塑性不安定における概念と固有状態

守時 一^{*1}

Concept and eigenstate in plastic instability

Hitoshi MORITOKI^{*1}^{*1} 3-4-15 Higashi, Ohgata, Minamiakita-gun, Akita 010-0442, Japan

Received 5 April 2015

Abstract

In the framework of mechanics of plasticity plastic instability has been taken up as the onset of ductile fracture. The occurrence of ductile fracture begins from the appearance of necking phenomena. Hill established a sufficient criterion for uniqueness of boundary-value problem set by given velocities on a part of surface of a body and given nominal traction-rates on the remainder without any restriction placed on changes on geometry. Hill also introduced eigenstates intrinsic to the material wherein the strain can change while the conjugate stress is either stationary or coupled differentially with the strain. The former eigenstate is said to be active, and the latter one is latent. But, identical eigenstate can be obtained under either the latent or the active condition. The latent condition demands work done in second order to vanish, and the active condition corresponds to simultaneous stationary in loads. We adopted the latent condition as the concept of instability, and discussed the onset of plastic instability in several kinds of deformation under hydrostatic pressure. We showed that the eigenstate does not realize simultaneous stationary on loads except for some special cases.

Key words: Plasticity, Plastic instability, Ductility, Necking onset, Uniqueness of solution, Formability of sheets and rods under hydrostatic pressure, Formability in drawing and forging processes

1. 結 言

金属材料を対象に考察する。塑性変形において、変形がその延性限界を超えると変形領域が局所化し、近い将来そこで破壊の起こることが予測される。延性の持続は解の一意性と密接に関係しており、これによって素材の成形性を予測しようとする試みがこれまでなされてきたが、このような手法が十分に達成されているとは言い難い。

この種の考察の発端は引張り試験におけるくびれ問題であった。引張り荷重が最高値に達したとき、試験片の一部に拡散型のくびれ変形が始まり、他の多くの部分は中立変化から除荷へと移行する。くびれ部分では、除荷へと遷移した領域からの拘束を受け変形域の局所化が促される。引張り試験において観察されたこのくびれ現象の始まりが負荷荷重の停留と同期していたことから、負荷荷重の停留がこの種の塑性不安定に共通した本質的な特質であるかのような印象を与えた。このため、多軸負荷においても負荷荷重の同時停留条件が塑性不安定の規準として位置付けられてきた。さらに、引張り試験が静水圧下において行われたと想定したとき、通常の大気圧中における引張り試験と比較して一様変形の限界に違いが生じるか否かについて種々の議論が長年交わされてきた経緯があるが、未だ統一的な見解が得られたとの認識は薄い。

Hill は境界値問題として多価解の存在可能性を許容する唯一解の限界に関する規準 (Hill, 1958) を提唱している。これに準拠して、本論文では拡散くびれに関する塑性不安定の発生を論じた。さらに Hill は唯一解の限界規準を条件としたとき固有状態の存在を提示した (Hill, 1983)。このときの規準を潜在的条件と呼んだ。Hill はさら

に、負荷荷重の同時停留を条件としてもこれと全く同一の固有状態が得られることから、この条件を能動的条件と呼び区別した (Hill, 1996). しかし、この固有状態の下で負荷荷重の同時停留が実現しているか否かの検証は行っていない. 本論文では固有状態とこれらの条件との間の相関を調べ、塑性不安定の本質的な概念について論及した. 考察事例として、二軸張出し変形を静水圧下で実施 (疑似張出し変形) した場合を仮想し、延性限界への周辺静水圧の影響を論じた. これらの事例からも、負荷荷重の同時停留は塑性不安定において本質的な条件であるとは言い難い.

2. 塑性不安定規準の概要

2・1 多価解の存在規準

多価解が発生したとしても、これらの多価解が少なくとも満足していなければならない必要条件が存在する. 本節ではこれについて概説する.

速度型境界条件として、表面力速度 $\dot{\mathbf{F}}$ 、変位速度 $\mathbf{v}$ が付与された状態にあるとする. 変形物体の表面 A ではこの境界条件により力と変位の負荷速度は指定されているので、たとえ物体内部で多価解が発生したとしても、これらは同じ境界条件下になければならない. それゆえ

$$\int_A \Delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{v} dA = 0 \quad (1)$$

は常に満足していることになる. ここで、 Δ は多価解を任意に二つ選び、これらに関する差を表わす. 式 (1) の左辺は、応力速度の平衡条件を考慮すると

$$\int_A \Delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{v} dA = \int_V \mathbf{e}_i \cdot \Delta \dot{\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta \mathbf{v}) dV \quad (2)$$

として体積積分に変換される. ここで、空間直交座標軸を x_i 、その単位ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とし、 $\dot{\mathbf{S}} (\equiv \dot{s}_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$ は公称応力速度テンソルである. これより式 (1) は

$$\int_V \Delta \dot{s}_{ij} \Delta v_{j,i} dV = 0 \quad (3)$$

で置き換えることができる. これが Hill の提示した多価解発生規準 (Hill, 1958) である. 考察領域を多価解が最初に発生した非常に微小な領域に限定し、式 (3) を

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad (4)$$

と書き換える. ここで、式 (4) の左辺は、ミーゼスの降伏規準では

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} = \Delta \dot{\sigma}_g \Delta \dot{\epsilon}_g y \quad (5)$$

