新たな可変バンドフィルタを用いる離散ウェーブレット変換
(新たな離散ウェーブレット変換の胎児心電抽出への応用)章 忠^{*1}, 大滝 仁^{*2}, 戸田 浩^{*3}, 三宅 哲夫^{*3}, 石川 康宏^{*4}A new discrete wavelet transform using variable band filters
(Fetal ECG extraction using new discrete wavelet transform)Zhong ZHANG^{*1}, Jin OHTAKI^{*2}, Hiroshi TODA^{*3}, Tetsuo MIYAKE^{*3} and Yasuhiro ISHIKAWA^{*4}^{*1,*2,*3} Graduate School of Engineering, Toyohashi University of Tech.,
1-1 Hibarigaoka, Tenpaku-cho, Toyohashi, Aichi 441-8122, Japan^{*4} Ishikawa Hospital For Ladies, 3-17-17 Takasago, Urawa-ku, Saitama 330-0063, Japan

Received 21 April 2014

Abstract

In this study, in order to verify the effectiveness of the variable-band-filters discrete wavelet transform (VBF-DWT) and construction method of the variable band filter (VBF), a fetal ECG extraction has been carried out and the main results obtained are shown as follows. The approach to configuration variable band filter (VBF) by selecting the frequency band only fetal ECG component presented is effective to configure the optimal base sensible signal. The extraction of the fetal electrocardiogram is successful by applying soft-thresholding to VBF-DWT, which uses the constructed VBF. The information entropy is selected as an evaluation index, and two kinds of ECG signal are used to evaluate the relative performance of the wavelet packet transform (WPT) and the proposed VBF-DWT. The first kind of ECG signal is synthesized using a maternal ECG, fetal ECG, and white noise; the second kind is real measured mixed noisy maternal-fetal ECG obtained using ICA. The results show that the VBF-DWT basis (designed using VBF) outperforms the WPT basis that was elected by the best basis algorithm (BBA).

Key words : Data processing, Best basis, Fetal ECG extraction, Noise deletion, Time-frequency analysis, Wavelet packet transform, Digital filter

1. は じ め に

周知のように、時間・周波数解析手法の1つであるウェーブレット変換 (Wavelet transform : WT) が信号・画像処理の道具として広く応用されている。この WT は、変数 a と b を連続変数とする連続ウェーブレット変換 (Continuous wavelet transform : CWT) と、離散変数とする離散ウェーブレット変換 (Discrete wavelet transform : DWT) に分けられる。さらに DWT のシフト不変性を改善するために、複素数離散ウェーブレット変換 (Complex discrete wavelet transform : CDWT) が提案されている。CWT は時系列信号の時間・周波数パターンや相違性などの解析に優れているが、MW から構成された基底系は過剰完全基底系となるため、解析される各成分のエネルギーの定量評価はできない。また一般化された高速計算アルゴリズムが存在しないため、計算速度の向上は困難である。一方、DWT は MW から構成された基底系は完全直交 (双直交) 基底系となるため、信号を完全再構成ができる。また多重解像度

解析 (Multi-resolution analysis : MRA) による高速計算アルゴリズムは Mallat により提案され、従来の高速フーリエ変換並みの高速計算が実現される (Mallat, 1999) . そして変換の核であるマザーウェーブレット (Mother wavelet : MW) は周波数領域においてオクターブバンドの特性を持ち、データの圧縮率が高い . しかし MW はオクターブバンドの特性を持つため、必ずしも信号に合う最適基底とならずデータ圧縮やノイズ削除などの効率に影響を与える可能性もある .

ところでオクターブバンド解析の改善に対しては、ウェーブレットパケット変換 (Wavelet packet transform : WPT) を用いてそれぞれのオクターブバンドを再分割し、得られたウェーブレット係数を評価して周波数バンドを選択する最適基底法が提案されている (Ruch and Fleet, 2009) . しかしながら、選択可能な周波数バンドが限られ、必ずしも選択された基底は最適とは言えない . この課題を解決するために、本研究では信号に合う最適基底の構成法を考案し、新たな可変バンドフィルタを用いる離散ウェーブレット変換 (Variable-band-filters discrete wavelet transform : VBF-DWT) を提案する . VBF-DWT は従来の DWT と CDWT がベースとなり、DWT と CDWT の分解・再構成数列の代わりに可変バンドフィルタ (Variable band filter : VBF) を用いることにより実現されている . この結果、ベースとなる DWT と CDWT のもつ完全再構成の特性により、VBF-DWT の完全再構成が保証される (zhang, et al., 2014) .

一方、胎児心電は心不全に起因する胎児不整脈などの心臓病の診断に有効であり、注目されている (堀米, 2004) . 通常、計測された心電信号には主に母体心電成分、胎児心電成分とその他ノイズ成分という 3 つの成分から構成されている . 母体心電成分は胎児心電成分より振幅が大きく、その周波数成分も胎児心電の周波数成分と重畳しているため、信号解析によりそれらの分離が困難とされている . 堀米らは独立成分分析 (Independent component analysis : ICA)(Sawada, et al., 2005) を用いて胎児心電成分を母体心電成分から分離する手法を提案した (堀米他, 2013) . これにより、計測された心電信号を“母体心電成分”と“それ以外の信号成分”に分離することができた . しかし、ICA により分離された胎児心電成分は“それ以外の成分”に含まれるため、母体心電の残留波形やノイズなどの影響が大きく、そのまま解析には使えない .

本論文では、ICA により分離された“それ以外の成分”からの胎児心電抽出とノイズ削除を例にして、VBF の構成法と VBF-DWT の有効性を検証する . 最適基底の評価について、情報エントロピーを指標とした評価方法を提案する . 情報エントロピーは、時間軸上の信号の不規則性を評価することで、これによりノイズ成分の多さを定量的に表すことが可能となる . そして、情報エントロピーを用いた評価実験においては、ウェーブレットパケットによる最適基底と VBF-DWT による最適基底を用いた胎児心電抽出の効果を比較評価し、VBF-DWT の有効性を確認する .

