未知の低推力加速運動を行う人工衛星の軌道推定
(第2報：接触軌道要素の推定)伊達 直輝^{*1}, 坂東 麻衣^{*2}, 外本 伸治^{*3}Orbital estimation of spacecraft under unknown low-thrust acceleration
(Second report: estimation of osculating orbital elements)Naoki DATE^{*1}, Mai BANDO^{*2} and Shinji HOKAMOTO^{*3}^{*1,*2,*3} Department of Aeronautics and Astronautics, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan

Received 3 December 2014

Abstract

As low-thrust propulsion technology becomes increasingly popular, orbital estimation for low-thrust spacecraft may become an area of increasing interest. More frequent use of low-thrust propulsion to place satellites in orbit gives more opportunities for collisions and radio frequency interference as these spacecraft travel slowly through altitude ranges. The purpose of this paper is to develop a method for estimation of the osculating orbital elements for low-thrust spacecraft. To overcome the instability of the estimation problem with low-thrust acceleration, we estimate the mean elements instead of osculating elements. By use of the averaging technique, Hudson and Scheeres proposed an analytical model of secular variations of orbital elements under thrust acceleration. The resulting averaged equation has a nice property in which only a finite number of Fourier coefficients of the thrust acceleration appear because of the orthogonality of the trigonometric function. Based on the nonlinear state equation representation for the extended state variables which include not only orbital elements but also unknown Fourier coefficients, mean orbital elements and thrust history are estimated from perturbed observation data of mean orbital elements. Then, the mapping from mean to osculating elements which is derived from the perturbation theory is used to estimate the osculating elements. The proposed method is demonstrated through numerical simulations.

Key words : Orbital estimation, Low-thrust spacecraft, Perturbation theory, Unscented kalman filter

1. は じ め に

近年、イオンエンジンに代表される電気推進などの低推力連続加速運動を行う宇宙機が注目を集めている。国内では、きく4号、きく6号、かけはし、きく8号にイオンエンジンが搭載され、うち、きく8号ではイオンエンジンによる南北制御が行われた。また「はやぶさ」は、国内で唯一、惑星間航行においてイオンエンジンによる軌道制御を行ったミッションである。「はやぶさ」においては、推力推定誤差の累積から軌道推定が困難となったため、コースティングとよばれるイオンエンジンを停止した弾道飛行（慣性飛行）をしている期間を設けることによって軌道推定が行われた（吉川他，2005）。これはイオンエンジンが、推力値の時間的な変動や推力方向の不確定性に加え、稼働する台数が不連続に変化するということが起こったため、推力ベクトルを正確に推定する

ことが困難であったためである．宇宙機の軌道推定・制御においては，接触軌道要素ではなく平均軌道要素を入力として用いることが実用的であることが知られている（Schaub and Alfriend, 2001），（Gao, 2008）．そのために従来の軌道推定・制御ミッションにおいては，平均軌道要素は地上で観測されたデータから計算され，宇宙機にアップロードされる．しかし今後重要性を増すと考えられる，より自律的な運用を行うミッションにおいては，平均軌道要素を軌道上でリアルタイムに推定することが必要となる．このような軌道上でのリアルタイムの推定は，宇宙機に搭載された GPS 受信機などのセンサにより，慣性座標系における位置・速度の観測データを得ることによって可能となる（Leung and Montenbruck, 2005）．本研究では，電気推進に代表されるスラストにより低推力連続加速運動を行う宇宙機を対象とし，リアルタイムの観測情報から運動推定を行う．

スラストにより低推力連続加速運動を行う宇宙機に発生する力は，地球からの重力に比べて十分に小さいため，二体問題からの摂動力とみなすことができる．さらに，摂動力が軌道に及ぼす効果は，短周期および長周期で変動する周期項と，時間とともに成長する永年項とよばれる項とに分けることができる．永年摂動のみを考慮した軌道（要素）は平均軌道（要素），永年摂動に周期変動を含めた軌道（要素）は接触軌道（要素）とよばれる．軌道変化の長期変動を知りたい場合は，周期摂動を取り除き，平均軌道のみを考える方が簡易である．この操作は平均化とよばれ，平均化の結果得られる永年項の時間発展を表す運動方程式は平均化方程式とよばれる（Hudson and Scheeres, 2009）．我々は前報（伊達他, 2015）において，未知の低推力により軌道が連続的に変化する宇宙機の軌道推定問題に対して，代表的な非線形カルマンフィルタである拡張カルマンフィルタ（EKF）を用いて，人工衛星の軌道要素情報から，スラスト履歴と平均軌道要素を同時に推定可能なことを示した．ただし前報では，平均化方程式を用いており，周期摂動の影響は考慮されていない．そのため，周期的な軌道変動の影響が軌道制御や衝突回避に要求される精度より小さければ適用できるが，より高精度な軌道推定が必要な場合には，周期摂動の影響を考慮する必要がある．

本論文では，低推力スラストにより加速される宇宙機の軌道の短周期項を表す解析的な表現を導出し，短周期項を含めた接触軌道要素の推定を行う．地球の扁平率による摂動に対しては，Kozai の方法（Kozai, 1959），（Kozai, 1962）や，Brouwer の理論（Brouwer, 1959），（Brouwer and Hori, 1961）などの方法により得られる軌道の解析解が知られている．しかし低推力連続加速による摂動に対しては，接線方向の加速を行う場合などの特別な推力履歴に対する解析解（Battin, 1987）（Prussing and Coverstone-Carroll, 1998）以外の一般的な推力履歴に対する解析解は知られていない．本稿では，Hudson らの平均化方程式と Kozai の方法に基づき，低推力連続加速により生じる軌道摂動の解析解を求める．次に，得られた解析解を用いて未知の低推力により軌道を変更する宇宙機の接触軌道要素を推定し，推定精度を検証する．また，接触軌道要素を観測値として軌道を推定する場合には，平均軌道要素を観測値とする場合に比べ，高周波成分の影響により推定が不安定化しやすいことが知られている．本研究では，直接接触軌道要素を推定するのではなく，平均軌道要素を推定し，その結果を変換することで接触軌道要素を求めることにより，ノイズを含む観測情報から衛星等宇宙物体の運動推定を行う方法として，1) 平均軌道要素を観測量とした場合，2) 接触軌道要素を観測量とした場合，のいずれにおいても安定に接触軌道要素の推定が可能であることを示す．提案手法において扱うことのできる推力には 2 つの制約がある．1 つ目は推力の大きさは十分小さく 1 周期の間に軌道の形状が大きく変化しないこと，2 つ目は推力が周期関数で展開できることである．本論文の構成は以下のとおりである．2 章で低推力連続加速下の人工衛星の運動方程式と平均化方程式を説明する．3 章で低推力連続加速による摂動の短周期項の解析解を導出し，4 章では数値シミュレーションを通して提案法の有効性を示す．

