可制御領域の解析に基づく車両運動性能の評価 (可制御領域の計算アルゴリズムとタイヤ特性が可制御領域に及ぼす影響)

堀内 伸一郎^{*1}

Evaluation of vehicle maneuverability based on controllability region analysis (An algorithm for controllability region computation and effects of tire force characteristics on the controllability region)

Shinichiro HORIUCHI^{*1}

^{*1} Department of Mechanical Engineering, College of Science and Technology, Nihon University
1-8-14 Kanda Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8308, Japan

Received 19 March 2015

Abstract

This paper proposes an analytical method to evaluate vehicle maneuverability based on the comparison of null-controllability regions that are defined as the set of all initial states which can be transferred to the origin of the state space by means of admissible controls. Assuming that the multidimensional null-controllability region can be analyzed by a number of two dimensional cross sections, an optimization-based algorithm combined with a trajectory reversing approach and a ray gridding method to compute the projection of multi-dimensional controllability region onto a two-dimensional cross section is proposed. In this algorithm, the problem to determine the boundary of the controllability region is formulated as an optimal control problem to find the control inputs that maximize the norm of the terminal state of a time-reversal system starting from the origin. The null-controllability region and a reachability region of two simple examples are computed and compared with the results of previous research to demonstrate the validity of the proposed algorithm. Then the effect of tire nonlinear property on vehicle maneuverability is evaluated by comparing the size and shape of the null-controllability regions for two vehicle configurations. The results clarify the effect of tire property on the null-controllability region.

Key words : Controllability region, Vehicle maneuverability, Optimal control, Trajectory reversing approach, Ray gridding method

1. 緒 言

近年、車両の運動性能、安全性、快適性向上のため ESC(Electronic Stability Control), AFS(Active Front Steering), AWS(All Wheel Steering), アクティブサスペンションなどのシャシ制御が盛んに研究され、その一部は市販車にも搭載されている。シャシ制御系の性能は車両の安全性に直接関係するため、十分な性能評価が必要である。このような性能評価の第一段階は、車両モデルを用いた机上のシミュレーションである。机上シミュレーションによる評価は、実車試験と同様にオープンループの評価とクローズドループの評価に分ける事ができる。オープンループの評価はステップ入力や sine with dwell 入力などの特定の入力に対する車両応答を評価するものであり、クローズドループの評価ではドライバモデルを含んだ人間-自動車系の閉ループシミュレーションによってシャシ制御系の性能を評価する。しかし、これらのシミュレーションによって得られるのは、特定の入力や特定の初期条件

に対する応答, いわば特殊解のみであり, 必ずしもシャシ制御の本質的な性能を表しているとは言い難い. 特に, 車両の非線形性が強く現れる限界領域を含むシャシ制御の特性を評価するためには, より洗練された解析的評価法が望まれる.

また従来のシャシ制御系の評価においては, 制御方式の性能との制御則の性能を区別して取り扱っていなかったことが1つの問題である. ここで, 制御方式とはどのような制御アルゴリズムを用いるかとは関係なく, どのような入力との組み合わせを用いて車両を制御するかを表すものとする. 横・方向の運動制御であれば, 通常の車両は前輪舵角入力のみを用いるが, ESC では前輪舵角に加え左右輪の差動ブレーキ力, AWS では前輪舵角に加え後輪舵角を用いるなどいくつかの制御入力との組み合わせが考えられ, この組み合わせによって制御性能が異なる. これに対し制御則の性能とは, 利用可能な制御入力に対して種々の制御系設計手法を用いて設計された制御則がどれだけ有効に運動を制御しているかを意味する. 高性能な制御則は制御方式の限界までの性能を発揮することができるが, 当然のことながら, 制御則の限界は制御方式の限界を超える事はできない. 制御方式の限界にどれだけ近づく事ができるかが制御則の性能を表す指標となる. 従来のシミュレーションによる評価ではこれらを区別していなかったため, シャシ制御の限界が制御方式によるものか, 設計された制御則の性能によるものかが曖昧であった.