2. ウェーブレットパケット変換 (WPT) に基づく最適基底選択法の吟味

前章で述べるように、DWT のオクターブバンド解析の欠点を克服するために、WPT を用いてそれぞれのオクターブバンドを再分割し、得られたウェーブレット係数を評価して周波数バンドを選択する最適基底法が提案されている . ここで WPT の詳細な理論を文献 (Ruch and Fleet, 2009) に譲り、WPT の計算法と最適基底の求め方の原理を紹介する .

2.1 離散ウェーブレット変換 (DWT) 及びその計算法

DWT の計算法は、双直交ウェーブレットの特性を生かし、MRA の理論から導かれたものである (Mallat, 1999) . 双直交ウェーブレットの MW $\psi(\omega)$ とその双対ウェーブレット $\tilde{\psi}(t)$ の間には、以下の式が成立する .

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \phi(2t - k) \quad (1)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\mu_{-k}} \tilde{\phi}(2t - k) \quad (2)$$

ただし $\{q_k\}$ はウェーブレット数列、 $\{\mu_k\}$ は双対ウェーブレット数列、また $\phi(t)$ 、 $\tilde{\phi}(t)$ はそれぞれ $\psi(t)$ 、 $\tilde{\psi}(t)$ に対応するスケーリング関数と双対スケーリング関数で、これらの間には次のツースケール関係 (Two-scale relation)

Fig. 1 DWT calculation method by using Mallat's fast algorithm

が成立する．

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} p_k \phi(2t - k) \quad (3)$$

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \overline{\lambda_{-k}} \tilde{\phi}(2t - k) \quad (4)$$

ただし数列 $\{p_k\}$ はツースケール数列, $\{\lambda_k\}$ は双対ツースケール数列と呼ばれている．

ところで本論文で扱うのは直交ウェーブレットを用いた DWT であるので, ここからは直交ウェーブレットに限定して話を進める．直交ウェーブレットは自己双対のため, $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$, $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$, $p_k = \overline{\lambda_{-k}}$, $q_k = \overline{\mu_{-k}}$ となることが知られているので, 式 (1) ~ (4) の 4 式は, 式 (1), (3) の 2 式に集約される．また数列 $\{p_k\}$ と $\{q_k\}$ の間には

$$q_n = (-1)^{1-n} p_{1-n} \quad (5)$$

が成立する．また $\{q_k\}$ はハイパスフィルタの特性, $\{p_k\}$ はローパスフィルタの性質を持つ．そして以下に述べる計算に必要な分解数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, および再構成数列 $\{g_k\}$, $\{h_k\}$ は次のように求まる．

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{p_{-k}}, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{q_{-k}}, \quad g_k = \frac{1}{\sqrt{2}} p_k, \quad h_k = \frac{1}{\sqrt{2}} q_k \quad (6)$$

直交ウェーブレットの場合, $\{p_k\}$ がわかれば, 式 (5) と (6) により必要なすべての数列が求められる．また代表的な多くの直交ウェーブレットの $\{p_k\}$ は, そのウェーブレットの提案者により公開されている．なお $\{q_k\}$, $\{p_k\}$ の特性を受け継いで, $\{b_k\}$ と $\{h_k\}$ はハイパスフィルタ, $\{a_k\}$ と $\{g_k\}$ はローパスフィルタの特性を持つ．

図 1 にレベル $j = -2$ までの MRA による高速アルゴリズムの分解と再構成ツリーを示す．ただし符号 $\downarrow 2$ はダウンサンプリングの操作, $\uparrow 2$ はアップサンプリングの操作を示す．また図 1 に示した分解ツリーに沿う信号の分解計算は式 (7) と式 (8) によって再帰的に行われる．

$$c_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{2n-k} c_{j+1,k} \quad (7)$$

$$d_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_{2n-k} c_{j+1,k} \quad (8)$$

ただし $d_{j,n}$ はウェーブレット係数, $c_{j,n}$ はスケーリング係数であり, 添え字 j はレベル ($j = -1, -2, \dots$), n は各レベルに並べられた係数の順番を表す整数である．最初の $c_{0,n}$ は, 解析対象の離散信号 $f_n = f(n)$ を用いて $c_{0,n} = f_n$ とする．また, 信号の再構成は $c_{j,n}$, $d_{j,n}$ から図 1 に示した再構成ツリーに沿って次式により再帰的に計算される．

$$c_{j+1,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_{n-2k} c_{j,k} + \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_{n-2k} d_{j,k} \quad (9)$$

式 (8) に示すように, 任意レベル j のウェーブレット係数 $d_{j,n}$ は, 係数 $c_{j+1,n}$ を用いて計算される．さらに深いレベルの係数は, 同様の処理を再帰的に行って求められる．また, 逆変換も同じく再帰的な処理となる．そして CDWT の計算は DWT の計算を並列して行うので, その詳細を省略する (Toda and Zhang, 2010a)．

2.2 ウェーブレットパケット変換 (WPT) の計算法

2.1 節で記した離散ウェーブレット変換 (DWT) では, 解析対象信号をオクターブ状の周波数バンドを持つ各信号に分解・再構成を行う．分解回数は分解レベル j ($j = -1, -2, \dots$) により示され, j が低くなるほど低周波数領域を細かく分割することが可能である．しかし, 高周波数領域においては分解レベルが低下しても更なる分解は行われないため, DWT の計算法は高周波数成分に対して詳細な解析が必要な処理には不向きである．そこで, 全域の周波数に関する詳細な分析が可能である WPT が提案されている (Ruch and Fleet, 2009)．

Fig. 2 Example of WPT basis by using Mallat's fast algorithm

図2には分解レベル $j = -2$ までの WPT の分解・再構成の計算流れを示している．図1と図2を比較してわかるように，両者の分解・再構成アルゴリズムにおける違いは，レベル $j = -2$ 以降の計算である．ここで，分解を開始する出発点の，解析レベル $j = 0$ ，インデックス $m = 1$ のウェーブレット・パケット係数は， $d_{0,n}^1 = c_{0,k}$ と表記することにする．そして解析レベル $j = 0$ から -1 への分解は次の式 (10) と式 (11) で行う．

$$d_{j,n}^{2m-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2n-k} d_{j+1,k}^m \quad (10)$$

$$d_{j,n}^{2m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{2n-k} d_{j+1,k}^m \quad (11)$$