2. 基礎方程式

以下に示す基礎方程式は前報（伊達他, 2015）と同じであるが，本論文で提案する手法に必要な方程式であるため，簡単に説明する．

地球を周回する宇宙機の運動方程式は，ニュートンの運動方程式より

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{F} \quad (1)$$

で与えられる．ここで $\mathbf{r}$ は宇宙機の位置ベクトル， $r = |\mathbf{r}|$ ， μ は中心天体の重力定数， $\mathbf{F}$ は推進力である．推進力 $\mathbf{F}$

Fig. 1 RSW coordinate system

は、図 1 に示されるように動径成分 R 、軌道面内で動径と垂直な成分 S 、軌道面に垂直な成分 W に分けられる。

$$\mathbf{F} = R\hat{\mathbf{r}} + W\hat{\mathbf{w}} + S(\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{r}}) \quad (2)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ 、 $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})/|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|$ である。 $\mathbf{F} = 0$ のときの宇宙機の運動はケプラー運動とよばれる楕円運動となり、軌道長半径や離心率などのケプラー軌道 6 要素は定数であることが知られている。ある時刻 t における宇宙機の軌道 6 要素を与えると、宇宙機の楕円軌道上での位置が一意に決まる。このため、惑星や宇宙機の軌道運動を扱う際には、位置と速度の代わりに軌道 6 要素が用いられる。

2.1 ガウスの惑星方程式

一般に、惑星や衛星の運動は摂動を伴うケプラー運動であり、摂動の効果は、ケプラー運動を規定する軌道 6 要素の時間的変動で表される。この軌道 6 要素の定数変化の運動方程式はガウスの惑星方程式と呼ばれ、摂動力と軌道要素の変化を直接関連づける。

式 (1) における $\mathbf{F}$ を摂動力とみなせる場合の運動方程式を考える。 $\mathbf{F} \neq 0$ のとき、定数であった軌道 6 要素は時間とともに変動する。この摂動力による軌道 6 要素の変化は、以下のガウスの惑星方程式により記述される (Prussing and Conway, 1993)。

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \left(R \frac{ae}{\eta} \sin f + S \frac{a^2 \eta}{r} \right) \quad (3)$$

$$\dot{e} = \frac{\eta}{na} [R \sin f + S (\cos f + \cos u)] \quad (4)$$

$$\dot{I} = \frac{r \cos(f + \omega)}{na^2 \eta} W \quad (5)$$

$$\dot{\sigma}^I = -\frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{\eta^2}{e} \cos f \right) R - \frac{\eta^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) S \sin f \quad (6)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(f + \omega)}{na^2 \eta \sin I} W \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\eta}{nae} \left[-R \cos f + S \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] - \frac{r \sin(f + \omega) \cot I}{na^2 \eta} W \quad (8)$$

$$(9)$$

ここで a は軌道長半径、 e は離心率、 I は軌道傾斜角、 Ω は昇交点経度、 ω は近点引数、 f は真近点離角、 u は離心近点離角、 $n = \sqrt{\mu/a^3}$ 、 $\eta = \sqrt{1-e^2}$ 、 $p = a(1-e^2)$ である。また、 σ^I は、 $t=0$ のときの平均近点角 σ (元期近点角) についての運動方程式において時間とともに発散する項が現れないように変形したものであり、平均近点角 l は以下の関係式を満たす変数である (木下, 1998)：

$$l = nt + \sigma = \int n dt + \sigma^I \quad (10)$$

2.2 平均化方程式

ガウスの惑星方程式における各変数の平均近点角 l に関する平均化を考える．平均化とは，軌道要素の変化率において 1 周期の間の平均量を考える操作であり，例えば，軌道長半径 a の平均近点角 l に関する平均化は，以下のように離心近点離角 u に関する積分に書き換えることができる．

$$\bar{a} \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{a} dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u) \dot{a} du \quad (11)$$

ここで， $\bar{a}$ は a の平均化された単位時間あたりの変化量を表す．Hudson らにより提案されたフーリエ展開を用いた平均化方程式では，制御入力 R, S, W を離心近点離角のフーリエ級数展開

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^R \cos ku + \beta_k^R \sin ku) \quad (12)$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^S \cos ku + \beta_k^S \sin ku) \quad (13)$$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^W \cos ku + \beta_k^W \sin ku) \quad (14)$$

と考える．ここでは，簡単のため周期 2π の周期関数を用いて展開した．この式をガウスの惑星方程式 (3)-(8) に代入し平均化を行うと，軌道要素 $a, e, I, \sigma^I, \Omega, \omega$ に関する平均化方程式が以下のように得られる (Hudson and Scheeres, 2009) ．

$$\bar{a} = 2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left(\frac{1}{2} e \beta_1^R + \sqrt{1-e^2} \alpha_0^S \right) \quad (15)$$

$$\bar{e} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \beta_1^R + \alpha_1^S - \frac{3}{2} e \alpha_0^S - \frac{1}{4} e \alpha_2^S \right) \quad (16)$$

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left[\frac{1}{2} (1+e^2) \alpha_1^W \cos \omega - \frac{3}{2} e \alpha_0^W \cos \omega - \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \beta_1^W \sin \omega - \frac{1}{4} e \alpha_2^W \cos \omega + \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \beta_2^W \sin \omega \right] \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}^I = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[6 \alpha_0^R - \left(3e + \frac{1}{e} \right) \alpha_1^R + e^2 \alpha_2^R + \frac{2-e^2}{e} \sqrt{1-e^2} \beta_1^S - \frac{\sqrt{1-e^2}}{2} \beta_2^S \right] \quad (18)$$

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\csc I}{\sqrt{1-e^2}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \beta_1^W \cos \omega + \frac{1}{2} (1+e^2) \alpha_1^W \sin \omega - \frac{3}{2} e \alpha_0^W \sin \omega - \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \beta_2^W \cos \omega - \frac{1}{4} e \alpha_2^W \sin \omega \right] \quad (19)$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{e} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \alpha_1^R + e \sqrt{1-e^2} \alpha_0^R + \frac{1}{2} (2-e^2) \beta_1^S - \frac{1}{4} e \beta_2^S \right] - \cos I \bar{\Omega} \quad (20)$$

これらは，推力 (12)-(14) に含まれる無限個のフーリエ係数のうち，14 個のフーリエ係数 $\alpha_0^R, \alpha_1^R, \alpha_2^R, \beta_1^R, \alpha_0^S, \alpha_1^S, \alpha_2^S, \beta_1^S, \beta_2^S, \alpha_0^W, \alpha_1^W, \alpha_2^W, \beta_1^W, \beta_2^W$ のみに依存していることがわかる．平均化は宇宙機の長期的な運動を解析するためによく用いられる手法であるが，通常は固定化された推力に対して行われる．これに対し，上述の方程式は任意の推力をフーリエ級数で表すことにより，未知の推力に対する一般的な平均化方程式となっている．

