下負荷面モデルに基づくリターンマッピングおよび整合接線係数テンソルの導入による弾塑性変形解析 (第2報 機械要素の変形解析)

鈴木 規之^{*1}, 橋口 公一^{*2}, 上野 正実^{*3}

Elastoplastic deformation analysis by return-mapping and consistent tangent modulus tensor based on subloading surface model (2st Report, Deformation analyses of machine elements)

Noriyuki SUZUKI^{*1}, Koichi HASHIGUCHI^{*2} and Masami UENO^{*3}

^{*1} Steel Research Laboratories, Nippon Steel & Sumitomo Metal Corporation
20-1 Shintomi, Futtsu-shi, Chiba 293-8511, Japan

^{*2} Dept. Dependent and Optimum Design, Joining and Welding Research Institute
11-1 Mihogaoka, Ibaragi-shi, Osaka 567-0047, Japan

^{*3} Dept. Agricultural Engineering, University of the Ryukyus
1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, Japan

Received 3 May 2014

Abstract

The implicit stress integration algorithm was devised in the first report by formulating the return-mapping based on the cutting-plane projection and the consistent tangent modulus tensor due to the numerical method for the subloading surface model. It was incorporated into the implicit finite element program ABAQUS/Standard through the User subroutine UMAT. The high accuracy and efficiency in computation was verified by the numerical experiments adopting the one finite element subjected to the uniaxial loading under the monotonic and cyclic loadings, comparing with the calculation by the forward-Euler method under infinitesimal strain increments. In this article, the simulations of the test data for the cyclic loading under a constant strain amplitude and the small stress amplitude near the yield state are performed by the implicit finite element program, where the accurate simulation is attained. Further, the boundary-value problems, i.e. the cyclic torsional loading of the notched circular bar and the tensional loading of the flange with the hole attached to the bolt are analyzed by the program. The pertinences of these analyses are verified by comparing with the other implicit method with the nonlinear kinematic hardening model.

Key words : Boundry-value problem, Consistent tangent modulus, Cyclic loading, Elastoplasticity, Metals, Return-mapping, Subloading surface model

1. 緒 言

第1報(橋口他, 2014)では, 単調, 繰返しおよび非比例負荷を含む一般負荷における弾塑性変形現象を合理的に表現し得る下負荷面モデル(subloading surface model)(Hashiguchi, 1980, 1989, 2013; Hashiguchi, et al., 2012)に基づく金属の構成式を対象に, カッティングプレーン・プロジェクションに基づくリターンマッピングを定式化するとともに, 数値法による整合接線係数テンソルを採用して, 陰的応力積分法を提案した. これらを陰解法有限要素法プログラム ABAQUS/Standard (2001) に User subroutine UMAT を用いて実装した. 本プログラムによ

No.14-00236[DOI:10.1299/transjsme.2014smm0356]

^{*1} 正員, 新日鐵住金(株)(〒293-8511 千葉県富津市新富 20-1)

^{*2} 正員, 大阪大学接合科学研究所(〒567-0047 大阪府茨木市美穂ヶ丘 11-1)

^{*3} 琉球大学農学部農業工学科(〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1)

E-mail of corresponding author: suzuki.c25.noriyuki@jp.nssmc.com

り、一要素に対して単軸応力状態における単調および繰返し負荷に関する数値実験を行い、高精度・高効率な計算を実行し得ることを明らかにした。なお、下負荷面モデルは陽解法において応力を降伏面に引き戻す自動制御機能を有するが、並行して、その陽解法による数値実験を実施して比較し、本陰解法によれば、陽解法を遥かに超える高効率な計算を実現し得ることが把握された。

本報では、実用金属を対象に材料定数の同定過程と繰返し変形表現における下負荷面モデルの有効性を示すとともに、本プログラムにより、機械構造用合金鋼 SCM415 製の切欠付き丸棒の繰返し捩じり変形および管フランジのボルト締結部の繰返し引張変形に関する境界値問題の数値解析を実施する。同時に、ABAQUS/Standard に実装されている重合せ移動硬化モデル (Chaboche, 1989) に基づく陰解法による計算を実施し、その計算結果との比較を行う。これらの解析ならびに比較検討に基づいて、第 1 報で定式化した陰解法により高精度・高効率な計算が実行し得ることを明らかにする。