式 (10) と式 (11) に示すように， $m = 1$ の時は，基本的に DWT の分解の式 (7), (8) とほとんど変わらない．

続いて解析レベル $j = -1$ から -2 への分解であるが，図2に示すように解析レベル $j = -1$ のインデックスの数は $m_{\max} = 2^{-j} = 2$ となる．このような場合， m が奇数であれば式 (10) と式 (11) で計算し， m が偶数であれば次式で分解計算を行う．

$$d_{j,k}^{2m-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_{2n-l} d_{j+1,l}^m \quad (12)$$

$$d_{j,l}^{2m} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{2n-l} d_{j+1,l}^m \quad (13)$$

すなわち， m が偶数の場合には， $d_{j,k}^m$ の分解において，ハイパスフィルタとローパスフィルタの働きが逆転し， $\{b_k\}$ をローパスフィルタ， $\{a_k\}$ をハイパスフィルタとして使用する．これは，分解アルゴリズムにおける $\{b_k\}$ 適用後にダウンサンプリングを適用しているためであり，信号の周波数領域における周期性の影響で， $\{b_k\}$ とダウンサンプリングを適用した際には $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ を逆転させる必要がある

本論文では解析レベル -2 までの分解を示しているが，解析レベル -2 の以上でも同様に上記のルールに従い，さらに深い解析レベルの分解を行うこととなる．そして，再構成アルゴリズムにおいては，分解の際の計算と対応して $\{g_k\}, \{h_k\}$ を使い，信号の再構成を行う．加えて，WPT は複素数化を行うことでシフト不変性の問題を改善することが可能であり，その場合，図2に示す処理を並列化し実数部と虚数部に分けて同様な処理を行うことにより実現できる (Tada and Zhang, 2010b) ．

2.3 情報理論に基づく最良基底の選択法

DWT や WPT を用いたノイズ除去やデータ圧縮，特徴成分抽出などにおいては，マザーウェーブレットが各解析レベルで持つ周波数帯域は，目的信号成分の周波数帯域に合うほど良い結果が得られることが知られている．しかしながら，DWT や WPT は各分解レベルでの周波数帯域が決められており，自由に変えることはできない．従ってそのままでは目的信号成分を的確に捉えることが必ずしも保証できない．そこで，この欠点を克服するために，各信号の周波数帯をより良く選択する方法として最良基底アルゴリズム (Best basis algorithm: BBA) が提案されている (Ruch, 2009) ．BBA では WPT により細分割された各周波数帯域に対して目的信号の鮮鋭化の程度を評価し，それが最も鮮鋭化された周波数帯域を最良基底として選択する手法である．BBA における最良基底を選択するための指標としては情報エントロピーと情報エントロピー・コスト関数がある．

情報エントロピーは情報科学の分野で多く用いられる理論であり，現象の不確かさを示す指標である (石川, 2000) ．

Fig. 3 VBF-DWT trees by using Mallat's fast algorithm

ここでまず離散信号 $f(n)$, $(n = 1, 2, \dots, N)$ があり, k 番目の信号 $f(k)$ の発生確率 $p_f(k)$ は次式で定義する.

$$p_f(k) = \frac{|f(k)|^2}{\|f\|^2}, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^N f^2(k). \quad (14)$$

そして k 番目の信号の持つ情報量 $I_f(k)$ は, 以下の式で定義されている.

$$I_f(k) = -\log p_f(k) \quad (15)$$

式 (15) により, 信号の発生確率が低ければその情報量は多くなり, 確率が高ければその情報量は少なくなることがわかる. また情報エントロピーは, 信号 $f(n)$ が持つ情報量の平均値と定義され, 以下の式で表す.

$$H(f) = -\sum_k p_f(k) \log p_f(k) \quad (16)$$

信号処理においては, 情報エントロピーは信号の持つ全ての情報量の平均をとることによって, “珍しい” 信号の発生頻度を推測し, 現象の不確かさを推定することに用いられる. たとえば, ホワイトノイズを信号とする場合には信号の異なる周波数成分がほぼ同じ強度と確率で発生するため, 情報エントロピーが特に高い. これに対して, ホワイトノイズの中に散発的に強度の高いパルス性信号を加えると, 情報エントロピーが低くなることとなる.

次に情報エントロピー・コスト関数は次式で定義されている.

$$l(f) = \sum_k |f(k)|^2 \log \frac{1}{|f(k)|^2} \quad (17)$$

ただし, $l(f)$ は信号 $f(n)$ の情報エントロピー・コスト関数であり, $f(k)$ は k 番号の信号である. また $H(f)$ が最小となると, $l(f)$ も最小になる. そして, BBA では信号 $f(n)$ を WPT により分解した後の $d_{j,k}^m$ に置き換え, 各周波数帯域における情報エントロピー・コスト関数を算出する. そして得られた情報エントロピー・コスト関数の数値に対して分解前と分解後と比較し, 小さい値を有する方を最良の基底として選択する. 本研究では情報エントロピー・コスト関数を用いて WPT の最良基底を選択することにする.

3. 可変フィルタバンド離散ウェーブレット変換およびその最適基底構成

3.1 可変フィルタバンド離散ウェーブレット変換の分解・再構成アルゴリズム

VBF-DWT は従来の DWT や CDWT を元 (ベース DWT) にして構築され, その計算アルゴリズムの基本部分はベース DWT とほぼ同じである. ここで, ベース DWT を従来の DWT とする場合に, VBF-DWT の分解・再構成のツリー構造の例を図 3 に示す. ただし図 3(a) は分解ツリー, (b) は再構成ツリーである. またベース DWT が CDWT である場合には, 虚数部が実数部 (従来の DWT) と同じ構造のツリーを持つため, 省略した. 図 3(a) に示すように, 高周波成分側には従来分解数列 $\{b_n\}$ の代わりに, 可変バンドフィルタが使用されている. 可変バンドフィルタは目的信号を通過させるフィルタ $\{u_{j,k}^{BP}\}$ と目的信号を阻止するフィルタ, $\{u_{j,k}^{BR}\}$ から構成される. 最

Fig. 4 Design method of the band pass filters

終分解レベル J においては必要に応じて高周波成分側だけではなく、低周波成分側にも分解数列 $\{a_n\}$ の代わりに $\{u_{J,k}^{BPC}\}$, $\{u_{J,k}^{BRc}\}$ が使用される。

