathbf{t}_n} \mathbf{t}_n \right) \quad (40)$$

2・5 負荷基準

塑性すべり速度についての負荷基準は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} : \dot{\bar{\lambda}} > 0, \\ \bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0} : \text{otherwise.} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

または、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} : \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - m^c > 0 \\ \bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0} : \text{otherwise} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

先述の式(38)または(40)で示される下負荷摩擦モデルにおいては、すべりが開始すると、先ず弾性すべり速度が生じ、その後、塑性係数 m^p の低下とともに、徐々に塑性すべり速度が発達して塑性すべり降伏比が増大して、関数 $\bar{U}(\mathbf{r})$ が減少する。これに伴い、式(35)の塑性係数 m^p が減少して $m^p = 0$ になると、静止摩擦と通称されるピーク状態に達する。さらに塑性すべり速度が進行すると、接触応力比は次第に低下し、動摩擦と通称される状態に至る。なお、すべり速度が速い程、摩擦係数の回復は生じ難いので、接触応力比の低下が進み、動摩擦状態における接触応力比も低くなる。

3. 下負荷超過応力摩擦モデル

前節に述べた下負荷摩擦モデルにおいては、すべり速度は弾性すべり速度と塑性すべり速度からなると仮定したが、以下では、塑性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^p$ の代わりに粘塑性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^{vp}$ を導入し、物質の粘塑性変形に関する超過応力モデルの概念 (Hohenemser and Prager, 1932; Prager, 1961; Perzyna, 1963, 1966) を援用した次式を仮定する。

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} + \frac{1}{\eta_v} \langle r-1 \rangle^n \mathbf{t}_n \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\eta_v} \langle r-1 \rangle^n \mathbf{C}^e \mathbf{t}_n \quad (44)$$

ここに、 $\langle \rangle$ は、任意のスカラー変数 s について、 $s \geq 0$ のとき $\langle s \rangle = s$ 、 $s < 0$ のとき $\langle s \rangle = 0$ を意味するマックレーの括弧である。なお、表面応力ベクトル点を通して正規すべり降伏面に相似な面（クーロンすべり降伏面の場合には、法線応力一定面において相似）を動的負荷すべり面 (dynamic-loading sliding surface) と呼ぶ。 r は、正規すべり降伏面に対する動的負荷すべり面の大きさの比で、動的負荷すべり比 (dynamic-loading sliding ratio) と

改めて呼ぶことにする。なお、準静的すべり状態においては $r \leq 1$ であるが、非静的すべりの場合には、 $r > 1$ となる。 η_v および n は材料定数であるが、前者は粘塑性係数である。なお、一般に内部変数の変化は非可逆変形によって生じると考えられるので、粘塑性構成式における内部変数は、弾塑性構成式における内部変数の発展則において、塑性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^p$ を粘塑性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^{vp}$ に置き換えたもので与えられる。したがって、内部変数 μ の発展則は、式(27)に基づいて次式で与えられる。

$$\dot{\mu} = -\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) \|\bar{\mathbf{v}}^{vp}\| + \xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) \quad (45)$$

しかし、式(43)、(44)は、高速変形においては、他の項に比して第2項が小さくなって弾性応答に近づき、衝撃負荷においては、物質は無限大の強度に耐え得ることになり、不合理である。そこで、これらを次のように拡張しよう。

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} + \frac{1}{\eta_v} \frac{\langle r-1 \rangle^n}{r_m - r} \mathbf{t}_n \quad (46)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\eta_v} \frac{\langle r-1 \rangle^n}{r_m - r} \mathbf{C}^e \mathbf{t}_n \quad (47)$$

ここに、 r_m ($\gg 1$) は材料定数であり、動的負荷比 r が増大して $r \rightarrow r_m$ になると粘塑性すべり速度が無限大になって応力の上昇に限界が設けられ、式(46)、(47)は、準静的負荷から衝撃負荷に亘る一般負荷速度に対して適用し得ることになる。 r_m は、動的負荷比の取り得る最大値を示し、最大動的負荷比 (maximum dynamic loading ratio) と称する。

また、式(46)、(47)によれば、動的負荷比 r が1に到達する、つまり応力が正規すべり面に到達する瞬間に粘塑性すべり速度が発生するので、滑らかな弾—粘塑性遷移は表現されない。そこで、これらを次のように拡張しよう。

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} + \frac{1}{\eta_v} \frac{\langle r-r_s \rangle^n}{r_m - r} \mathbf{t}_n \quad (48)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\eta_v} \frac{\langle r-r_s \rangle^n}{r_m - r} \mathbf{C}^e \mathbf{t}_n \quad (49)$$

ここに、粘塑性すべりが準静的に生じたとして算定される正規すべり降伏比、つまり、下負荷すべり降伏比 (subloading-sliding yield ratio) を記号 r_s ($0 \leq r_s \leq 1$) で示している。したがって、その発展則は、式(22)に従って、次式で与えられる。

$$\dot{r}_s = \bar{U}(r_s) \|\bar{\mathbf{v}}^{vp}\| \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^{vp} \neq \mathbf{0} \quad (50)$$

$$\dot{r}_s = \dot{r} \quad (r_s = r) \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^{vp} = \mathbf{0} \quad (51)$$