2. 材料定数の同定

下負荷面モデルによる繰返し負荷挙動の予測精度を実証するため、後章で、境界値問題の解析に用いる機械構造用合金鋼 SCM415 を供試して、ひずみ振幅 ($\pm 0.5\%$) 一定の単軸引張・繰返し負荷試験を実施した。本試験結果を図 1 に示す。なお、図 2 に単調負荷の弾性－塑性遷移域における応力と接線係数の関係を示す。接線係数は、低応力域においても、塑性変形を生じて弾性係数から低下が始まると判断され、例えば 0.2% 耐力 $\sigma_{0.2}$ を弾性限とみなす解析によれば、大きな誤差がもたらされると思われる。

接線係数 $d\sigma/d\varepsilon$ (σ : 軸応力, ε : 軸ひずみ) の応力 σ に対する変化率(勾配)は、図 1 に示す繰返し単軸引張試験結果に適合するように、最適化手法を用いて、第 1 報で述べた下負荷面モデルに基づく構成式における材料パラメータを以下の通り決定した。

材料定数(SCM415)

弾性係数 : $E = 243\text{GPa}$, $\nu = 0.3$,

等方硬化 : $h_1 = 0.677$, $h_2 = 29.5$,

移動硬化 : $a_\alpha = 219$, $r_\alpha = 0.397$,

正規降伏比 : $R_e = 0.4$, $u_0 = 2.5$, $u_s = 1.0$,

相似中心 : $c = 1060$, $\chi = 0.7$,

等方硬化鈍化 : $C = 0.5$, $\zeta = 15$, $\nu = 3$,

等方硬化関数初期値 : $F_0 = 342\text{MPa}$,

等方硬化鈍化関数初期値 : $K_0 = 0.001$

Ohno-Wang モデル (Ohno and Wang, 1993) および Yoshida-Uemori モデル (Yoshida and Uemori, 2003) に対して、それぞれ、Kobayashi and Ohno (2002) および Ghaei and Green (2010) により陰的応力積分法が提案されているが、ABAQUS /Standard には、応力-ひずみ曲線から重合せ移動硬化モデル (Chaboche, 1989) における材料定数を自動的に決定する機能が装備されているとともに、それに基づく陰的応力積分法が搭載されている。そこで、比較の意味で、重合せ移動硬化モデルを取り上げる。ひずみ振幅 ($\pm 0.5\%$) 一定の繰返し負荷について、下負荷面モデルおよび重合せ移動硬化モデル (非線形移動硬化則の組合せ数 : 3) による計算結果を図 3 に示す。本図には、実測曲線を併せて示しているが、重合せ移動硬化モデルによれば、負荷に伴う硬化特性は適確に表現されないのに対して、下負荷面モデルによれば、全般にわたって高精度に予測されるといえる。

また、図 4 には、応力振幅一定 ($350 \pm 50\text{MPa}$) の片振り試験結果を示す。降伏応力近傍の高応力域では小振幅の繰返し荷重に対しても機械的ラチェット変形が進行する。純粋弾性域を仮定する重合せ移動硬化モデルでは弾性変形のみが表現されるのに対して、下負荷面モデルではひずみ集積が大略良好に再現されている。構造物に自