以上のような背景のもと, 本論文では非線形性が強く現れる限界領域における車両運動性能の新たな評価法として, 可制御領域の比較に基づく方法を提案する. 可制御領域とは許容される入力によって指定された終端状態に到達できる初期値の集合と定義される. よく知られているように, 非線形システムは平衡点で線形化したシステムが可制御であれば, その平衡点のまわりに局所的な可制御領域をもつ. 原点が到達すべき終端状態であるとき, このような可制御領域は零可制御領域と呼ばれている. 車両運動の場合, 零可制御領域は与えられた入力との組み合わせを用いて安定な直進状態に復帰できる初期値の集合となる. したがって, もし車両が外乱等によって可制御領域の外まで乱されると, どのような制御入力を用いても車両を直進状態に復帰させる事はできない. より大きな可制御領域は安定な直進状態に戻すことのできる領域が広いことを意味するので, 零可制御領域の大きさは車両の運動性能を評価する1つの指標と見なす事ができる. また, 可制御領域を評価に用いることにより, 制御方式の性能と制御則の性能を区別して扱う事ができる. すなわち, 各種制御方式に対して制御則を含まない車両単体の可制御領域を比較すれば制御方式そのものの性能が評価できる.

入力に拘束のある線形システムの可制御領域を求める問題は広く研究され, いくつかの計算アルゴリズムが提案されており (Hu and Lin, 2001, Corradini, et al., 2011), 線形化した航空機モデルや潜水艦モデルの可制御領域を検討した研究が公表されている (Goman and Demenkov, 2004, Wang and Chen, 2008, Pandita, et al., 2009). 非線形システムの可制御領域に関しては, その境界を生成する制御入力が必要条件を与える Controllability Minimum Principle と呼ばれる定理が存在する (Grantham and Vincent, 1975) が, 最適制御における最大原理の適用と同じように, この定理に従って非線形システムの可制御領域, 特に高次システムの可制御領域を求めるのは簡単ではない. ハイブリッドシステムに対しては Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解を用い航空機の可到達領域を計算した報告されている (Bayen, et al., 2007) が, 一般の非線形システムに対するより実用的な計算アルゴリズムが望まれている. そこで, 本論文では高次非線形システムの可制御領域はその可制御領域のいくつかの2次元断面によって表現できるものと考え (Vincent and Wu, 1990), 2次元断面における可制御領域の境界を求める問題を一種の非線形最適制御問題として定式化し, 数値的最適化手法を用いて解く手法を提案する. 簡単な例題を用いて提案手法の有効性を示したあと, 可制御領域による車両運動性能評価の第1段階として, 単純化した非線形車両モデルを用い, タイヤ特性の違いが可制御領域に及ぼす影響を検討する.

以下, 本論文の構成はつぎの通りである. 第2章では可制御領域の定義を与え, 逆時間システムの最適制御に基づく可制御領域の計算アルゴリズムについて述べる. 第3章では提案するアルゴリズムを2つの簡単な例題に適用し, その妥当性を示す. 第4章では非線形車両モデルの可制御領域を計算し, タイヤ特性の影響を検討する. 第5章では得られた結論についてまとめる.

2. 可制御領域とその計算アルゴリズム

2.1 可制御領域と可到達領域

つぎのような非線形システムを考える.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

ここで, $\mathbf{x} \in R^n$ は状態ベクトル, $\mathbf{u} \in R^m$ は制御ベクトルである. 式 (1) は唯一解をもち, 関数 $\mathbf{f}$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}$ に関して連続的微分可能であると仮定する. 制御入力 $\mathbf{u}$ はつぎのような不等式拘束条件を満足するものとする.

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (2)$$

ここで, 不等号は各要素ごとに適用されるものとする. このシステムに対し可制御領域 $\mathcal{C} \in R^n$ とは有限時間 t_f 内の許容入力 $\mathbf{u}(t)$, $0 \leq t \leq t_f$ によって, 指定された目標集合 $\mathcal{X}$ に到達可能な初期値 $\mathbf{x}_0$ の集合と定義される (Vincent and Grantham, 1997). 定義からわかるように, 可制御領域は式 (1) で表されるシステム, 目標集合 $\mathcal{X}$, 到達時間 t_f , および式 (2) の入力拘束のみに関係し, 制御入力 $\mathbf{u}(t)$ を生成する制御則とは無関係である. $\mathcal{X} = \mathbf{O}$ のとき, すなわち目標集合を状態空間の原点とすると, このような可制御領域は零可制御領域と呼ばれる. 線形システム $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ では可制御性は可制御性マトリクス $\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ のランク条件によって決まり, もしシステムが可制御なら可制御領域は入力に拘束がないかぎり状態空間全体となる. また, 入力に拘束のある不安定線形システムは有界な可制御領域をもつことが知られている (Formal'skii, 1968). しかし, 非線形システムでは入力に拘束がなくても目標集合 $\mathcal{X}$ の周囲に限定された可制御領域をもち, 入力の拘束が課せられるとその領域はさらに限定的となる.