また図 3(a) に示される分解アルゴリズム中の高周波成分を求める計算は次式となる。

$$d_{j,n}^{BP} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j,2n-k}^{BP} c_{j+1,k} \quad (18)$$

$$d_{j,n}^{BR} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j,2n-k}^{BR} c_{j+1,k} \quad (19)$$

そして、低周波成分 $c_{j,n}$ は式 (7) より求める。ただし、分解レベル $j = J$ においては、低周波成分の分解も可変バンドフィルタを用いて行い、次式にて求める。

$$c_{j,n}^{BP} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j,2n-k}^{BPC} c_{J+1,k} \quad (20)$$

$$c_{j,n}^{BR} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j,2n-k}^{BRc} c_{J+1,k} \quad (21)$$

次に図 3(b) に示される再構成アルゴリズムに沿って、信号の再構成計算法について述べる。まず式 (18) ~ (21) により得られた分解レベル $j = J$ の高周波成分および低周波成分からレベル $J+1$ の低周波成分 $c_{J+1,n}$ を次式にて求める。

$$c_{J+1,n} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{J,n-2k}^{iBPC} c_{J,k}^{BP} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{J,n-2k}^{iBRc} c_{J,k}^{BR} \right) + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{J,n-2k}^{iBP} d_{J,k}^{BP} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{J,n-2k}^{iBR} d_{J,k}^{BR} \right) \quad (22)$$

次に分解レベル $j (j = -1, -2, \dots, J+1)$ の低周波成分 $c_{j,n}$ 、および式 (18)、式 (19) により得られた高周波成分 $d_{j,k}^{BP}$ と $d_{j,k}^{BR}$ からレベル $j+1$ の低周波成分 $c_{j+1,n}$ を求める。

$$c_{j+1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} c_{j,k} + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j,n-2k}^{iBP} d_{j,k}^{BP} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j,n-2k}^{iBR} d_{j,k}^{BR} \right) \quad (23)$$

ただし、分解と再構成の可変バンドフィルタの間には式 (6) に示している従来の分解と再構成フィルタ間の関係により、次式が成り立つ。

$$u_{j,k}^{iBP} = u_{j,-k}^{BP}, \quad u_{j,k}^{iBPC} = u_{j,-k}^{BPC}, \quad u_{j,k}^{iBR} = u_{j,-k}^{BR}, \quad u_{j,k}^{iBRc} = u_{j,-k}^{BRc} \quad (24)$$

ところで、ある分解レベルにおいて検出したい周波数成分がなく従来法の処理を行いたい場合には、該当する分解レベルの高周波成分における分解・再構成アルゴリズムを 2.1 節の手法、つまり従来のベース DWT の分解・再構成アルゴリズムで行えばよい。またレベル J の分解を従来法で行いたい場合にも同様である。すなわち、必要に応じて可変バンドフィルタを使用すれば、信号の最適解析が出来るし、計算量を減少させることもできる。

3.2 可変バンドフィルタの設計

本節では、分解・再構成アルゴリズムに組み込むことができる可変バンドフィルタ $\{u_{j,k}^{BP}\}$ および $\{u_{j,k}^{BR}\}$ ($j = -1, -2, \dots, J$) の設計法を紹介する。ここで、抽出対象の目的信号をフーリエ変換により周波数領域へ変換しその特徴周波数成分が求められ、そしてこれらの特徴周波数成分を通過させる帯域通過型ウェーブレット (Band-Pass Wavelet Set: BP-WS) が構成されることとする。ただし、BP-WS の構成法については、本論文の 4.3 節で胎児心

Fig. 5 Example of mother's and fetal ECG

電からの BP-WS の構成を例にして詳しく紹介する．以下では，図 4 に示す作成手順の模式図に沿って可変バンドフィルタ作成法を説明する．ただし図中の $\hat{\psi}^{BP}(\omega)$ は BP-WS の周波数特性の例で， $\{u_{j,k}^{BP}\}$ は作成される可変バンドフィルタの例である．なお図 4 は $J = -2$ ，すなわちレベル -2 までの分解の例である．

- (1) BP-WS が形成する周波数特性 $\hat{\psi}^{BP}(\omega)$ は領域 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ で定義された関数であるが，この領域の中の $-2^{j+1}\pi \leq \omega \leq 2^{j+1}\pi$ を切り取って，それを周波数方向に $1/2^{j+1}$ 倍して $-\pi \leq \omega \leq \pi$ の領域に展開した，以下の $H_j^{BP}(\omega)$ を求める．

$$H_j^{BP}(\omega) = \hat{\psi}^{BP}(2^{j+1}\omega), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (25)$$

- (2) $H_j^{BP}(\omega)$ は周波数特性を表す関数であるが，同じ周波数特性を持つフィルタ $\{h_{j,n}^{BP}\}$ は，逆フーリエ変換より以下のように求められる．

$$h_{j,n}^{BP} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_j^{BP}(\omega) e^{in\omega} d\omega \quad (26)$$

- (3) $\{h_{j,n}^{BP}\}$ を $\{b_n\}$ で分解し，レベル j の高周波数側のフィルタ $\{u_{j,k}^{BP}\}$ とする．ただし $j = J$ の場合には $\{h_{j,n}^{BP}\}$ を $\{a_n\}$ でも分解し，レベル J の低周波数側の分解フィルタ $\{u_{j,k}^{BPc}\}$ とする．以下にこれらの式を掲げておく．

$$u_{j,k}^{BP} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{k-n} h_{j,n}^{BP}, \quad u_{J,k}^{BPc} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k-n} h_{J,n}^{BP} \quad (27)$$

- (4) (1)–(3) の作業を $j = -1, -2, \dots, J$ において行う．

BR-WS に対応するフィルタに関しても同様に上述 (1)–(4) の手順を行い， $\{u_{j,k}^{BR}\}$ ， $\{u_{j,k}^{BRc}\}$ が得られる．この時 (1) の作業では $H_j^{BR}(\omega) = \hat{\psi}^{BR}(2^{j+1}\omega)$ を用いることになるが， $H_j^{BR}(\omega)$ と $H_j^{BP}(\omega)$ の間には次式が成り立つ．

$$|H_j^{BP}(\omega)|^2 + |H_j^{BR}(\omega)|^2 = 1 \quad (28)$$

なお $H_j^{BP}(\omega)$ ， $H_j^{BR}(\omega)$ は，それぞれ 2π の周期を持つが，式 (28) は実数全体の領域 ($\omega \in \mathbb{R}$) において成立する．