重等の死荷重が加わった状態で繰返し荷重が作用する現象はしばしば観察され、降伏面の内部を純粋弾性域とする重合せ移動硬化モデルは危険設計をもたらすと言える。

薄板のプレス形成においては、金型から開放された後に発生するスプリングバック現象を高精度に予測することが重要である。降伏面の内部に純粋弾性域を囲む下降伏面を仮定するので除荷過程は弾性変形過程となる2面モデルにおいて、相当塑性ひずみに応じて接線弾性係数におけるヤング率を低下させて、スプリングバック特性を実測曲線に合わせる手法 (Yoshida and Uemori, 2002) が見られる。他方、下負荷面モデルにおいては、純粋弾性域を仮定しないので、一定の弾性係数テンソルを用いて、除荷過程においても塑性ひずみ速度の進行により接線係数が徐々に低下する現象を表現し得る。図5には、引張り予ひずみを与えた後の除荷過程における見掛けの弾性係数についての下負荷面モデルによる計算結果を示す。ここに、見掛けのヤング率は、除荷開始点と完全除荷点を直線で結んで算定される割線係数である。予ひずみの増加に従い、見掛けのヤング率が初期のヤング率から滑らかに低下する現象が表わされており、下負荷面モデルは、除荷過程を含む全負荷過程を統一的に表現し得ることが期待される。なお、予ひずみ後の見掛けのヤング率を含めて、弾性-塑性遷移域の挙動に関しては、純粋弾性域および下負荷面の発展則に関する材料定数の選び方にも影響され、さらに高精度なひずみ計測も必要であり、今後、さらに厳密な評価法について究明を進める予定である。

Fig. 1 Measured cyclic loading behavior under constant strain amplitude for SCM415

Fig. 2 Variation of tangent modulus with increase of stress in uniaxial loading for SCM415.

Fig. 3 Comparison of cyclic loading behavior under constant strain amplitude for SCM415..

Fig. 4 Comparison of cyclic loading behavior under small stress amplitude near yield state for SCM415.

Fig. 5 Apparent Yong's modulus during unloading after pre-strain for SCM415.

3. 境界値問題の解析

第1報に述べた下負荷面モデルを導入した陰解法の境界値問題解析の妥当性を実証するため、具体的境界値問題に関する数値シミュレーションを実施し、本陰解法の妥当性の検証を行う。なお、具体的境界値問題として、切欠付き丸棒の繰返し捩じりおよび管フランジ締結ボルトの繰返し負荷変形を取り上げる。

3・1 切欠付き丸棒の繰返し捩じり

図6に示すように、機械構造用合金鋼 SCM415 の半円形状切欠（曲率半径 1mm）付き丸棒（直径 10 mm，長さ 20 mm）の一定引張力下の繰返し捩じり変形の数値実験を前記の材料定数を用いて実施した。本図において、 P は引張荷重， M は捩じりモーメントである。図7に，10 cycle 後の相当塑性ひずみ分布を示す。本図で， P^* および M^* は，次式のように，それぞれ，引張荷重 P および捩じりモーメント M を引張初期降伏荷重 P_{y0} (17839 kN) および M_{y0} (20599 kN-mm) で除した無次元量である。本図より，切欠き部に大きな相当塑性ひずみが生じ，特に，その底部に最も大きな相当塑性ひずみが生じることが示されている。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\pi d^2}{4}, \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \\ P^* &= \frac{P}{P_{y0}}, \quad P_{y0} = A\sigma_{y0} = AF_0 \\ M^* &= \frac{M}{M_{y0}}, \quad M_{y0} = \frac{2I_p\tau_{y0}}{d} = \frac{2I_pF_0}{\sqrt{3}d} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに， $d, A, I_p, \sigma_{y0}, \tau_{y0}$ はそれぞれ丸棒の切欠底の直径（8 mm），断面積（50.3 mm²），断面極2次モーメント（25.1 mm⁴），初期引張降伏応力（355 MPa），初期せん断降伏応力（205 MPa）である。なお，計算は対称条件を仮定し 1/2 モデルで実施した。

図8に，2水準の引張荷重を作用した状態において，2水準の振幅で捩じりモーメントを繰返し負荷した場合の相当塑性ひずみの計算結果を示す。発生する相当塑性ひずみは，引張応力の影響を受けるが，捩じりモーメントの振幅の増大により著しく増大し，そのさい，変動幅の増加を伴うことが示されている。

また、図9には、(a)下負荷面モデルおよび前述した(b)重合せ移動硬化モデルによる、繰返し変形中の伸びと捩じり角の変化を示す。重合せ移動硬化モデルでは微小振幅の場合、純粋弾性応答しか表現されないのに対して、下負荷面モデルによれば、図4と同様に、微小振幅の場合でも力学的ラチェット変形を表現し得ることがわかる。

Fig. 6 Finite element mesh of notched cylindrical rod subjected to cyclic torsion under constant tensile load.