以上のような可制御領域の定義に対し, $\mathcal{X}$ からの可到達領域 $\mathcal{R} \in R^n$ とは, 許容入力によって $\mathcal{X}$ 内の初期値から到達可能なすべての状態 $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$ の集合と定義される. 可制御領域と同様に, 可到達領域も制御入力 $\mathbf{u}(t)$ を生成する制御則とは無関係であり, 拘束範囲内のすべての入力をもつ制御の可能性を示している.

2.2 多次元可制御領域の投影

一般に高次システムの可制御領域を多次元状態空間内で解析するのは簡単ではない. その1つの方法は, 多次元可制御領域をいくつかの2次元断面へ投影して解析する手法である. 異なった2次元断面における投影を検討することにより, 多次元可制御領域の様相を知ることができる. このような2次元断面への投影法により, 多次元可制御領域の計算を大幅に簡単化することができる.

2.3 逆時間システム

式 (1) で表される開ループシステムに対し, 次式で表される式 (1) の逆時間システム

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = -\mathbf{f}\{\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)\} \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(\tau) \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (4)$$

を考える (Genesio, et al., 1985). ここで, $\tau = t_f - t$ は式 (1) で表されるシステムの目標集合 $\mathcal{X}$ までの到達時間を表す. 式 (3) のシステムは式 (1) のシステムと同じ位相軌道をもつが, その向きが逆となる. このことから式 (1) に対する目標集合 $\mathcal{X}$ への可制御領域 $\mathcal{C}$ は, 式 (3) の $\mathcal{X}$ からの可到達領域 $\mathcal{R}$ と等しいことが証明されている (Snow, 1967). この逆時間システムを用いると, 順時間システムの零可制御領域を求める問題は逆時間システムの原点からの可到達領域を求める問題に変換できる. 逆時間システムの可到達領域を求める問題は, 式 (3) で表されるシステムの終端状態を最大化する一般的な最適制御問題となるので, 式 (1) で表される順時間システムの初期値を最大化する問題より定式化が容易である. また, 式 (1) の順時間システムを用いると2次元断面における状態変数の初期値は最大化すべき変数として求められるが, それ以外の状態変数の初期値については何らかの仮定が必要となる. これに対し, 式 (1) の逆時間システムでは初期値が状態空間の原点と指定されているので, すべての初期値が既知となり上記のような問題を回避できる.

2.4 可制御領域計算問題の最適制御問題としての定式化

可制御領域の境界を求める問題を、式 (3) の状態変数 x_i と x_j の 2 次元断面における終端値ノルム $\|[x_i(t_f) \ x_j(t_f)]^T\|$ を最大化するような制御入力 $\mathbf{u}(\tau)$ を求める最適制御問題として定式化する。指定された方向でノルム最大となる終端値を求めるため、ray-gridding approach (Yfoulis, et al., 2002) を応用し、図 1 のように x_i - x_j 面の原点から放射状のベクトル $\mathbf{r}_k, k=1, 2, \dots$ を定義する。 k 番目のベクトルの方向を示す角度を θ_k とする。

Fig. 1 Combination of the trajectory reversing method and the ray gridding approach to obtain the boundary $\partial \mathcal{C}$ of the null-controllability region. A set of rays starting from the origin is defined. The boundary $\partial \mathcal{C}$ at the k -th direction is determined as the solution of norm maximization problem of the terminal state $\mathbf{x}(t_f)$ of the time-reversing system.

可制御領域 $\mathcal{C}$ の境界 $\partial \mathcal{C}$ と k 番目の放射ベクトルとの交点は、次のような最適制御問題の解として求められる。

$$\text{Find } \mathbf{u}(\tau), \tau \in [0, t_f] \text{ that maximizes the objective function : } J = \|[x_i(t_f) \ x_j(t_f)]^T\| \quad (5)$$

$$\text{State equation : } \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = -\mathbf{f}\{\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)\} \quad (6)$$

$$\text{Initial condition : } \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\text{Inequality constraint for control input : } \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(\tau) \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad \text{component-wise} \quad (8)$$

$$\text{Equality constraint for terminal state : } \phi = \frac{x_j(t_f)}{x_i(t_f)} - \tan \theta_k = 0 \quad (9)$$