3.3 情報エントロピーによる最適基底の評価

WPT の場合では，分割された各周波数帯域におけるウェーブレット係数の情報エントロピーコストを計算し，コストの値が小さい周波数帯域は目的信号を顕著に含んでいるため，より良い基底として選ばれる．VBF-DWT の場合では，VBF は目的信号にあわせて設計したため最適基底となり，情報エントロピーコストを計算する必要はない．しかし，WPT の最適基底と VBF-DWT の VBF による基底を比較するには統一の評価指標が必要である．

2.3 節で述べるように，解析信号に含まれる大部分の周波数成分が，ほぼ同じ強度で概ね等確率で発生する場合は，情報エントロピーは高い値を示し，散発的な強度の高いパルス性信号を含む場合は低い値を示す．本研究で

Fig. 6 Continuous wavelet transform of the ECG signal

扱っている解析信号は、パルス性の強い胎児心電信号とランダムノイズを含む心電信号である。従って、本研究では目的信号の含有量を評価できる情報エントロピーを評価指標として採用する。

4. VBF-DWT による胎児心電の抽出および最適基底の評価

4.1 胎児心電の特徴

図 5 に胎児心電図の一例を示す。ただし図の (a) は心電計から計測された心電信号であり、(b) は心電信号から独立成分分析 (Independent component analysis : ICA) により分離された“それ以外の成分”である。図 5 の (a) に示すように、計測された心電信号は主に 3 つの成分から構成されており、それは母体心電成分、胎児心電成分とその他ノイズ成分に分けられる。その中で、母体心電成分は胎児心電成分より振幅が大きく、その周波数成分も胎児心電の周波数成分と重畳しているため、信号解析によりそれらの分離が困難とされている。堀米らは ICA を用いて計測された心電信号を“母体心電成分”と“それ以外の信号成分”に分離し、その結果を図 5 の (b) に示している (堀米他, 2013)。しかし、図 5 の (b) に示すように胎児心電成分は“それ以外の成分”に含まれるため、母体心電の残留波形や母体内ノイズなどの影響が大きく、そのまま解析には依然として使えない。本研究では WPT と VBF-DWT を用いて ICA により得られた“それ以外の成分”から胎児心電成分の抽出とノイズ削除を試み、そして WPT と VBF-DWT による基底の良さを比較し、評価を行う。

4.2 ウェーブレット縮退法を用いる胎児心電の分離法

図 6 に示すのは ICA により得られた“それ以外の成分”の連続ウェーブレット変換 (CWT) の結果の例である。ただし図の横軸は時間、縦軸は周波数を示し、各時間における周波数成分の大きさ (エネルギー) は色ラベルで示している。胎児心電と CWT の結果を時間軸上で比較してみると、胎児心電はエネルギーが比較的高いため、CWT の結果が赤色を中心とするパターンとなり、母体心電はその隣のブルー色のパターンとなる。またその他のノイズ成分はエネルギーが小さく、薄ブルー色のパターンとなり広い領域に存在している。また胎児心電の周波数成分は母体心電の周波数成分とほぼ同じ周波数帯にある。そのため、胎児心電成分と母体心電成分は従来のフーリエ変換やバンドパスフィルタなどにより分離することが困難である。そこで、ウェーブレット縮退法による胎児心電の分離方法を考える。

ウェーブレット縮退法は Donoho により提案された手法で、ウェーブレット変換により分解された各ウェーブレット係数に対して目的信号とノイズの選別を行い、得られた新たなウェーブレット係数を再構成して目的信号を

(a) Frequency character of the fetal ECG (b) Character of BP-WS and BR-WS
Fig. 7 Frequency character of the fetal ECG, and band pass and band reject filters

抽出する手法である (Donoho, 1995) . 以下に Soft thresholding と呼ばれるウェーブレット縮退法の処理式を示す .

$$\hat{d}_{j,n} = \begin{cases} d_{j,n} + \lambda, & d_{j,n} < -\lambda \\ 0, & -\lambda \leq d_{j,n} \leq \lambda \\ d_{j,n} - \lambda, & d_{j,n} > \lambda \end{cases} \quad (29)$$

ただし, $d_{j,n}$ は各レベル j でのウェーブレット係数, n ($n = 1, 2, \dots, N-1, N$) はデータ番号, λ は閾値, $\hat{d}_{j,n}$ は分離された目的信号のウェーブレット係数である . また, 閾値 λ は次式で与えられる .

$$\lambda = \sigma \sqrt{\eta \log_e N} \quad (30)$$

ここで, 定数 η について, 実数型の離散ウェーブレット変換により得られたウェーブレット係数の場合には $\eta = 2$ (Donoho, 1995) , 複素数離散ウェーブレット変換により得られたウェーブレット係数の場合には $\eta = 1.56$ (Zhang, et al., 2006) となる . VBF-DWT の場合には, 定数 η の値はベース DWT によって選択する . また式中の σ はウェーブレット係数の標準偏差とし, 次式で求める .

$$\sigma = \frac{\text{median}(|d_{j,n}| - \text{median}(|d_{j,n}|))}{0.6745} \quad (31)$$

ただし, $\text{median}(|d_{j,n}|)$ は $|d_{j,n}|$ を大きさの順に並べた中央値である .

式 (29) によれば, 目的信号の振幅が閾値より大きい場合には, 閾値以下の信号を解析信号から減算し, またはその部位をゼロ化することによって, 振幅の小さい“ノイズ”を除去することができる . これに対して, 目的信号の振幅が閾値より小さい場合には, 閾値以下の信号を残すことによって目的信号の抽出も可能となる (章他, 2003) . このような処理は, 個々のウェーブレット係数に対して行い, 信号の全体的な形状を損なうことなく, 細かな信号分離が可能になる .