3. 短周期項の導出

Kozai は平均化という操作により，J2, J3, J4 項とよばれる地球の高次重力項による摂動を永年項と周期項に分離し，それらの解析解を求めた (Kozai, 1959) ．本章では，Kozai の方法により低推力連続加速による摂動の短周期項を解析的に求める．接触軌道要素 α_{osc} と平均軌道要素 $\bar{\alpha}$ の間には，以下のような関係式がある．

$$\alpha_{osc}(t) = \alpha_0 + \dot{\bar{\alpha}} t + \alpha_p(t) \quad (21)$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\alpha}_{osc} dl \quad (22)$$

ここで， α_0 は接触軌道要素の初期値， α_p は周期摂動項を表す．式 (21) から周期項の時間微分は以下のように，ガウスの惑星方程式と平均化方程式の差となる．

$$\dot{\alpha}_p = \dot{\alpha}_{osc} - \dot{\bar{\alpha}} \quad (23)$$

この式を任意の時刻まで積分することで、周期項を求めることができる。ケプラー方程式より、時間に関する積分は離心近点離角に関する積分に置き換えることができるので、次のようになる。

$$\alpha_p(t) = \int_0^t (\dot{\alpha}_{osc} - \dot{\alpha}) dt = \frac{1}{n} \int_0^u (\dot{\alpha}_{osc} - \dot{\alpha})(1 - e \cos u) du \quad (24)$$

ここで、ガウスの惑星方程式中の推力を 14 個のフーリエ係数で近似することで、周期項を平均軌道要素と推力パラメータの関数として表すことができる。式 (24) から計算される軌道要素すべての周期項を以下に示す。