なお、ここで提案している計算法は可制御領域が凸集合であることを前提としているが、極端な非凸性でない限り実用上問題ないと考えられる。

2.5 最適制御問題の解法

式 (5) から (9) の最適制御問題を解くにあたって、本論文では Transcription method (Betts, 2001) を用いた。この方法では連続時間最適制御問題の入力を離散化してパラメタ化し、離散化した入力を用いて状態方程式を解き、その結果に基づいて評価関数と終端拘束を計算する。これにより、評価関数と終端拘束が入力パラメタの関数となり、最適制御問題がパラメタ最適化問題に変換される。このパラメタ最適化問題は一般的な数値計画法を用いて解くことができる。この方法の利点は式 (8), (9) のような入力や状態変数に対する等式・不等式拘束条件を含んだ一般的な最適制御問題を容易に解くことができる点にある。

まず、最適制御入力を求める時間区間 $\tau \in [0, t_f]$ を以下のように N 個のセグメントに分割する。

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \cdots < \tau_{N-1} < \tau_N = t_f \quad (10)$$

これらのセグメントは等間隔に分割するものとする。この時間分割に対応して、式 (6) の入力 $\mathbf{u}(\tau)$ も初期時刻から終端時刻まで N 個のセグメントに分割する。連続的な制御入力 $\mathbf{u}(\tau)$ を初期時刻における入力 $\mathbf{u}_0$ と各セグメントの終端で与えられる離散的な制御入力 $\mathbf{u}_l, l=1, 2, \dots, N$ で置き換え、このような離散化入力をまとめてパラメタ

ベクトルとして

$$\mathbf{X} = [\mathbf{u}_0^T \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2^T \cdots \mathbf{u}_N^T]^T \quad (11)$$

と表す。離散的な入力を補間し、与えられた初期条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ から状態方程式を数値積分することによって、各セグメントの終端時刻における状態量 $\mathbf{x}_l, l = 1, 2, \dots, N$ が求められる。すなわち、状態量 $\mathbf{x}_l$ は状態方程式の数値積分を介して $m(N+1)$ ベクトル $\mathbf{X}$ の関数

$$\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_l(\mathbf{X}), \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

となる。したがって終端における評価関数 J と等式拘束条件 ϕ もパラメタベクトル $\mathbf{X}$ の関数となる。これにより、式 (5) から (9) の最適制御問題は以下のようなパラメタ最適化問題に変換できる。

$$\text{Find } \mathbf{X} \text{ that maximizes the objective function : } J = J(\mathbf{X}) \quad (13)$$

$$\text{Inequality constraint for the parameter vector : } \mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max}, \quad \text{component-wise} \quad (14)$$

$$\text{Equality constraint : } \phi(\mathbf{X}) = 0 \quad (15)$$

このようなパラメタ最適化問題は逐次 2 次計画法 (Rao, 1996) などの数値的最適化手法を用いて解くことができる。

3. 簡単な計算例

簡単な計算例により、提案する手法の有効性を検討する。

3.1 2 次線形システム

次のような 2 次線形系を考える (Vincent and Grantham, 1997)。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (16)$$

このシステムは不安定であるが、可制御なので入力に拘束がなければ零可制御領域は状態空間全体となる。しかし入力に拘束がある場合、零可制御領域は状態空間の部分集合になる。入力不等式拘束を

$$|u| \leq 1 \quad (17)$$

として、2 章で述べた方法により式 (16) の逆時間システムに関する最適制御問題を解き、 $t_f = 1 \text{ s}, 3 \text{ s}, 5 \text{ s}$ に対する零可制御領域を求めた。

結果を図 2 に示す。計算における入力の分割数 N は 20 としている。図中には Vincent and Grantham, 1997 に示されている零可制御領域の理論値も示している。この図から、 $t_f = 5 \text{ s}$ の場合、提案手法によって求めた零可制御領域は理論値をよく近似していることが確認できる。また、入力の分割数 N を増やすと、連続的な入力に近づくので、理論値との一致はさらに向上することが確認された。当然のことながら、到達時間が短いほど可制御領域は小さくなっている。このように提案手法は任意の終端時間に対する零可制御領域を求めることができるので、与えられた時間内に原点に戻ることができる初期値の集合が得られ、実際の応用において有用であると考えられる。

3.2 3 次線形システム

次のような 3 次システムの原点まわりの可到達領域を考える (Vincent and Wu, 1990)。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

このシステムは可制御なので、入力に拘束がなければ原点から到達可能な領域は状態空間全体となる。しかし、入力に拘束がある場合、可到達領域は状態空間の部分集合になる。入力に対する不等式拘束を

$$|u| \leq 1 \quad (19)$$

Fig. 2 Null-controllability region of the system in Eq.(16) under bounded control in Eq.(17). Computational results for three different terminal times t_f and the theoretical null-controllability region presented in Vincent and Grantham, 1997 are compared.