Fig. 7 Equivalent plastic strain after 10 cycle distortion ($P^*=0.75$, $M^*=\pm 0.75$).

Fig. 8 Time history of equivalent plastic strain at the bottom of notch by subloading surface model.

Fig. 9 Relationship between distortion angle and stretch under cyclic loading by
(a) Subloading surface model and (b) Superposed kinematic hardening model.

Fig. 10 Error map of stress for various increments of external load.

次に、本陰解法による引張りおよびねじりの荷重増分に対する応力計算の誤差マップを図 10 に示す．ここに、初期引張降伏荷重 $P = P_{y0}$ を負荷した後、引張荷重増分 ΔP およびねじりモーメント増分 ΔM を与えた場合の切欠底に最も近い応力積分点の応力計算誤差を示している．

ここで、荷重増分を 1 ステップで与えた場合の応力 σ_{cal} と、前進オイラー法により十分に細かい増分（1000 ステップ）で与えた場合の応力 σ_{exat} の差に基づく次式により誤差評価を行った．

$$\text{Error} = \sqrt{\frac{(\sigma_{cal} - \sigma_{exat}) : (\sigma_{cal} - \sigma_{exat})}{\sigma_{exat} : \sigma_{exat}}} \times 100 \quad (2)$$

ここに、両座標軸は、初期降伏荷重 (P_{y0}, M_{y0}) で除した無次元増分量 ($\Delta P^*, \Delta M^*$) で示している．

初期降伏荷重に相当する大きな荷重増分を 1 ステップで与えても、計算誤差は高々 3.5% 程度で、本アルゴリズムの有効性が確認される．

図 11 および図 12 には、図 10 に示す増分点 **A**, **B** すなわち初期降伏荷重の 20%, 40% に相当する大きな引っ張り荷重増分とねじり荷重増分を加えた場合の相当塑性ひずみ分布および残差力修正過程 (Global iteration) の収束状況を示す．なお、点 **A** および **B** における切欠底に最も近い応力積分点の相当塑性ひずみは、それぞれ 0.19% および 0.24% であった．ここに、残差力は、最大残差力を平均節点力ノルムに対する比で、ABAQUS/Standard では実用的な収束判定基準として 5×10^{-3} を既定値としているが (ABAQUS/Standard (2001)), ここではより厳密に 10^{-6} を収束判定基準として用いた．また、ここでは、整合接線係数テンソルによる計算結果と共に、従来の Continuum tangent stiffness を用いた完全 Newton-Raphson 法による計算結果を合わせて示す．なお、Continuum tangent stiffness は、リターンマッピング終了時の応力および内部変数値を増分形の構成関係における弾塑性係数テンソルに代入して算定されるものを用いた計算結果である．いずれも、単軸予引張から複合ねじりへ変形経路が変化する増分ステップにおいて、収束判定基準を厳しくしたにも関わらず収束しているが、整合接線係数テンソルによれば、より早く収束している事がわかる．しかしながら、増分の大きな点 **B** においては、1 回の繰り返し計算で相対残差のオーダーが半減する 2 次収束までは得られなかった．整合接線係数の計算に用いる摂動ひずみは $\varepsilon = 10^{-8}$ としたが、 $\varepsilon = 10^{-6} \sim 10^{-10}$ の範囲で計算結果に有意な差は見られなかった．なお、収束性については、問題設定や境

界条件にも依存することが考えられることから、第1報（橋口他，2014）で示した単一要素モデルの計算例における収束状況を付録に示す。

Fig. 11 Equivalent plastic strain at the point A and B in Fig 10.

Fig. 12 Convergent behavior of residual force during global iteration at the point A and B in Fig 10.