$$\begin{aligned} a_p = \frac{2a^2}{\mu} & \left\{ e \left[-\alpha_0^R (\cos u - 1) - \frac{1}{4} \alpha_1^R (\cos 2u - 1) - \frac{1}{2} \alpha_2^R \left(\frac{1}{3} \cos 3u - \cos u + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \beta_1^R \left(e \sin u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) \right] \right. \\ & \left. + \sqrt{1-e^2} \left[\alpha_0^S e \sin u + \alpha_1^S \sin u + \frac{1}{2} \alpha_2^S \sin 2u - \beta_1^S (\cos u - 1) - \frac{1}{2} \beta_2^S (\cos 2u - 1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} e_p = \frac{a^2}{\mu} & \sqrt{1-e^2} \left\{ \sqrt{1-e^2} \left\{ -\alpha_0^R (\cos u - 1) - \frac{1}{4} \alpha_1^R (\cos 2u - 1) - \frac{1}{6} \alpha_2^R (\cos 3u - 3 \cos u + 2) + \frac{1}{2} \beta_1^R \left(e \sin u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) \right\} \right. \\ & + \alpha_0^S \left[\left(2 - \frac{3}{2} e^2 \right) \sin u - \frac{1}{4} e \sin 2u \right] + \alpha_1^S \left(-\frac{3}{4} e \sin u + \frac{1}{2} \sin 2u - \frac{1}{12} e \sin 3u \right) + \alpha_2^S \left[(1-e) \sin u + \frac{1}{3} \sin 3u \left(1 - \frac{3}{4} e \right) - \frac{1}{16} e \sin 4u \right] \\ & \left. + \beta_1^S \left(-\frac{4}{3} e + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} e \cos u - \frac{1}{2} \cos 2u + \frac{1}{12} e \cos 3u \right) + \beta_2^S \left(-\frac{5}{8} e + \frac{4}{3} - \cos u + \frac{3}{4} e \cos 2u - \frac{1}{3} \cos 3u + \frac{1}{16} e \cos 4u \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_p = \frac{a^2}{\mu} & \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left\{ \cos \omega \left[\left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right) \sin u - \frac{1}{4} e \sin 2u \right] + \sqrt{1-e^2} \sin \omega \left(\frac{1}{4} e - 1 + \cos u - \frac{1}{4} e \cos 2u \right) \right\} \alpha_0^W \right. \\ & + \left\{ \cos \omega \left[\left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{2} e^2 \right) e \sin u + \frac{1}{4} (1+e^2) \sin 2u - \frac{1}{12} e \sin 3u \right] - \sqrt{1-e^2} \sin \omega \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} e + \frac{1}{4} e \cos u - \frac{1}{4} \cos 2u + \frac{1}{12} e \cos 3u \right) \right\} \alpha_1^W \\ & + \left\{ \cos \omega \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^2 \right) \sin u - \frac{3}{4} e \sin 2u + \frac{1}{6} (1+e^2) \sin 3u - \frac{1}{16} e \sin 4u \right] + \sqrt{1-e^2} \sin \omega \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{16} e - \frac{1}{2} \cos u + \frac{1}{6} \cos 3u - \frac{1}{16} e \cos 4u \right) \right\} \alpha_2^W \\ & + \left\{ \cos \omega \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} e + \frac{1}{4} e^2 + \frac{5}{4} e \cos u - \frac{1}{4} (1+e^2) \cos 2u + \frac{1}{12} e \cos 3u \right] - \sqrt{1-e^2} \sin \omega \left(\frac{1}{4} e \sin u - \frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{12} e \sin 3u \right) \right\} \beta_1^W \\ & + \left\{ -\cos \omega \left[-\frac{2}{3} + \frac{13}{16} e - \frac{2}{3} e^2 + \frac{1}{2} (1+e^2) \cos u - \frac{3}{4} e \cos 2u + \frac{1}{6} (1+e^2) \cos 3u - \frac{1}{16} e \cos 4u \right] \right. \\ & \left. - \sqrt{1-e^2} \sin \omega \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^2 \right) \sin u - \frac{1}{6} \sin 3u + \frac{1}{16} e \sin 4u \right] \right\} \beta_2^W \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^I = -\frac{a^2}{\mu} & \left\{ \left(-\frac{1}{e} \sin u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \alpha_0^R + \left[\left(\frac{5}{2} - e^2 \right) \sin u - \frac{1}{4} \left(3e + \frac{1}{e} \right) \sin 2u + \frac{1}{6} e^2 \sin 3u \right] \alpha_1^R \right. \\ & + \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e} - 3e + e^3 \right) \sin u + \frac{3}{2} \sin 2u - \frac{1}{6} \left(3e + \frac{1}{e} \right) \sin 3u + \frac{1}{8} e^2 \sin 4u \right] \alpha_2^R \\ & + \left[-\frac{1}{4e} + 3 - \frac{3}{4} e - \frac{1}{3} e^2 - \left(3 - \frac{1}{2} e^2 \right) \cos u + \frac{1}{4} \left(3e + \frac{1}{e} \right) \cos 2u - \frac{1}{6} e^2 \cos 3u \right] \beta_1^R \\ & + \sqrt{1-e^2} \left[\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{4} - e - \frac{2-e^2}{e} \cos u + \frac{1}{4} \cos 2u \right) \alpha_0^S + \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} e + \frac{1}{4} \cos u - \frac{2-e^2}{4e} \cos 2u + \frac{1}{12} \cos 3u \right) \alpha_1^S \right. \\ & + \left(-\frac{2}{3e} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} e + \frac{2-e^2}{2e} \cos u - \frac{2-e^2}{6e} \cos 3u + \frac{1}{16} \cos 4u \right) \alpha_2^S \\ & \left. + \left(\frac{2-e^2}{2e} \sin u - \frac{2-e^2}{4e} \sin 2u + \frac{1}{12} \sin 3u \right) \beta_1^S + \left(\frac{4-3e^2}{4e} \sin u - \frac{2-e^2}{6e} \sin 3u + \frac{1}{16} \sin 4u \right) \beta_2^S \right] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Omega_p = \frac{a^2}{\mu} & \frac{1}{\sqrt{1-e^2} \sin I} \left\{ \left[\sqrt{1-e^2} \cos \omega \left(1 - \frac{1}{4} e \right) - \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos u + \sin \omega \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right) \sin u + \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos 2u - \frac{1}{2} e \sin \omega \sin 2u \right] \alpha_0^W \right. \\ & + \left[\sqrt{1-e^2} \cos \omega \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} e \right) + \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{2} e^2 \right) e \sin \omega \sin u + \frac{1}{4} \sin \omega (1+e^2) \sin 2u - \frac{1}{12} e \sin \omega \sin 3u \right. \\ & + \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos u - \frac{1}{4} \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos 2u + \frac{1}{12} e \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos 3u \left. \right] \alpha_1^W \\ & + \left[\sqrt{1-e^2} \cos \omega \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{16} e \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^2 \right) \sin \omega \sin u - \frac{3}{4} e \sin \omega \sin 2u + \frac{1}{6} \sin \omega (1+e^2) \sin 3u - \frac{1}{16} e \sin \omega \sin 4u + \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos u \right. \\ & - \frac{1}{6} \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos 3u + \frac{1}{16} e \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos 4u \left. \right] \alpha_2^W + \left[\sin \omega \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} e + \frac{1}{4} e^2 \right) + \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin u \right. \\ & - \frac{1}{4} \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin 2u + \frac{1}{12} e \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin 3u + \frac{5}{4} e \sin \omega \cos u - \frac{1}{4} \sin \omega (1+e^2) \cos 2u \\ & + \frac{1}{12} e \sin \omega \cos 3u \left. \right] \beta_1^W + \left[\sin \omega \left(\frac{2}{3} - \frac{13}{16} e + \frac{2}{3} e^2 \right) + \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^2 \right) \cos \omega \sin u - \frac{1}{6} \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin 3u \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} e \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin 4u - \frac{1}{2} \sin \omega (1+e^2) \cos u + \frac{3}{4} e \sin \omega \cos 2u - \frac{1}{6} \sin \omega (1+e^2) \cos 3u + \frac{1}{16} e \sin \omega \cos 4u \right] \beta_2^W \left. \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\omega_p = & \frac{a^2}{\mu} \frac{1}{e} \left\{ -\sqrt{1-e^2}(1-e^2)\sin u \alpha_0^R - \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{2}e\sin u + \frac{1}{4}\sin 2u \right) \alpha_1^R - \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2}\sin u - \frac{1}{2}e\sin 2u + \frac{1}{6}\sin 3u \right) \alpha_2^R \right. \\
& - \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{4} - e + e\cos u - \frac{1}{4}\cos 2u \right) \beta_1^R + \left[2 - \frac{e}{4} - e^2 - (2-e^2)\cos u + \frac{e}{4}\cos 2u \right] \alpha_0^S \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{4} + \frac{e}{4}\cos u - \frac{2-e^2}{4}\cos 2u + \frac{e}{12}\cos 3u \right) \alpha_1^S + \left(-\frac{2}{3} - \frac{e}{16} + \frac{e^2}{3} + \frac{2-e^2}{2}\cos u - \frac{2-e^2}{6}\cos 3u + \frac{e}{16}\cos 4u \right) \alpha_2^S \\
& \left. + \left(\frac{3-2e^2}{4}e\sin u - \frac{2-e^2}{4}\sin 2u + \frac{e}{12}\sin 3u \right) \beta_1^S + \left[\left(1 - \frac{3}{4}e^2 \right) \sin u - \frac{2-e^2}{6}\sin 3u + \frac{e}{16}\sin 4u \right] \beta_2^S \right\} - \cos I \Omega_p
\end{aligned} \quad (30)$$

周期項 (25)-(30) を式 (21) に代入することで、接触軌道要素が平均軌道要素と推力パラメータの関数として表された。

4. 平均化方程式と短周期項の近似解を用いた接触軌道要素の推定

4.1 平均軌道要素を観測量とした場合

前報 (伊達他, 2015) では、平均軌道要素が直接観測可能であるとし、平均軌道要素 $\bar{\alpha}$ と平均化方程式に現れる未知の推力パラメータ θ を同時に推定することを考えた。すなわち、 $\bar{\alpha}$ と θ を統合した状態変数に対する拡大系に対して非線形カルマンフィルタ (片山, 2011), (足立, 丸田, 2012) を適用することで、未知の推力をもつ宇宙機の平均軌道要素と推力を安定して推定できることを示した。

概要を以下に示す。平均軌道要素 $\bar{\alpha}$ と推力のパラメータ θ を統合した以下の状態変数を考える。

$$x = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \theta \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで

$$\bar{\alpha} = [a \ e \ I \ \sigma^I \ \Omega \ \omega]^T, \theta = [\alpha_0^R \ \alpha_1^R \ \alpha_2^R \ \beta_1^R \ \alpha_0^S \ \alpha_1^S \ \alpha_2^S \ \beta_1^S \ \beta_2^S \ \alpha_0^W \ \alpha_1^W \ \alpha_2^W \ \beta_1^W \ \beta_2^W]^T \quad (32)$$