Fig. 3 Reachability region of the system in Eq.(18) under bounded control in Eq.(19). Computational results for two different terminal times t_f and the reachability region presented in Vincent and Wu, 1990 are compared.

として、3次元可到達領域の x_1 - x_2 平面への射影を求める。可到達領域を求めるためには第2章で述べた方法を応用し、式(18)の順時間システムに関する最適制御問題を解き、終端時刻におけるノルム $\|[x_1(t_f) \ x_2(t_f)]^T\|$ を最大にする入力求めればよい。計算結果を図3に示す。この計算でも入力の分割数 N は20としている。図中には Vincent and Wu, 1990 に示されている可到達領域の理論値も示している。この図からわかるように、提案手法により $t_f = 5$ として計算した可到達領域は理論値をよく近似している。また、到達時間が短いほど可到達領域が小さくなることもわかる。

以上の例題から、提案手法によって零可制御領域や2次以上のシステムに対する可到達領域の射影を求められることがわかった。例題では線形システムを取り上げたが、提案手法は零可制御領域や可到達領域の境界を求める問題を最適制御問題として定式化し、これを数値的に解く手法であるため、線形・非線形に関係なく広い範囲のシステムに適用可能である。次章ではタイヤ力の非線形性を考慮した車両モデルを用いて可制御領域を求め、非線形領域における車両運動性能について検討する。

4. 車両運動性能の可制御領域による解析

第2章で提案した、逆時間システムの最適制御にもとづく可制御領域解析の手法を単純化した車両モデルに適用し、その有用性を検討する。

4.1 車両モデル

図4に示すような簡単な2自由度の車両モデルを用いた。運動方程式は以下のとおりである。

$$m(\dot{v} + ur) = -2F_{yf} - 2F_{yr}, \quad (20)$$

$$I\dot{r} = -2l_f F_{yf} + 2l_r F_{yr} \quad (21)$$

ここで、前後輪のタイヤ横力 F_{yf} と F_{yr} は Magic Formula モデル (Bakker, et al., 1987) を単純化した

$$F_{yi} = D_i \sin \{ C_i \tan^{-1} (B_i \beta_i) \}, i = f, r \quad (22)$$

のようなモデルで表現した。ここで、前後輪のタイヤ横すべり角 $\beta_i, i = f, r$ は

$$\beta_f = \tan^{-1} \left(\frac{v + l_f r}{u} \right) - \delta_f \quad (23)$$

$$\beta_r = \tan^{-1} \left(\frac{v - l_r r}{u} \right) \quad (24)$$

と表される。このタイヤモデルではパラメタ B_i, C_i, D_i を変化させることにより種々のタイヤ特性を表現できる。ここでは図5に示す2種類のタイヤ横力特性をもつ車両AとBを用意した。図5はタイヤ横すべり角に対してタイヤ横力を鉛直荷重で除した正規化横力を示し、車両Aは後輪の正規化横力が前輪のそれより大きく、車両Bではこの関係が逆転している。この違いにより非線形領域において車両Aは前輪横力が飽和していわゆるプロー特性を、車両Bは後輪横力が飽和してスピン特性を示す。ただし、線形領域のタイヤ特性は車両A, Bで同一に設定している。すなわち、式(22)のタイヤ横力モデルを用いると、コーナリングステイフネスは $B_i C_i D_i$ と表されるが、この値を車両A, Bで等しく設定し、線形領域では両車両ともアンダーステア特性になるようにしている。

Fig. 4 Two degree of freedom vehicle model

Fig. 5 Tire lateral force characteristics for Vehicle A (upper) and Vehicle B (lower)

表1に車両モデルのパラメタを示す。

4.2 非線形領域における基本的な運動特性

可制御領域を計算する前に、車両A, Bのタイヤ特性の違いが非線形領域の基本的な運動特性に及ぼす影響を明らかにするため分岐解析 (Kuznetsov, 2004) を行った。速度は $u = 30$ m/s として、前輪舵角 δ_f を分岐パラメタとした。