これにより、準静的に粘塑性すべりが生じたとして算定される下負荷すべり面から見た超過応力に基づいて粘塑性すべり速度が生じることになり、滑らかな弾—粘塑性遷移が表現される。

なお、以上においては、粘塑性すべり項はべき乗式で与えられているが、実測値へのシミュレーションは難しく、次の指数式によれば高精度なシミュレーションが容易になされ、次章以降では次式が用いられる。

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} + \frac{1}{\eta_v} \frac{\langle e^{n(r-r_s)} - 1 \rangle}{r_m - r} \mathbf{t}_n \quad (52)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\eta_v} \frac{\langle e^{n(r-r_s)} - 1 \rangle}{r_m - r} \mathbf{C}^e \mathbf{t}_n \quad (53)$$

以上に定式化した下負荷超過応力モデルの応答特性を図3に示す。つまり、接触応力比 f_t/f_n は、準静的すべりにおいては $f_t/f_n = r_s (\leq 1)$ であり、すべり速度の増大とともに上昇するが、 $f_t/f_n \leq r_m$ であり、本式の等号は衝撃すべりにおいて実現される。

Fig. 3 Response of subloading-overstress friction model

なお、乾性摩擦においては、静止摩擦係数 μ_s 、動摩擦係数 μ_k のいずれも大きい反面、粘塑性係数 η_v （分母に含まれる）が小さいので、式(53)の右辺において、弾性すべり速度項に比して粘塑性すべり速度項の影響が大きく、負の速度鋭敏性が表現される。一方、インジウム、テフロン、高分子材料や潤滑摩擦においては、静止摩擦係数 μ_s 、動摩擦係数 μ_k のいずれも小さい反面、粘塑性係数 η_v は大きいので、粘塑性すべり速度項に比して弾性すべり速度の影響が大きく、正の速度鋭敏性が表現される。したがって、下負荷超過応力摩擦モデルは、前章に述べた準静的すべりに対する下負荷摩擦モデルを含み、正・負両速度鋭敏性に亘る一般すべり速度におけるすべり現象を表現し得ると考えられる。

4. 数値実験

前章において、下負荷摩擦モデルを正の速度鋭敏性も表現し得る下負荷超過応力摩擦モデルに拡張した。本章では、この拡張モデルの特性を数値実験により検証する。なお、本章以降、接触応力関数 $f(\mathbf{f})$ として、式(17)のクーロン則を用いる。なお、本章および次章において、十分停止時間を経た状態から、すべりを開始するものとし、摩擦係数の初期値 μ_0 を静止摩擦係数に選び、 $\mu_0 = \mu_s$ としている。

さて、下負荷超過応力摩擦モデルに含まれる材料パラメータの物理的意味を把握するため、従来の下負荷摩擦モデルに含まれる材料パラメータを次のように選んだ。

弾性係数： $\alpha_n = \alpha_t = 10 \text{ MPa/mm}$

静止摩擦係数： $\mu_s = 0.097$ ，動摩擦係数： $\mu_k = 0.085$

すべり軟化係数： $\kappa = 1.0 \text{ mm}^{-1}$

クリープ硬化係数： $\xi = 0.005 \text{ min}^{-1}$

下負荷すべり降伏比の発展係数： $\tilde{u} = 80 \text{ mm}^{-1}$

また、新たに下負荷超過応力摩擦モデルに追加された次のパラメータを各5水準に一連に変化させて、数値実験を行った。

粘塑性係数 : $\eta_v = 10, 100, 950, 10000, 100000 \text{ min./mm}$

粘塑性すべり速度促進係数 : $n = 4, 8, 16, 32, 64$

最大動負荷比 : $r_m = 1.2, 1.5, 1.8, 3.2, 6.4$

Fig. 4 Influence of material parameters in subloading-overstress model

なお、これらの3種のパラメータの内の2種については、それぞれの中央値に固定し、他の1種のパラメータを5水準に変化させた。また、すべり速度は、1および200 mm/min.の2水準とした。図4に数値実験で算定されたすべり変位と接触応力比 f_t/f_n の関係を示す。すべり速度が大であるほど、接触応力比 f_t/f_n が大となり正の速度鋭敏性が示されている。また、 η_v および r_m が大きいほど、逆に n が小さいほど、粘塑性すべり速度の発生が抑えられて弾性すべり状態に近づき、高い摩擦応力比が表現されている。なお、すべり速度の影響は、負の速度鋭敏性