である。このとき状態変数 x に関する離散時間状態方程式表現は

$$x(k+1) = F_d(x(k)) \quad (33)$$

により与えられる。ここで、推力パラメータ θ は一定値をとるものとする、 F_d は平均化方程式 (15)-(20) の離散時間表現 f_d を用いて

$$F_d := \begin{bmatrix} f_d \\ \theta \end{bmatrix} \quad (34)$$

で表される。また、平均軌道要素が直接観測可能であると仮定すると、観測方程式は

$$y(k) = Cx(k) + w(k) \quad (35)$$

$$C = [E \mid \theta] = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ & \ddots \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

となる。ここで、 w は平均軌道要素の観測ノイズを表す平均値 0、共分散行列 Σ_w の正規性白色雑音ベクトルであると仮定する。式 (33) の拡大状態方程式、式 (36) の観測方程式に対して、EKF や Unscented カルマンフィルタ (UKF) などの推定アルゴリズムを適用することで平均軌道要素と推力パラメータの同時推定を行うことができる。

さらに、得られた平均軌道要素および推力パラメータの推定値を式 (21) および式 (25)-(30) により変換することで、接触軌道要素の推定値を得ることができる。

$$\hat{\alpha}_{osc}(k) = h(\hat{x}(k)) \quad (37)$$

$$h(\hat{x}(k)) = \alpha_0 + \hat{\alpha}(k) + \alpha_p(k\Delta t)$$

4.2 接触軌道要素を観測量とした場合

4.1 節では、ノイズを含む平均軌道要素が観測量として得られることを仮定した場合の平均軌道要素と未知推力の推定法を述べた。このような観測値は、地上で接触軌道要素を軌道 1 周にわたり単純平均することにより得られる。しかし 1 章で述べたように、将来のより自律性の高いミッションにおいては、搭載センサから得られた測定値に基づいてリアルタイムの推定を行う必要がある。宇宙機は GPS 受信機などのセンサを搭載することにより、慣性座標系における位置・速度の観測データが得ることができる。このことは接触軌道要素の観測値が得られることを意味する。本節ではこのような状況を想定し、ノイズを含む接触軌道要素を直接観測量とする場合の平均軌道要素の推定法を述べる。

式 (21) および式 (25)-(30) を用いることにより、接触軌道要素を観測量とする場合の観測方程式は以下で与えられる。

$$y(k) = h(x(k)) + w'(k) \quad (38)$$

$$h(x(k)) = \alpha_0 + \bar{\alpha}(k) + \alpha_p(k\Delta t)$$

である。ここで、 Δt はサンプリング時間、 w' は接触軌道要素の観測ノイズを表す平均値 0、共分散行列 $\Sigma_{w'}$ の正規性白色雑音ベクトルであると仮定する。つまり、式 (38) の修正した観測方程式を用いることにより、ノイズを含む接触軌道要素を観測量として平均軌道要素および推力パラメータの推定を行うことができる。さらに式 (37) を用いて、得られた平均軌道要素および推力パラメータから接触軌道要素の推定値を得ることができる。

5. 数値シミュレーション

「はやぶさ」に搭載されたイオンエンジンを想定し、推力パラメータを -5.0×10^{-4} から 5.0×10^{-4} の範囲でランダムに与え、4 章で提案した手法により軌道要素を推定した結果を示す。ここでは一例として、以下の推力パラメータを用いた場合の結果を示す。

$$\begin{aligned} \alpha_0^R &= 1.0550 \times 10^{-5}, \alpha_1^R = -1.1580 \times 10^{-4}, \alpha_2^R = -2.4445 \times 10^{-4}, \beta_1^R = 3.1205 \times 10^{-4}, \alpha_0^S = -3.3955 \times 10^{-4} \\ \alpha_1^S &= 1.9775 \times 10^{-4}, \alpha_2^S = -1.8370 \times 10^{-4}, \beta_1^S = -9.4000 \times 10^{-5}, \beta_2^S = -1.8850 \times 10^{-5}, \alpha_0^W = 4.4260 \times 10^{-4}, \\ \alpha_1^W &= 4.5665 \times 10^{-4}, \alpha_2^W = 3.9810 \times 10^{-4}, \beta_1^W = -4.9350 \times 10^{-5}, \beta_2^W = 1.3095 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (39)$$

このときの推力履歴を図 2 に示す。図より明らかなように、これは一般的な推力履歴の一例である。軌道要素 $a, e, I, \sigma^I, \Omega, \omega$ はそれぞれ $10^3 \sim 10^5$ [km], $10^{-1}, 10^0$ [rad], 10^0 [rad], 10^0 [rad], 10^0 [rad] のオーダーであり、 a についてのみ大きくオーダーが異なっている。このため、 a に関しては初期時刻での平均軌道長半径 $\bar{a}_0$ により正規化した無次元量を用いる。 a の値を $\bar{a}_0$ 倍することで、有次元量に再変換することができる。また、時間についても初期楕円軌道の軌道周期 $2\pi\sqrt{a_0^3/\mu}$ が 2π となるように無次元化を行った。次に、平均軌道要素および接触軌道要素の初期値は以下のように設定した。

$$a_0 = 1, e_0 = 0.1, I_0 = 0.1745[\text{rad}], \sigma_0^I = 0[\text{rad}], \Omega_0 = 0[\text{rad}], \omega_0 = 0[\text{rad}] \quad (40)$$

一般に、式 (21) の右辺第 3 項で表される周期項は 0 でない平均値をもつ。しかし初期値は、初期位相にも依存するために正確に見積もることは難しい。そこで、数値シミュレーションでは、平均軌道要素の初期値は接触軌道要素の初期値に等しいと仮定した。このときの、宇宙機の軌道を図 3 に示す。UKF に用いた平均軌道要素の初期推定値は真値に等しいとし、推力に関する未知パラメータ θ に関しては初期推定値を $\hat{\theta}_i(0) = 0$ とした。また、プロセスノイズはないものとし、観測ノイズ $w(k), w'(k)$ は平均値 0、共分散行列 $10^{-7}E_6$ (E_n は n 次元単位行列を表す) の正規性白色雑音とし、誤差共分散行列の初期値は $P(0) = 10^{-7}E_{20}$ とした。この観測ノイズの大きさは、高度 400km の軌道に換算して長半径に数 10km 程度の誤差を想定して設定した。また、誤差共分散行列の初期値は、軌道要素の推定結果においてよい収束がみられたためこの値を用いた。離散化のサンプリング時間は 0.001、数値積分には MATLAB の組み込み関数の ode45 による可変ステップを使用した。

以下では、導出した近似解と軌道要素の推定の妥当性を評価するため、

case 1 推力，平均軌道要素が共に既知の場合，

case 2 推力が未知，平均軌道要素を観測量とする場合，

case 3 推力が未知，接触軌道要素を観測量とする場合，

の3つに分け，軌道要素および推力履歴の約7周期分の推定結果を示す．

また，推定精度を評価するために，以下の式により計算される平均自乗誤差 RMS を定義する．

$$\text{RMS}(a, b) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (a(k) - b(k))^T (a(k) - b(k))} \quad (41)$$