Table 1 Vehicle parameters

		Vehicle A	Vehicle B
Mass	m [kg]	1299	
Yaw moment of inertia	I [kgm ²]	1627	
Distance from C.G. to front axle	l_f [m]	1.0	
Distance from C.G. to rear axle	l_r [m]	1.45	
Tire parameters	D_f [N]	3205	3394
	D_r [N]	2341	2211
	C_f	1.5	1.3
	C_r	1.35	1.3
	B_f	7.64	8.329
	B_r	15.51	17.05

図6は車両Aの分岐線図で、分岐パラメタである前輪舵角 δ_f に対する平衡点、すなわち定常円旋回の横速度 v とヨーレート r を示している。この図において実線は安定平衡点を示し、定常円旋回が可能であることを意味する。破線は不安定平衡点であり、一定の舵角を保ただけでは定常円旋回ができないことを示す。また、図中のRおよびCは平衡点がそれぞれ実固有値、共役複素固有値をもつことを示す。車両Aでは計算した前輪舵角の全範囲に実線で示される安定平衡点が存在していることがわかる。これは車両Aではどのような前輪舵角でも安定な定常円旋回ができることを意味している。例えば、 $\delta_f = 20^\circ$ では安定平衡点(安定渦状点)が1つ、実固有値をもつ不安定平衡点(鞍点)が1つ、共役複素固有値をもつ不安定平衡点(不安定渦状点)が1つで、合計3つの平衡点が存在する。このときの位相軌道を図7に示す。鞍点近傍では位相軌道が一方方向に非振動的に発散し、不安定渦状点の近傍では位相軌道がらせん状に発散する。これらの不安定平衡点近傍では発散するものの、どのような初期値から出発した位相軌道も最終的には安定渦状点に収束する。したがって、安定渦状点に対する安定領域は位相面全体である。

Fig. 6 Bifurcation diagram for Vehicle A, equilibrium values of lateral velocity v and yaw rate r versus front steer angle δ_f at $u = 30$ m/s.

図8は車両Bの分岐線図である。図中の○はこの点を境として安定・不安定および実固有値・複素固有値が同時に変化することを表している。また●はこの点を境として2つの実固有値をもつ平衡点と共役複素固有値をもつ平衡点に分かれることを示す。○は安定・不安定の境界である。この図から、車両Bは車両Aとは異なり、安定平衡点は $|\delta_f| \leq 4.23^\circ$ の範囲に存在し、この舵角を超えると安定平衡点が消滅して鞍点だけが1つだけになることがわかる。すなわち車両Aが全舵角の範囲で安定な定常円旋回が可能であったことと対照的に、車両Bは前輪舵角 4.23° 以上では定常円旋回ができない。前輪舵角が 19.8° を超えるとさらに2つの不安定平衡点(不安定渦状点と

Fig. 7 Phase portrait for Vehicle A at $u = 30$ m/s and $\delta_f = 20^\circ$.

Fig. 8 Bifurcation diagram for Vehicle B, equilibrium values of lateral velocity v and yaw rate r versus front steer angle δ_f at $u = 30$ m/s.

Fig. 9 Phase portrait for Vehicle B at $u = 30$ m/s and $\delta_f = 25^\circ$.

鞍点)が現れる。この不安定渦状点は舵角が 21.3° を超えると安定渦状点に変化する。このような状態の例として $\delta_f = 25^\circ$ に対する位相軌道を図9に示す。この図で薄墨の部分是不安定領域を示し、この領域に初期値を取ると運動は発散する。安定渦状点の周りの安定領域は非常に狭く、安定領域内の減衰も悪い。