4.3 胎児心電成分に合わせた帯域通過型ウェーブレット (BP-WS) の構成

ウェーブレット縮退法はウェーブレット変換により各周波数帯域に分割された時系列のウェーブレット係数に対し閾値で目的信号を抽出する方法である . そのため, 各周波数帯域には目的信号を顕著に含んでいるほどより良い分離結果が得られる (石川, 2000) . しかし, 従来の DWT または WPT は周波数領域で分解の周波数バンドが固定するため, 詳細な周波数帯域の設定が行えず, 胎児心電成分のみが存在している周波数帯域を選択することが難しい . そこで, 胎児心電の周波数成分のみのウェーブレット係数を得るための可変バンドフィルタを設計するのに必要な帯域通過型ウェーブレット (BP-WS) を構成する . その手順は次の通りである .

まず胎児心電の周波数特性に基づいて BP-WS を作成する . そのために図 6 の胎児心電をフーリエ変換し, 図 7 の (a) に示す . 図 6 と図 7 の (a) から, 胎児心電の周波数成分は主に低周波数領域に集中していることがわかる . したがって, 本研究では BP-WS を通過領域 $f = 5 - 160$ [Hz] を有するバンドパスフィルタとした . またこの帯域を図 7 の (b) の $[\omega_{1,2}, \omega_{1,3}]$ ($\omega = 2\pi f$) で表し, その開始部分 $[\omega_{1,1}, \omega_{1,2}]$, および終了部分 $[\omega_{1,3}, \omega_{1,4}]$ は, 以下の式 (32) ~ 式 (34) を用いて定める . なお以下の式 (34) は, Daubechies が Meyer ウェーブレットを設計した際に用いた曲線である (Daubechies, 1992) .

$$\hat{\psi}^{BP}(\omega) = \sum_{l=1}^N f_l^{BP}(\omega), \quad (32)$$

Fig. 8 Synthesis signals of the fetal ECG with white noise and mother's ECG, where (a) is original fetal ECG, (b) mother's ECG, (c) example of synthesized test signal, (d) SNR and $H(f)$ values of synthesized test signals

$$f_l^{BP}(\omega) = \begin{cases} \sin \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\omega_{l,1}}{\omega_{l,2} - \omega_{l,1}} \left\{ \frac{|\omega|}{\omega_{l,1}} - 1 \right\} \right) \right], & (\omega_{l,1} < |\omega| < \omega_{l,2}) \\ 1, & (\omega_{l,2} \leq |\omega| \leq \omega_{l,3}) \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\omega_{l,3}}{\omega_{l,4} - \omega_{l,3}} \left\{ \frac{|\omega|}{\omega_{l,3}} - 1 \right\} \right) \right], & (\omega_{l,3} < |\omega| < \omega_{l,4}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (33)$$

$$v(x) = x^4 (35 - 84x + 70x^2 - 20x^3) \quad (34)$$

そして、以上のようにして設計した BP-WS に対し、BP-WS の周波数帯域を除去する BR-WS が形成する周波数特性 $\hat{\psi}^{BR}(\omega)$ は、式 (28) により以下の式 (35) で求められる。

$$\hat{\psi}^{BR}(\omega) = \sqrt{1 - |\hat{\psi}^{BP}(\omega)|^2} \quad (35)$$

図 7 の (b) に実線で示した部分は設計した BR-WS であり、破線で示した部分は式 (35) により求められた BR-WS である。さらに、VBF-DWT に適応する VBF は 3.2 節に述べた方法で BP-WS と BR-WS から求められる。

4.4 合成信号による基底系の評価

VBF-DWT による胎児心電抽出効果の確認および VBF により構成された基底系の評価のために、まず図 8 に示している合成信号を作成した。ただし、図 8 の (a) が評価基準となる胎児心電、(b) は母体心電、(c) は合成信号の例、(d) は合成信号の情報エントロピーの値および合成信号の信号とノイズの比 (Signal noise ratio : SNR) である。図 8 の (a) に示すように、胎児心電には振幅の大きい Q,R,S-波だけではなくその前後に小さな P-波と T-波が存在し、それらの位置と波形は心臓病の診断にとって重要な情報である。合成信号の作成については、まず図 8 の (a) の胎児心電に母体心電 (b) を加える。ここで、実際の ICA 後の胎児心電に残留する母体心電の振幅を参考し、加える母体心電の振幅は胎児心電の振幅の 1/6 にした。次に計測された心電信号に含まれている“その他ノイズ”を模擬し、テスト信号にホワイトノイズを加えた。またホワイトノイズのレベルは、合成したテスト信号の SNR が 5, 10, 15, 20, 25, 30 [dB] となるように調整した。さらに各ノイズレベルでの合成信号についてその情報エントロピーの値を計算し、図 8 の (d) に示している。また図 8 の (c) に示した合成テスト信号は、SNR=5[dB]、情報エントロピー $H(f)=6.16$ の例である。

次に、VBF-DWT により合成信号を変換し、VBF を通過した信号のみを再構成してその情報エントロピーも算

Fig. 9 Evaluated results by using entropy $H(f)$ and RMSE values Fig. 10 Extracted results of fetal ECG by using the WPT and VBF-DWT in the condition of SNR=5[dB] and $H(f)=6.16$, where (a) shows result with $H(f)=5.47$, RMSE=-7.24[dB] obtained by the WPT, (b) shows result with $H(f)=5.37$, RMSE=-10.01[dB] obtained by the VBF-DWT

出する．これは，VBF の胎児心電の鮮鋭化効果を確認し，最適基底の評価を行うためである．そして，合成信号を BBA に基づいた WPT 及び VBF-DWT によりウェーブレット係数に変換し，ウェーブレット縮退法で分離された信号から再構成により胎児心電を抽出する．また抽出された胎児心電の情報エントロピーを算出し，比較を行う．さらに，抽出された胎児心電と基準となる胎児心電とのルート 2 乗平均誤差 (Root mean squared error : RMSE) を計算する．この RMSE は，抽出された信号の波形が目的信号の波形から崩れる程度を判断することができ，この値と情報エントロピーの値を照らし合わせることで，VBF-DWT が持つ信号抽出性能の評価を行う．