ここで， N はサンプリング時間と約7周期に相当する時間40から決まるステップ数を用いた．

5.1 case 1: 推力，平均軌道要素が共に既知の場合

式(21), (25)-(30)により求めた接触軌道要素を図4に， $t = 30 \sim 40$ 付近を拡大した結果を図5に示す．図4, 5の青，水色の線はそれぞれガウスの惑星方程式の数値積分により得られる接触軌道要素（真値），赤線の平均軌道要素を変換式(25)-(30)により変換することで得られる接触軌道要素（変換値）である．赤線は平均化方程式の数値積分により求めた平均軌道要素を表している．また，平均化方程式を積分する際には，右辺の値には各時刻での平均軌道要素の値を用いている．図の青線と水色線が同じような傾向を示していることから，式(21), (25)-(30)により接触軌道要素が適切に変換されていることがわかる．ただし， ω, σ^I, Ω の変換結果は， a, e, I の変換結果に比べ，時間の経過とともにやや誤差が大きくなっていることがわかる．この原因として，平均化方程式の初期値のオフセットが考えられる．平均化方程式は接触軌道要素の時間発展の平均的な変化を正確に記述し，接触軌道要素のよい近似となるが，初期値にオフセットがあれば，平均化方程式から求まる平均軌道要素は真の平均から時間とともにずれていくことが知られている（Hudson and Scheeres, 2009）．図4の初期時刻において a, e, I は平均に近い値を初期値としているのに対して， σ^I, ω, Ω は最大または最小付近の値を初期値としていることから a, e, I に比べ σ^I, ω, Ω の初期値のオフセットが大きい．その結果，図4の σ^I, ω, Ω の平均化方程式の積分結果（赤線）と接触軌道要素（青線）のピーク値の關係に注目すると，5周期（ $t \approx 31$ ）付近からずれが大きくなっていることがわかる．つまり，変換に用いた平均軌道要素自体が誤差を含んでおり，変換後の誤差が大きい原因になっていると考えられる．

次に接触軌道要素への変換における変換誤差を評価する．接触軌道要素の真値から得られる位置ベクトルを r_{osc}^* ，平均軌道要素から変換して求められた接触軌道要素から得られる位置ベクトルを r_{osc} ，平均軌道要素の真値から得られる位置ベクトルを r_{mean}^* とする． $\text{RMS}(r_{osc}^*, r_{osc})$ および $\text{RMS}(r_{osc}^*, r_{mean}^*)$ を算出した結果はそれぞれ 1.1642×10^{-6} ， 3.5117×10^{-5} であった．この結果は，接触軌道要素の変換式(25)-(30)の近似誤差は，接触軌道要素と平均軌道要素の差に比べ小さいことを示している．つまり，接触軌道要素を用いて位置ベクトルを変換したほうが平均軌道要素から位置ベクトルを変換するより正確な変換ができることがわかる．

Fig. 2 Variation of thruster for one period.

Fig. 3 Trajectory of spacecraft under randomly generated acceleration in xyz-coordinate.

Fig. 4 History of osculating elements obtained by Gauss variational equation, osculating elements obtained by mean to osculating transformation and mean elements obtained by averaged equation.

Fig. 5 History of osculating elements obtained by Gauss variational equation, osculating elements obtained by mean to osculating transformation and mean elements obtained by averaged equation. (zoom)

5.2 case 2: 推力が未知，平均軌道要素が観測値の場合

式 (36) により与えられる平均軌道要素の観測値および平均化方程式を積分することにより求めた平均軌道要素の値を図 6 に示す．また，UKF により平均軌道要素および推力履歴を推定した結果を図 7 および図 8 に示す．図 6 の緑，赤の線はそれぞれ，平均軌道要素の観測値，平均化方程式を積分することにより求めた平均軌道要素を，図 7 の赤，青の線はそれぞれ，平均化方程式を積分することにより求めた平均軌道要素と推定値を表している．図 7 から UKF により平均軌道要素が正確に推定できていることがわかる．一方，図 8 から推力履歴の推定結果は高周波成分が十分に推定できていないことがわかる．

状態量の推定誤差，および，UKF の誤差共分散行列の対角成分の平方根値を 3 倍 ($\pm 3\sigma$ に相当) した時間履歴を図 9, 10 に示す．平均軌道要素の推定誤差は，図 9 に示されるように小さな値に収まっていることがわかる．これに対して，図 10 に示されるように，推力パラメータに関する推定誤差は変動量が大きいもの存在している．このため，図 8 の推力履歴の推定結果では，平均軌道要素の推定に比べ大きな誤差が生じていると考えられる．

UKF により推定された平均軌道要素および推力パラメータの推定値を式 (25)-(30) および式 (21) に代入することにより求めた接触軌道要素の推定値を図 11， $t = 30 \sim 40$ 付近を拡大した結果を図 12 に示す．図から，平均軌道要素および推力の推定値から式 (21), (25)-(30) により接触軌道要素がある程度推定されていることがわかる．

次に，RMS により評価を行うために，図 7 と図 5 に対応する平均軌道要素の推定値から得られる位置ベクトルを $\hat{r}_{mean}$ ，接触軌道要素の推定値から得られる位置ベクトルを $\hat{r}_{osc}$ とする．10 パターンのランダムな推力に対してシミュレーションを行った結果を表 1 の 1 行目に $RMS(r_{mean}^*, \hat{r}_{mean})$ ，2 行目に $RMS(r_{osc}^*, \hat{r}_{osc})$ に示した．表 1 より，平均軌道要素を観測量とする場合，接触軌道要素の推定結果は平均軌道要素の推定結果に比べ $10^3 \sim 10^5$ 倍悪いことがわかる．

Table 1 RMS for the result of case 2.

sample number	$RMS(r_{mean}^*, \hat{r}_{mean})$	$RMS(r_{osc}^*, \hat{r}_{osc})$
1	3.6234e-09	5.0746e-05
2	2.7608e-09	6.1602e-05
3	3.2703e-08	3.9468e-04
4	2.5566e-09	1.2950e-04
5	9.2355e-09	6.4491e-04
6	6.4315e-09	1.2510e-05
7	2.1735e-08	1.3560e-05
8	2.3783e-09	2.0383e-04
9	1.2458e-08	9.6684e-04
10	7.8335e-09	5.6791e-04
Average	1.0172e-08	3.0461e-04

Fig. 6 History of mean elements obtained by averaged equation and observation data of mean elements.

Fig. 7 History of mean elements obtained by averaged equation and estimated mean elements obtained by UKF.

Fig. 8 History of true and estimated control acceleration.