以上の検討から、タイヤ特性が異なる車両 A と B は非線形領域における運動の様相が大きく異なることが確認された。

4.3 車両の可制御領域

提案する手法により, 入力分割数 $N = 10$, 終端時間 $t_f = 1$ s, 入力を前輪舵角 δ_f , 最大許容舵角 $\delta_{f\max} = 2^\circ$ とし, 車両 A, B の零可制御領域を計算した. 結果を図 10 に示す. 前節の図 6, 8 からわかるように, この舵角の範囲では車両 A, B の定常円旋回特性はほとんど変わらない. その結果, 図 10 に示されているように零可制御領域にも大きな違いは見られない. 可制御領域は第 1 象限と第 3 象限に広がり, 第 2 象限, 第 4 象限では非常に狭い. この結果は, 横速度(横すべり角)とヨーレートが異符号となるスピン状態からは直進状態への復帰が困難であることを示している. また, 図中には trajectory reversing method (Genesio, et al., 1985) によって求めた車両 B の直進状態に対する安定領域を白で, 不安定領域を薄墨で示している. この安定領域は原点に関するアトラクション領域であり, 舵角をゼロに保ったまま自動的に直進状態に復帰できる初期値の集合を表す. この計算条件では車両 B の可制御領域はほぼ安定領域の範囲内にあるが, 第 1, 第 3 象限では安定領域の外部から最適制御によって直進状態に復帰できる領域があることがわかる. 従来, 車両の運動性能を安定領域の大きさに評価することが多かったが, たとえ不安定な状態に陥っても適切な操舵によって安定な直進状態に戻ることができるという意味で, 可制御領域は安定領域とは別の運動性能評価指標と見ることができる. 車両 A の安定領域は前節で述べたように図 10 の全平面であるが, 可制御領域の形は車両 B と大差ない.

ここで計算された可制御領域は, 前輪を操舵するいかなる制御則とも無関係に, 前輪の最適制御から求められたものであることに注意されたい. どのように優れた AFS を設計しようとも, 与えられた終端時間と最大許容舵角の条件下でこの可制御領域を超えることはできない. この意味で, 図 10 の可制御領域は前輪操舵という「制御方式」が本質的にもつ特性を表すものである.

Fig. 10 Comparison of the null-controllability region for Vehicle A and B at $u = 30$ m/s, $t_f = 1.0$ s, and $\delta_{f\max} = 2^\circ$.

Fig. 11 Comparison of the null-controllability region for Vehicle A and B at $u = 30$ m/s, $t_f = 1.0$ s, and $\delta_{f\max} = 6^\circ$.

図 6, 8 のように, $\delta_f > 4.23^\circ$ では車両 A, B の旋回特性は大きく異なる. そこで, 最大許容舵角 $\delta_{f\max} = 6^\circ$ とし, 車両 A, B の零可制御領域を求めた結果を図 11 に示す. 最大許容舵角が大きくなったことにより, 可制御領域が $\delta_{f\max} = 2^\circ$ の場合より大きくなっていることがわかる. 可制御領域の拡大は第 1, 第 3 象限で顕著であり, 第 2, 第 4 象限では許容舵角増加による可制御領域の拡大効果は小さい. これは前輪舵角を大きくしても, スピン状態に陥った車両を直進状態に戻す効果は小さいことを意味する. また, 車両 B では許容舵角が安定な定常円旋回ができる範囲を超えているが, 結果として得られた可制御領域は車両 A と大きな差は見られない.

図 12 と 13 は原点から可制御領域の境界までの最適制御入力に対する逆軌道を示したものである. 原点近傍では両車に違いは見られないものの, 可制御領域の境界に近づくとき逆軌道の傾きが異なってくる. このような逆軌道を生成する最適制御入力にも違いがあり, 例えば図 11 に示す $\theta = 70^\circ$ 方向の可制御領域境界は車両 A, B でほぼ一致しているが, 原点からこの境界に到達させるための最適制御入力は図 14 に示すように異なっている. 最適制御入力は両車とも舵角の最大値と最小値の間を切り替えるような Bang-bang 型であるが, 境界に近づいた後半部分では切り返しのタイミングが大きく異なる. このような車両特性ごとに異なる最適制御入力を用いることに

Fig. 12 Reversing trajectories of Vehicle A at $u = 30$ m/s, $t_f = 1.0$ s, and $\delta_{f\max} = 6^\circ$.

Fig. 13 Reversing trajectories of Vehicle B at $u = 30$ m/s, $t_f = 1.0$ s, and $\delta_{f\max} = 6^\circ$.

より、車両の定常円旋回特性が異なっても可制御領域には大きな差が現れない。

Fig. 14 Optimal control inputs for Vehicle A and B at $\theta = 70^\circ$, $u = 30$ m/s, $t_f = 1.0$ s, and $\delta_{f\max} = 6^\circ$.

Fig. 15 Effect of terminal time t_f on the controllability region. Vehicle B at $u = 30$ m/s and $\delta_{f\max} = 2^\circ$.