3・2 管フランジ締結ボルトの繰返し変形

前節の現象より実用的な境界値問題として機械構造用合金鋼 SCM415 製の管フランジ部の締結ボルトの繰返し変形のシミュレーションを行った。

図 13 に示すように、管フランジの 1/8 をモデル化し、締結ボルトに対しては、前記 SCM415 の材料定数を用い、また、周辺の管およびフランジは等方弾性体、またガスケット部は直交異方性弾性体とみなして、次の弾性定数を用いた。本図においては引張予負荷後の相当応力値を色分けにより表示している。なお、ガスケットとフランジの接触を考慮して解析を行った。

材料定数（管，フランジ）

$$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3$$

材料定数（ガスケット）

垂直方向剛性 $S_n = 27.48 \text{ GPa/mm}$,
 せん断方向剛性 $S_s = 10.57 \text{ GPa/mm}$,
 面内剛性 $E = 68.7 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$

締結ボルトに初期張力 (300 MPa) を負荷した後, 管端の軸方向に繰り返し変位 (0.1 mm) を与えた際の, ボルト中央部の軸方向の応力-ひずみの変化を図 14 に示す. 繰返し負荷の進行に伴って, ボルトの軸ひずみが集積され, それに対応して締結ボルトの軸力が次第に低下していく状況が示されている. なお, 以上は, フランジとガスケットを独立な要素として, これらの接触を考慮した解析であるが, 良好な収束性が認められる.

Fig. 13 Finite element mesh and contour plot of equivalent stress after pre-tension.

Fig. 14 Axial stress-strain relationship during cyclic axial displacement.

4. 結 言

本稿では、第1報で提案した下負荷面モデルによる陰的応力積分法の妥当性を実証するため、実用金属の単軸負荷状態における単調・繰返し負荷試験を実施し、材料パラメータの同定法を述べるとともに、機械構造用合金鋼 SCM415 製の切欠付き丸棒の繰返し捩じり変形および管フランジのボルト締結部の繰返し引張変形の数値解析を実施した。同時に、重合せ移動硬化モデル (Chaboche, 1989) に基づく陰解法による計算を実施し、その計算結果との比較を行った。これらにより、次の知見が得られた。

- 1) 小さな応力振幅の繰返し負荷に対しても塑性変形の進行を表現し得る (図 4)。
- 2) 予ひずみの進行とともに除荷過程における割線係数が低下する現象が表現される (図 5)。なお、一定の弾性係数テンソルを用いて、スプリングバック現象等に見られる、除荷過程において接線係数が滑らかに低下する現象を表現し得る。
- 3) 機械構造用合金鋼 SCM415 製の切欠付き丸棒の繰返し捩じり変形および管フランジのボルト締結部の繰返し引張変形に関する境界値問題の数値解析を実施し、応力増分ステップを大きく取っても、計算誤差が小さく抑えられ、収束性が向上した (図 10 および 11) が、問題によっては、2 次収束までは得られなかった。

なお、正規降伏面と下負荷面の相似中心を固定した初期下負荷面モデルおよびそれに対するリターンマッピング・整合接線係数テンソルについては、Hashiguchi and Yamakawa (2012) により乗算分解における超弾性-塑性有限変形論に拡張されている。今後、本稿で対象とした塑性変形とともに相似中心が移動する拡張下負荷面モデルを有限変形論に拡張し、それによるリターンマッピング・整合接線係数テンソルに基づく陰解法の定式化を進める予定である。

謝 辞

数値解析法全般に亘って、東北大学工学部・山川優樹准教授により多くの貴重な助言を賜った。さらに、本稿の記述の改善に向けて多くの有益な指摘を頂戴した。ここに、付記して、心より謝意を表する次第である。