図 9 の (a) には合成信号から VBF を通過した信号のみを再構成した信号の情報エントロピーの値を示し，(b) には BBA に基づいた WPT と VBF-DWT による胎児心電の抽出結果を示している．また比較のために，図 9 の (a) に合成信号の情報エントロピーの値も示している．そして図 10 には SNR=5 [dB]， $H(f)=6.16$ の合成信号に対し，WPT と VBF-DWT により抽出した胎児心電の例を示している．ただし，図 10 の (a) は WPT による抽出結果で， $H(f)=5.47$, RMSE=-7.24[dB] となり，(b) は VBF-DWT による抽出結果で， $H(f)=5.37$, RMSE=-10.01[dB] となる．

通常，SNR は値が低ければホワイトノイズの成分が多く，高ければホワイトノイズの成分が少ない．一方で，情報エントロピー $H(f)$ は値が高ければ信号の不規則が高く，ノイズなどの成分を多く含んでいることを示している．図 9 の (a) に示すように，SNR=30[dB] の場合に VBF-DWT を用いて VBF を通過した信号のみを再構成した信号の $H(f)$ 値と処理前の合成信号の $H(f)$ 値がほぼ同じであるが，SNR が小さくなるにつれて両者の差が大きくなり，SNR=5[dB] の場合にその差が最も大きく 0.54[dB] となる．これは VBF-DWT の処理により胎児心電成分が鮮鋭化され，ホワイトノイズの成分の影響が低減されるためである．また鮮鋭化の程度は合成信号の SNR が低く，ホワイトノイズレベルが高いほど高い．そして，図 9 の (b) に示した WPT と VBF-DWT により抽出した胎児心電の $H(f)$ の値については，VBF-DWT の方は WPT より低い．特に，SNR=30[dB] の場合にはウェーブレット縮退法を適用する前に両者の $H(f)$ 値がほぼ同じであるが，ウェーブレット縮退法の適用によって VBF-DWT の方が低くなる．また合成信号の SNR<15[dB] の範囲において，WPT と VBF-DWT の $H(f)$ の差は SNR が小さくなるにつれて大きくなっていく．すなわち，同じウェーブレット縮退法を適用しても，VBF-DWT の方がホワイトノイズの除去に優位性がある．これは VBF-DWT の VBF により鮮鋭化された胎児心電成分のウェーブレット係数が他の成分より大きくなるため，ウェーブレット縮退法を適用する際に胎児心電成分とホワイトノイズ成分との分離がしやすくなると考えられる．

Fig. 11 Extracted results of fetal ECG by using the WPT and VBF-DWT from the ECG obtained by ICA, where (I) shows normal fetal ECG and (II) shows abnormal fetal ECG

さらに図 10 の (a) に示した WPT により抽出した胎児心電をみると、ホワイトノイズを完全に除去されておらず、情報エントロピーは $H(f)=5.47$ となっている。そして、胎児心電診断において重要とされる P-波と T-波がノイズに埋められ見出しにくい。これらに対応して、 $RMSE=-7.24[dB]$ で高い値をとっている。これに対して、図 10 の (b) に示した VBF-DWT の結果では、基準となる図 8 の (a) と比較してわかるように、胎児心電は波形が崩れずに抽出されていることが確認できる。また、P-波と T-波に関しては、波形の振幅は少々小さくなったが、P-波と T-波の位置は正しく抽出できている。そして、情報エントロピーは $H(f)=5.37$ 、比較的低い値となり、ホワイトノイズがほぼ完全に除去されている。また、抽出された胎児心電波形は $RMSE=-10.01[dB]$ と低い値をとっており、合成信号中に存在する胎児心電波形にもっとも近いことがわかる。これらにより、VBF-DWT の VBF による基底系が BBA に基づいて選出された WPT の基底系より胎児心電に適応し、良い基底系となることが確認できる。

また、抽出された胎児心電の P-波と T-波の振幅が小さくなったのは、4.2 節で述べたウェーブレット縮退法の閾値 λ の大きさの影響であると考えられる。本研究では閾値 λ を式 (29) によりウェーブレット係数から推定した (Donoho, 1995)。閾値 λ が小さければホワイトノイズを削除しきれない。これに対して閾値 λ が大きければ小さな P-波と T-波の一部が失われる。信号の特性に合わせて最適な閾値を選択することが今後課題である。

4.5 VBF-DWT による胎児心電抽出

前節で、VBF-DWT を用いて合成信号中の胎児心電抽出を行い、その有効性を示した。しかしながら、ノイズ成分として用いた母体心電やホワイトノイズは比較的理想的な信号であり、実際の“それ以外の成分”に含まれる母体心電の残留波形や母体内ノイズなどの成分と異なる。そこで、実際に ICA 後の胎児心電図に対して胎児心電抽出を行う。

図 11 には ICA により得られた“それ以外の成分”の例と胎児心電の抽出結果を示す。ただし、図 11 の (I) は正常の胎児心電を含む“それ以外の成分”の場合であり、(II) は異常の胎児心電を含む“それ以外の成分”の場合である。また図 11 の (a) は ICA により得られた“それ以外の成分”，(b) は WPT により分離された胎児心電，(c) は VBF-DWT により分離された胎児心電である。また ICA による“それ以外の成分”の情報エントロピーは (I)(a) の場合は $H(f)=6.0$ ，(II)(a) の場合は $H(f)=6.32$ である。図 11 の (I) と (II) の (b) については、WPT により抽出された胎児心電にノイズが存在し、P-波と T-波の位置が明確ではない。情報エントロピーは (I) と (II) の (b) とも $H(f)=5.38$ である。特に、図 11 の (II)(b) においては、胎児の Q,R,S-波も見出しにくく、診断に有効であるとは言い難い。

これに対して、図 11 の (I) と (II) の (c) において VBF-DWT による胎児心電の抽出結果では、どちらも全体に細かいノイズが残留することなく、それぞれの波形を確認することができる。図 11 の (II)(c) においては、母体心電の残留波形が存在しているが、有用な胎児心電は波形が崩れずに抽出されることが確認できた。また情報エン

トロピーについては、VBF-DWTの方はWPTの場合より低く、(I)(c)の場合が $H(f)=4.91$ となり、(II)(c)の場合が $H(f)=4.96$ となる。そして図11の(I)と(II)の(c)においては、振幅が小さいが、すべてのP-波とT-波の位置が確認できた。これらの結果により、VBF-DWTの方がWPTより胎児心電抽出に有効であることがわかる。これはVBFによる最適基底系が胎児心電の抽出性能の向上につながったためであると考えられる。