図 15 は終端時間の変化に対する可制御領域の変化を車両 B で確認したものである。終端時間が短いほど、可制御領域も小さくなっている。このように提案手法は到達時間や使用できる最大入力を指定して可制御領域を求めることができる。

5. 結 論

本論文では車両運動性能を評価する 1 つの指標として可制御領域の利用を検討し、逆時間システムの最適制御に基づく可制御領域の実用的な計算アルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは順時間システムの零可制御領域が逆時間システムの原点からの可到達領域に等しいことを利用し、ray-gridding approach を応用して多次元可制御領域の 2 次元断面への射影を求めるものである。入力に拘束のある簡単な線形システムを例題として提案するアルゴリズムの有効性を検証した結果、十分な精度で零可制御領域と原点からの可到達領域を求めることができることを確認した。続いて 2 自由度非線形車両モデルを用いて、タイヤ特性が可制御領域に与える影響を検討した。非線形境域の定常円旋回特性が大きく異なる 2 種類の車両について、提案する手法により前輪舵角を入力とした場合の可制御領域を計算した。その結果、非線形境域における定常円旋回特性が大きく異なる車両でも、車両特性に合わせた最適前輪舵角を加えることにより、安定な直進状態に復帰可能な初期値の領域には大差ないことがわかった。また、直進状態への復帰時間を変えた場合の可制御領域の変化についても検討した。

本論文で提案した可制御領域による運動性能の評価法は、制御則とは関係なく「制御方式」そのものの性能を検討できることが1つの特徴である。次報ではこの特徴を生かし、前輪操舵、四輪操舵、直接ヨーモーメント制御などの各種シャシ制御方式の性能を比較する予定である。

References

- Bakker, E., Nyborg, L. and Pacejka, H., Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies, SAE paper 870421 (1987).
- Bayen, A. M., Mitchell, I. M., Oishi, M. K. and Tomlin, C. J., Aircraft autolander safety analysis through optimal control-based reach set computation, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 30, No. 1 (2007), pp. 68-77.
- Betts, J. T., *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming* (2001), Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Corradini, M. L., Cristofaro, A. and Ciannoni, F., Computation of null controllable regions for antistable linear systems subjected to input saturation: an iterative approach, *IET Control Theory and Applications*, Vol. 5, Issue 5 (2011), pp.744-749.
- Formal'skii, A. M., Controllability domain of systems having limited control resources, *Automation and Remote Control*, Vol. 29, No.3 (1968), pp. 375-382.
- Genesio, R., Tartaglia, M. and Vicino, A., On the estimation of asymptotic stability region: state of the art and new proposal, *IEEE transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 8 (1985), pp.774-755.
- Goman, M. G. and Demenkov, M. N., Computation of controllability regions for unstable aircraft dynamics, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 4 (2004), pp. 647-656.
- Grantham, W. J. and Vincent, T. L., A controllability minimum principle, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 17, Nos. 1/2 (1975), pp. 93-114.
- Hu, T. and Lin, Z., *Control System with Actuator Saturation: Analysis and Design*, Chapter 2 (2001), Birkhauser.
- Kuznetsov, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd edition (2004), Springer.
- Pandita, R., Chakraborty, A., Seiloeer, P. and Balas, G., Reachability and region of attraction analysis applied to GTM dynamic flight envelope assessment, AIAA paper 2009-6258 (2009).
- Rao, S. S., *Engineering Optimization, Theory and Practice* (1996), John Wiley & Sons..
- Snow, D. R., Determining reachable regions and optimal controls, in *Advances in Control Systems*, Vol. 5, Edited by Leondes, C. T. (1967), pp.133-196, Academic Press.
- Vincent, T. L. and Grantham, W. J., *Nonlinear and Optimal Control Systems*, Chapter 6 (1997), John Wiley & Sons.
- Vincent, T. L. and Wu, Z. Y., Estimating projections of the controllable set, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 13, No. 3 (1990), pp. 572-575.
- Wang, W.L.A. and Chen, Y. J., 3D controllable Set of linear time-invariant open-loop unstable systems with constrained Input - a submarine case, *Engineering Letter*, Vol. 16 (2008), pp.185-192.
- Yfoulis, C. A., Muir, A. and Wellstead, P. E., A new approach for estimating controllable and recoverable for systems with state and control constarints, *Int. Jour. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 12 (2002), pp. 561-589.