文 献

- ABAQUS-Standard User's Manual, Version 6.2. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. (2001).
- Chaboche, J.L., Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, Int. J. Plasticity, Vol.5 (1989), pp.247-302.
- Ghaei, A. and Green, D.E., Numerical implementation of Yoshida-Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme, Computational Materials Science, Vol. 48 (2010), pp.195-205.
- Hashiguchi, K., Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol.47 (1980), pp.266-272.
- Hashiguchi, K., Subloading surface model in unconventional plasticity, International Journal of Solids and Structures, Vol.25 (1989), pp.917-945.
- Hashiguchi, K., General description of elastoplastic deformation/sliding phenomena of solids in high accuracy and numerical efficiency: Subloading Surface Concept, Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 20 (2013), pp.361-417.
- 橋口公一, 鈴木規之, 上野正実, 下負荷面モデルに基づくリターンマッピングおよび整合接線係数テンソルの導入による弾塑性変形解析 (第1報, リターンマッピングの定式化), Vol.80, No.812 (2014), DOI:10.1299/transjsme.2014smm0083.
- Hashiguchi, K., Ueno, M. and Ozaki, T.: Elastoplastic model of metals with smooth elastic-plastic transition, Acta Mechanica, Vol.223 (2012), pp.985-1013.
- Hashiguchi, k. and Yamakawa, Y., Introduction to Finite Strain Theory for Continuum Elasto-Plasticity, Wiley Series in Computational Mechanics, John-Wiley (2012).
- Kobayashi, M. and Ohno, N., Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 53 (2002), pp.2217-2238.

- Ohno, N. and Wang, J.D., Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Parts I: Formulation and basic features for ratcheting behavior. Part II: Application to experiments of ratcheting behavior, International Journal of Plasticity, Vol. 9 (1993), pp.375–403.
- Yoshida, F. and Uemori, T., Elastic-plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension-compression at large strain, International Journal of Plasticity, Vol.18 (2002), pp.633-659.

References

- ABAQUS-Standard User's Manual, Version 6.2. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. (2001).
- Chaboche, J.L., Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, Int. J. Plasticity, Vol.5 (1989), pp.247-302.
- Ghaei, A. and Green, D.E., Numerical implementation of Yoshida–Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme, Computational Materials Science, Vol. 48 (2010), pp.195-205.
- Hashiguchi, K., Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol.47 (1980), pp.266-272.
- Hashiguchi, K., Subloading surface model in unconventional plasticity, International Journal of Solids and Structures, Vol.25 (1989), pp.917-945.
- Hashiguchi, K., General description of elastoplastic deformation/sliding phenomena of solids in high accuracy and numerical efficiency: Subloading Surface Concept, Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 20 (2013), pp.361-417.
- Hashiguchi, K., Suzuki, N. and Ueno, M., Elastoplastic deformation analysis by return-mapping and consistent tangent modulus tensor based on subloading surface model (1st Report, Formulation of return-mapping), Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.80, No.812 (2014), DOI:10.1299/transjsme.2014smm0083.
- Hashiguchi, K., Ueno, M. and Ozaki, T.: Elastoplastic model of metals with smooth elastic-plastic transition, Acta Mechanica., Vol.223 (2012), pp.985-1013.
- Hashiguchi, K. and Yamakawa, Y., Introduction to Finite Strain Theory for Continuum Elasto-Plasticity, Wiley Series in Computational Mechanics, John-Wiley (2012).
- Kobayashi, M. and Ohno, N., Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 53 (2002), pp.2217-2238.
- Ohno, N. and Wang, J.D., Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Parts I: Formulation and basic features for ratcheting behavior. Part II: Application to experiments of ratcheting behavior, International Journal of Plasticity, Vol. 9 (1993), pp.375–403.
- Yoshida, F. and Uemori, T., Elastic-plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension-compression at large strain, International Journal of Plasticity, Vol.18 (2002), pp.633-659.

付 録

単純な境界条件を用いた問題における収束性を評価するため、第1報（橋口他，2014）で示した計算例，図2 (Axial strain increment: 1.00%)の Axial strain:1%における節点残差力の収束状況を付録の図15に示す。収束状況は単調では無いが，実用的には極めて大きなひずみ増分にも拘わらず，後半部分の誤差オーダーは1回の繰り返しで半減，すなわち，ほぼ2次収束相当の収束性が得られており，収束性については，問題設定や境界条件にも依存することが考えられる。

Fig. 15 Convergent behavior of residual force during global iteration in the 1st report (Hashiguchi, et al., 2014) Fig 2
(Axial strain increment: 1.00%, Axial strain: 1%).