Fig. 9 History of estimation error and 3σ of mean orbital elements.

Fig. 10 History of estimation error and 3σ of thrust parameters.

Fig. 11 History of estimated osculating elements obtained by Gauss variational equation, estimated osculating elements obtained by mean to osculating transformation based on mean elements obtained by UKF and mean elements obtained by UKF.

Fig. 12 History of estimated osculating elements obtained by Gauss variational equation, estimated osculating elements obtained by mean to osculating transformation based on mean elements obtained by UKF and mean elements obtained by UKF. (zoom)

5.3 case 3: 推力が未知, 接触軌道要素が観測値の場合

式 (38) により与えられる接触軌道要素の観測値およびガウスの惑星方程式を積分することにより得られた接触軌道要素の値を図 13 に示す. また, UKF により観測値から平均軌道要素, 推力履歴を推定した結果を図 14, 15 に示す. 図 14 から, UKF により平均軌道要素のうち a, e, I については正確に推定できているが, ω, σ^I, Ω については誤差が時間とともにやや増大していることがわかる. また図 15 から, 前節の平均軌道要素が観測値の場合に比べ, よい精度で推力履歴を推定できることがわかる.

UKF により推定された平均軌道要素および推力パラメータの推定値を式 (25)-(30) および式 (21) に代入することにより求めた接触軌道要素の推定値を図 16, $t = 30 \sim 40$ 付近を拡大した結果を図 17 に示す. 図から, ω については誤差が時間とともに増大しているものの, 残りの軌道要素については接触軌道要素を精度よく推定されていることがわかる.

次に, 状態量の推定誤差, および, UKF の誤差共分散行列の対角成分の平方根値を 3 倍した時間履歴を図 18, 19 に示す. 図 18 において, 赤線で平均軌道要素の推定誤差, 青線で接触軌道要素の推定誤差を示す. 図 18 から, σ^I, ω, Ω については平均軌道要素の推定誤差が時間とともに増大していることがわかる. 一方, 接触軌道要素の推定誤差については, ω を除き, 平均軌道要素の推定誤差に比べ小さいことがわかる. 5.1 節で述べたように, σ^I, ω, Ω については初期値のオフセットが原因で真の平均値と平均化方程式の誤差が増大していると考えられる. 一方, 5.2 節においては誤差を含む平均化方程式の積分結果を真値として用いているため推定誤差の増大がみられなかった. これに対して, 接触軌道要素を観測値とした場合には, 平均軌道要素の推定が真の平均値により近い値で推定できているため推定誤差が大きくなったと考えられる. このことは, 接触軌道要素に変換した後の推定誤差が変換前の推定誤差より小さくなっていることから確認することができる. ただし, ω については, 接触軌道要素の推定誤差が平均軌道要素の推定誤差と同様に時間とともに増大しており, 他のいくつかの推力パターンにおいても同様の現象が確認された.

また, 図 19 より, 推力パラメータに関する誤差の変動値は, case 2 とは異なり 1 周期以内に小さな値に収束し, 推力履歴をよい精度で推定できていることがわかる. これは, 接触軌道要素の観測量が推力パラメータの同定に十分な周波数成分を含んでいたためである. 図 19 において推力パラメータの推定誤差が $\pm 3\sigma$ 以内に収まらず, 真値に近い値に収束していないものもあるが, それぞれの推力パラメータは推力の推定誤差が小さくなるような値に収束したものと考えられる.

次に, RMS により評価を行うために, 上の平均軌道要素の推定値から得られる位置ベクトルを $\hat{r}_{mean2}$, 接触軌道要素の推定値から得られる位置ベクトルを $\hat{r}_{osc2}$ とする. case 2 の場合と同様に, 10 パターンのランダムな推力に対してシミュレーションを行った結果を表 2 の 2 列目に $RMS(r_{mean}^*, \hat{r}_{mean2})$, 3 列目に $RMS(r_{osc}^*, \hat{r}_{osc2})$ に示した. 表 2 より, 5.1 節に示した接触軌道要素に変換する際に生じる誤差と同じオーダーの精度で接触軌道要素の推定が行われていることがわかる. また, 図 18 の結果からも示唆されるように, 接触軌道要素の推定精度に比べ, 平均軌道要素の推定精度が悪いことがわかる. これは, 図 14 の ω や σ^I の推定において図 7 には見られないドリフトが起これ平均軌道要素の誤差が蓄積されたのに対して, 図 16 の接触軌道要素の推定結果においては, その影響は変換により小さく抑えられていることが理由であると考えられる.

以上, 5.2 節と 5.3 節の結果より, 推力の大きさや観測ノイズの大きさに比べ RMS の大きさは十分小さいことから, 導出した周期項を組み込んだ観測方程式を用いた場合により高精度に軌道が推定できることが確認された. 図 10, 図 19 において推定誤差が $\pm 3\sigma$ 以内に収束していない推力パラメータがあることからわかるように, 一般に, 推力パラメータの値は正確に推定することはできず, 軌道運動の誤差が小さくなるように更新される. 平均化方程式に現れない推力パラメータについては推定を行わないので, 推定値は 0 になり, 推定を行うことはできない. しかし, そのような平均軌道要素で見たときに軌道に変化を残さない推力履歴の場合であっても, 本手法により軌道運動を推定することができる. ここでは, 複数周期にわたる推定結果を示したが, 本手法は軌道運動が数周回続くことを前提としておらず, フィルタの収束時間より十分長い時間の観測データを得ることができれば, 地球を周回しない宇宙機の運動に対しても適用できる.

Table 2 RMS for the result of case 3.

sample number	$RMS(r_{mean}^*, \hat{r}_{mean2})$	$RMS(r_{osc}^*, \hat{r}_{osc2})$
1	7.2361e-05	3.2193e-06
2	5.7051e-05	1.2195e-06
3	3.5104e-04	9.7662e-06
4	9.7288e-06	1.0449e-06
5	2.8300e-05	9.6177e-06
6	1.6520e-05	1.6520e-06
7	2.4606e-05	2.4606e-06
8	1.3629e-05	1.7125e-06
9	9.8542e-05	2.9953e-06
10	5.8344e-05	7.4826e-06
average	7.3012e-05	4.1171e-06

Fig. 13 History of mean elements obtained by averaged equation and observation data of osculating elements.

Fig. 14 History of mean elements obtained by averaged equation and estimated mean elements obtained by UKF.

Fig. 15 History of true and estimated control acceleration.

Fig. 16 History of osculating elements obtained by Gauss variational equation, estimated osculating elements obtained by mean to osculating transformation based on mean elements obtained by UKF and mean elements obtained by averaged equation.