5. ま と め

本研究では、胎児心電抽出とノイズ削除を例にし、提案したVBF-DWTとVBFの構成法の有効性を検証した。得られたおもな結果は以下の通りである。

- (1) 胎児心電成分のみが存在している周波数帯域を選択して可変バンドフィルタ(VBF)を構成する手法は目的信号に合う最適基底を構成するのに有効であった。
- (2) また構成された可変バンドフィルタ(VBF)を用いるVBF-DWTにウェーブレット縮退法を適用し、それにより合成信号とICAによる“その他ノイズ”から胎児心電を抽出することに成功した。
- (3) 胎児心電抽出におけるウェーブレット変換の基底系の良さを評価するために、情報エントロピーを指標とした評価方法を提案し、提案したVBF-DWTと従来のWPTの違いを評価して、その有効性を確認した。
- (4) 胎児心電、母体心電およびホワイトノイズによる合成信号を用いて検証した結果、VBF-DWTのVBFによる基底系がBBAに基づいて選出されたWPTの基底系より胎児心電に適応し、良い基底系となることが確認できた。

今後、4.4節で示した問題点を含めて改善すべき点を見出し、より良いVBF-DWTを作り出すことを目指している。また、異常検出の研究には燃焼制御におけるロッキング信号と突発性コロナノイズの分離やステアリングシステムの異常音源探査における非定常ラトル音とホワイトノイズの分離など、様々な課題があり、今後提案したVBF-DWTを様々な分野へ応用することを試みる。

謝 辞

本研究の一部は(独)日本学術振興会科研費(26420387)の補助を受けたことを付記し、謝意を表します。

文 献

- Daubechies, I., Ten lectures on wavelets (1992), SIAM, Philadelphia.
- Donoho, D. L., De-noising by soft-thresholding, IEEE Transactions on Information Theory, Vol.41, No.3 (1995), pp.613-627.
- 堀米仁志, 胎児の調律以上の診断 (2004), Annual Review, 循環器・中外医学社出版.
- 堀米 仁志, 石川 康宏, 加藤 愛章, 中村 昭宏, 岩本 眞理, 住友 直方, 吉永 正, 独立成分分析を用いた先天性QT延長症候群のT波の解析, -主成分分析との診断精度の比較-, 日本心臓病学会誌 Vol.8, No.1 (2013), pp.14-25.
- 石川康宏著, 臨床医学のためのウェーブレット解析 (2000), 科学出版社, pp.154-240.
- Mallat, S. G., A wavelet tour of signal processing (1999), Academic Press, New York.
- Ruch, D. K. and Fleet, P. J. V., Wavelet theory, an elementary approach with applications (2009), Wiley, p.399.
- Sawada, H. Mukai, R. Araki S. and Makino S., Frequency domain-blind source separation (2005), pp.299-327, in Speech Enhancement, Benesty, J., et al., (Eds.), Springer.
- Toda, H. and Zhang, Z., Perfect translation invariance with a wide range of shapes of hilbert transform pairs of wavelet bases, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Vol.8, No.4 (2010a), pp.501-520.
- Toda, H. Zhang, Z. and Imamura, T., The design of complex wavelet packet transforms based on perfect translation invariance theorems, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Vol.8, No.4 (2010b), pp.537-558.
- 章 忠, 戸田 浩, 川畑洋昭, 複素数多重解像度解析によるレコード音楽野パルスノイズ除去に関する研究, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.69, No.680 (2003), pp.966-973.

- Zhang, Z. Toda, H. Horiata, S. and Miyake, T., Nonstationary signal analysis using the RI-Spline wavelet, International Commission on Atmospheric Electricity, Vol.13, No.2 (2006), pp.149-161.
- Zhang, Z. Toda, H. Imamura, T. and Miyake, T., A new variable filter band discrete wavelet transform: theory and principle, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Vol.11, No.4 (2014), pp.1460006-1–1360006.21.

References

- Daubechies, I., Ten lectures on wavelets (1992), SIAM, Philadelphia.
- Donoho, D. L., De-noising by soft-thresholding, IEEE Transactions on Information Theory, Vol.41, No.3 (1995), pp.613-627.
- Horigome, H., Diagnosis of tuning or more fetal, Annual Review CIRCULATORY ORGAN (2004), pp.193-199 (in Japanese),
- Horigome, H. Ihikawa, Y. Kata, Y. Nakamura, A. Iwamoto, M. Sumitimo, N. and Yoshinaka, M., Analysis of T wave in congenital long QT syndrome by independent component analysis: comparison of its Diagnostic accuracy with principal component analysis, Journal of Cardiol Japan, Vol.8, No.1 (2013), pp.14-25 (in Japanese).
- Ishikawa, Y., Wavelet transform for clinical medicine (2000), Medical publication, p.260.
- Mallat, S. G., A wavelet tour of signal processing (1999), Academic Press, New York.
- Ruch, D. K. and Fleet, P. J. V., Wavelet theory, an elementary approach with applications (2009) , Wiley , p.399.
- Sawada, H. Mukai, R. Araki S. and Makino S., Frequency domain-blind source separation (2005), pp.299-327, in Speech Enhancement, Benesty, J., et al., (Eds.), Springer.
- Toda, H. and Zhang, Z., Perfect translation invariance with a wide range of shapes of hilbert transform pairs of wavelet bases, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Vol.8, No.4 (2010a), pp.501–520.
- Toda, H. Zhang, Z. and Imamura, T., The design of complex wavelet packet transforms based on perfect translation invariance theorems, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Vol.8, No.4 (2010b), pp.537–558.
- Zhang, Z. Toda, H. and Kawabata, H. , Study of removing pulse noise from record music using complex multi-resolution analysis, Transaction of the JSME Series C, Vol.69 , No.680 (2003) , pp.966-973 (in Japanese) .
- Zhang, Z. Toda, H. Horiata, S. and Miyake, T., Nonstationary signal analysis using the RI-Spline wavelet, International Commission on Atmospheric Electricity, Vol.13, No.2 (2006), pp.149-161.
- Zhang, Z. Toda, H. Imamura, T. and Miyake, T., A new variable filter band discrete wavelet transform: theory and principle, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Vol.11, No.4 (2014), pp.1460006-1–1360006.21.