においては時間経過により再生する表面突起の凝着に依存するので、極めて遅いすべり現象において生じるのに対して、正の速度感度特性は接触面間の粘塑性流動に依存するので、速いすべり現象において生じる。また、下負荷摩擦モデルについては上記と同じ材料定数、また、超過応力モデルについては上記の中央値を用いて算定される、接触応力比—すべり変位関係に与えるすべり速度の影響を図 5 に示す。さらに、本図より得られる、すべり速度に対するすべり変位 10 mm における接触応力比の関係を図 6 に示す。ここに、すべり速度が或る範囲内ではその上昇に伴い接触応力比が滑らかに高くなるが、その範囲外つまり上下のすべり速度においては、接触応力比は一定となることが示されている。

Fig. 5 Influence of sliding velocity

Fig. 6 Influence of sliding velocity: Contact stress ratio at sliding velocity 10 mm

5. 実測値との比較

正の速度鋭敏性におけるすべり速度の影響を調べるため、潤滑摩擦試験を実施した。試験装置の概要を図 7 に示している。摩擦試験片を左右から挟み、一定の法線応力を作用させた状態で、一定速度で上部に引き抜かれる。引抜き力は試験片の上部の取り付けられたひずみゲージ式ロードセル (最大荷重: 100 kN) により計測した。試験片は、摩擦面の幅 30mm, 長さ 30mm (面積 900 mm²), 厚さ 0.7mm の合金化亜鉛メッキ鋼板 (galvannealed steel sheet)

(引張り強度：270MPa)で、試験に先立って摩擦面に防錆油を塗布した。また、試験片を挟む工具面にはSKD-11工具鋼を用いた。なお、接触面は、試験毎に研磨剤で磨かれた。試験片に作用する法線方向荷重は、5kNに設定した。試験片の引抜き速度は、1, 10, 50, 100, 200 mm/min.の5水準とした。

Fig. 7 Illustration of friction test apparatus

実測された接触応力比とすべり変位の関係を図8に示している。すべり変位の増大に伴い、まず、接触応力比はピークを示した後、滑らかに動摩擦に向かって低下するとともに、すべり速度が大であるほど、接触応力比が大となる正の速度鋭敏性が示されている。

以上の試験結果への式(52), (53)の下負荷超過摩擦モデルによるシミュレーション結果を図8に実線で示している。なお、シミュレーションに用いた材料パラメータ値は次の通りである。

$$\alpha_n = \alpha_t = 1000 \text{ MPa} / \text{mm}$$

$$\mu_s = 0.097, \mu_k = 0.085$$

$$\kappa = 0.2 \text{ mm}^{-1}, \xi = 0.009 \text{ min}^{-1}$$

$$\tilde{u} = 80 \text{ mm}^{-1}$$

$$\eta_v = 950 \text{ min/mm}, n = 16, r_m = 1.8$$

Fig. 8 Comparison with test data for various levels of sliding velocity

5 水準のすべり速度についての試験結果のいずれに対しても、高精度なシミュレーションがなされており、3 章に示した下負荷超過摩擦モデルの妥当性が実証されたとみなし得る。なお、べき乗式(48), (49)によれば、すべり速度の影響の表現が過大になり、また、静止摩擦から動摩擦への遷移過程における接触応力比—すべり変位曲線が上に凸になる傾向が見られ、シミュレーションは難しい。指数式およびべき乗式の粘塑性すべり構成式の物理的意義、妥当性については今後の詳細な究明が待たれる。

6. 結 言

本稿では、正・負両速度鋭敏性を含み、準静的すべりから衝撃すべりに亘る一般すべり速度を考慮した下負荷超過摩擦構成式を示した。また、本構成式に含まれる材料パラメータを一連に変化させた数値実験を行って応答特性の推移を示して、本モデルの基本特性を示すとともに、諸材料パラメータの物理的意味について述べた。さらに、潤滑摩擦を対象にすべり速度を一連に変化させた実験を実施した。実測された試験データとの比較を行い、本構成式により負の速度鋭敏性に加えて正の速度鋭敏性についても合理的表現が可能であることを実証した。今後、この下負荷超過摩擦モデルを諸境界値問題の解析に導入し、すべり速度の変化に基づく境界摩擦がもたらす力学的影響について解明を進める予定である。

References

- Bowden, F.P. and Tabor, D., The Friction and Lubrication of Solids, Clarendon Press (1958).
- Hashiguchi, K., Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol. 47 (1980), pp. 266-272.
- Hashiguchi, K., Subloading surface model in unconventional plasticity, International Journal of Solids and Structures, Vol.25 (1989), pp.917-945.
- Hashiguchi, K. and Ozaki, S., Constitutive equation for friction with transition from static to kinetic friction and recovery of static friction, International Journal of Plasticity, Vol. 24 (2008), pp. 2102-2124.
- Hashiguchi, K., Ozaki, S. and Okayasu, T., Unconventional friction theory based on the subloading surface concept, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42 (2005), pp. 1705-1727.
- Hohenemser, K. and Prager, W., Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 12 (1932), pp. 216-226.
- Perzyna, P., The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, The Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 20 (1963), pp. 321-332.
- Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9 (1966), pp. 243-377.
- Prager, W., Linearization in visco-plasticity, Ingenieur Archives, Vol. 15 (1961), pp. 152-157.