Fig. 17 History of osculating elements obtained by Gauss variational equation, estimated osculating elements obtained by mean to osculating transformation based on mean elements obtained by UKF and mean elements obtained by averaged equation. (zoom)

Fig. 18 History of estimation error and 3σ of mean orbital elements.

Fig. 19 History of estimation error and 3σ of thrust parameters.

6. 結 論

Kozai の方法に基づき、短周期項を求めることで低推力宇宙機の接触軌道要素を表す近似解析解を導出した。導出した近似解により、数値積分を行うことなく低推力宇宙機の軌道を精度よく求めることが可能となる。しかし、導出した近似解は観測雑音による影響を直接受けてしまうという問題がある。このため、Unscented カルマンフィルタと組み合わせることにより軌道要素を推定する方法を提案した。また、本論文では、Unscented カルマンフィルタを用いた結果を示したが、推定手法は別の非線形カルマンフィルタと組み合わせることも可能である。そして、ノイズを含む軌道要素の観測量から、未知の低推力により軌道を変更する宇宙機に対しても軌道要素を精度よく推定できることを示した。さらに、接触軌道要素の解析解を観測方程式に組み込むことで観測量が接触軌道要素の場合にも軌道要素の推定が可能であることが数値シミュレーションにより確認された。また、平均軌道要素を観測値として利用して軌道推定を行う場合と接触軌道要素を観測値として利用する場合の比較を行った結果、接触軌道要素の観測値を利用して軌道推定を行う手法がより精度がよいことが明らかとなった。このような推定は導出した近似解を用いることで初めて可能となるため、本手法が有効であることが示された。しかしながら、接触軌道要素を観測値とした場合、状態変数のいくつかについて平均軌道要素の推定誤差が時間とともに増大すること、推定誤差の増大は平均化方程式の初期値のオフセットに起因するものであることが明らかとなった。このため、より長期間の推定を行うためには、平均化方程式のオフセットを考慮した推定を行う必要がある。また、実際の測位データのノイズを同等な軌道要素のノイズに変換し、観測ノイズのモデルを用いて、より現実的なモデルに即した検討を行うことも今後の課題として挙げられる。

文 献

- 足立修一, 丸田一郎, カルマンフィルタの基礎 (2012), pp. 156-162, 東京電機大学出版局.
- Battin, R. H., An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics (1987), pp. 408-415, AIAA.
- Brouwer, D., Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, The Astronomical Journal, Vol.64 (1959) pp. 378-397.
- Brouwer, D. and Hori, G., Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite, The Astronomical Journal, Vol.66 (1961), pp. 193-225.
- 伊達直輝, 坂東麻衣, 外本伸治, 未知のスラスト運動を行う人工衛星の軌道推定 (第1報: 平均軌道要素の推定), 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 826 (2015), DOI:10.1299/transjsme.14-00487.
- Gao, Y., Low-Thrust nonlinear guidance by tracking mean orbital elements, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 31, No.4 (2008), pp. 1103-1110.
- Hudson, J.S. and Scheeres, D.J., Reduction of low-thrust continuous controls for trajectory dynamics, Journal of guidance, control, and dynamics, Vol. 32, No. 3 (2009), pp. 780-787.
- 片山徹, 非線形カルマンフィルタ (2011), pp. 103-116, 朝倉書店.
- 木下宙, 天体と軌道の力学 (1998), pp.151-153, 東京大学出版会.
- Kozai, Y., The motion of a close earth satellite, The Astronomical Journal, Vol.64 (1959), pp. 367-397.
- Kozai, Y., Second-order solution of artificial satellite theory without air drag, The Astronomical Journal, Vol.67 (1962), pp. 446-461.
- Leung, S. and Montenbruck, O., Real-time navigation of formation-flying spacecraft using global-positioning-system measurements, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 28, No.2 (2005), pp. 226-235.
- Prussing, J. E. and Conway, B. A., Orbital mechanics (1993), pp. 155-163, Oxford University Press New York.
- Prussing, J. and Coverstone-Carroll, V., Constant radial thrust acceleration redux, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 3 (1998), pp. 516-518.
- Schaub, H. and Alfriend, K. T., Impulse feedback control to establish specific mean orbit elements of spacecraft formations, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No.4 (2001), pp. 739-745.
- 吉川真, 大西隆史, 加藤隆二, 市川勉, 石橋史朗, イオンエンジンで航行する探査機の軌道決定, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 53, No. 620 (2005), pp. 257-264.

References

- Adachi, S. and Maruta, I., Fundamentals of kalman filter (2012), pp. 156-162, Tokyo Denki University Press (in Japanese).
- Battin, R. H., An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics, New York (1987), pp. 408-415, AIAA.
- Brouwer, D., Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, The Astronomical Journal, Vol.64 (1959), pp. 378-397.
- Brouwer, D. and Hori, G., Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite, The Astronomical Journal, Vol.66 (1961), pp. 193-225.
- Date, N., Bando, M. and Hokamoto, S., Orbital estimation of low-thrust spacecraft under unknown low-thrust acceleration, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol. 81, No. 826 (2015), DOI:10.1299/transjsme.14-00487.
- Gao, Y., Low-Thrust nonlinear guidance by tracking mean orbital elements, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 31, No.4 (2008), pp. 1103-1110.
- Hudson, J.S. and Scheeres, D.J., Reduction of low-thrust continuous controls for trajectory dynamics, Journal of guidance, control, and dynamics, Vol. 32, No. 3 (2009), pp. 780-787.
- Katayama, T., Applied kalman filter (2011), pp. 103-116, Asakura Publishing Co., Ltd. (in Japanese)
- Kinoshita, H., Celestial and orbital mechanics (1998), pp.151-153, University of Tokyo Press (in Japanese).
- Kozai, Y., The motion of a close earth satellite, The Astronomical Journal, Vol.64 (1959), pp. 367-397.
- Kozai, Y., Second-order solution of artificial satellite theory without air drag, The Astronomical Journal, Vol.67 (1962), pp. 446-461.
- Leung, S. and Montenbruck, O., Real-time navigation of formation-flying spacecraft using global-positioning-system measurements, Vol. 28, No.2 (2005), pp. 226-235.
- Prussing, J. E. and Conway, B. A., Orbital mechanics (1993), pp. 155-163, Oxford University Press New York.
- Prussing, J. and Coverstone-Carroll, V., Constant radial thrust acceleration redux, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 3 (1998), pp. 516-518.
- Schaub, H. and Alfriend, K. T., Impulse feedback control to establish specific mean orbit elements of spacecraft formations, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No.4 (2001), pp. 739-745.
- Yoshikawa, M., Ohnishi, T., Kato, T., Ichikawa, T. and Ishibashi, S., Orbit determination of spacecraft navigated by ion engine, Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol. 53, No. 620 (2005), pp. 257-264 (in Japanese).