の形で表現できる (守時, 奥山, 1998a). $\dot{\epsilon}_g$ は相当ひずみ速度で、 $\dot{\sigma}_g$ は相当応力速度である. y は考察物体点においてその時点の状態量 (式 (16) を参照) で表されている. 式 (4) の条件の下では式 (5) より

$$y = 0 \quad (6)$$

であることが求められる. 任意の多価解の差である式 (4) に代わって

$$z \equiv \dot{s}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad (7)$$

に関しても式 (5) に類似した関係

$$z = \dot{\sigma}_g \dot{\epsilon}_g y \quad (8)$$

が得られる。したがって、多価に関する規準条件として、式 (4) に代わって式 (7) をその要請条件とすることができる。

2・2 固有状態

Hill は圧力依存性を示さない塑性固体について固有状態の概念 (Hill, 1983) を提示し、式 (7) に対応する条件から式 (6) に相当する固有値を求めている。これらでは一般化応力、一般化ひずみが導入されていて、一般化応力には負荷力などが想定され、一般化ひずみ速度は単位体積当たりの仕事増分速度を不変にするように定義している。

一般化応力に公称応力を対応させると、固有値に関連する負荷条件は式 (8) の関係となる (守時, 奥山, 1999)。その外的要件を規制する式 (7) は、そこでのテンソル成分 $\dot{s}_{ij}$, $\dot{\epsilon}_{ij}$ を 9 次元のベクトル成分と見做したとき、これらベクトル間で互いに垂直な方位関係にある場合か、あるいは公称応力速度が零ベクトルである場合に対応させることができる。Hill は、前者を潜在的条件、後者を能動的条件として区別した (Hill, 1996)。しかし、後者の条件は前者のそれに包含されており、当然のことであるが、これら二者により別個に求められた固有値は全く同一の結果を与える。さらに、3・2 節の疑似張出し変形で見ると、この固有状態 (式 (26)) の下では対象とする公称応力速度 (式 (30)) は必ずしも同時停留の状態にはなっていない。同時停留に関して別個の検討を付録 1 に記述した。これらのことから、同時停留の条件は固有状態の負荷要件としては適切ではない。このことを認識することなく、Hill が固有状態の一つに後者の能動的条件を挙げたのは、荷重の停留条件が塑性不安定の概念として必須であるとの認識が無意識に働いていたものと憶測される。

2・3 塑性不安定の概念

Drucker は

$$z^* \equiv \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (9)$$

を 2 次仕事と呼び、塑性変形における安定度の判定尺度として提案した (Drucker, 1964)。Drucker の論法では、

$$z^* < 0 \quad (10)$$

を塑性不安定の前兆と考えた。しかし、式 (9) は

$$z^* = \dot{\sigma}_g \dot{\epsilon}_g \quad (11)$$

の関係にある。 $z^* = 0$ においては、塑性変形の持続 $\dot{\epsilon}_g \neq 0$ を前提とすると $\dot{\sigma}_g = 0$ を要請し、これは完全塑性の状態に相当している。

金属素材の 1 軸引張りでは、引張り荷重が停留する段階で塑性不安定となる。この現象から類推し 2 軸負荷の下でも負荷荷重の同時停留 (Swift, 1952) を塑性不安定の条件とする模索が長く続いた。このような状況下にあつて、Drucker が当時、2 次仕事零の条件を塑性不安定に関する概念の中核に置いたことは、直観的とは言え、非常に革新的であった。しかし、Drucker の概念を後押しできる厳密な変形解析が当時はまだ十分には成熟していません。式 (9) による 2 次仕事は評価尺度として完全ではなかった。このことが、この概念の普及に大きな足枷となった。

物体点の個々の移動が変位であり、この変位は変形前の物体点位置を基準に表現され、これらの相対的变化としてひずみが算出されている。これに対して、応力は変位後の物体点位置において作用している。ひずみと応力との間の変形前後における物体点位置に関するこのような表現の違いが上記の評価量に微妙な誤差をもたらす結果となった。このことはひずみや応力の速度成分に関しても状況は同じである。仕事を想定するとき、それに係

わるひずみと応力は同じ枠組みの下で定義されていなければならない。そこで、応力を変形前の物体点位置に引き戻して表したのが公称応力である(付録2, 式(A7) 参照)。 z^* と z とを比較すると、 z^* における応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ は z では公称応力速度 $\dot{s}_{ij}$ に置き換えられた形となっており、このことにより変位前後に関して生じた枠組みの違いが z では解消され、統一された表現となっている。 z は変形前の単位体積当たりに関して正確な2次仕事であり、式(7)における $z=0$ は「変形物体とその周辺外部との間で交わされる2次仕事は、個々の座標軸に関して出入りはあったとしても全体としては零の状態になければならない」ことを要請している。Drucker は、概念としては z を想定していたのではないかと憶測されるが、変形解析における客観性が当時はまだ未成熟であったため結果的に z^* で表現してしまったと推察される。

条件 $z=0$ は同一境界条件の下で異なった解が存在可能となる外的要件としての規制に相当し、その概念は物体点とその周辺外部との間で交わされる2次仕事が全体としてその出入りの生じない状態にあることを要請している。このことから、式(7)における条件 $z=0$ は塑性不安定の発生を判断する基本指標としての資質を十分に備えている。これに対して負荷荷重の停留条件は、特に同時停留では、一般の応力場では、主応力場に座標変換しないとすると、9種類ある荷重成分の全てを停留させなければならないことになる。さらに、これらの条件を仮に設定したとしてもその状態の実現性に疑問が残る。

多価解の存在が可能となるには、因子 z (式(7)) が零になる状態の発現が求められる。これはまた式(8)において因子 y が零になる固有値と呼応している。因子 z は、2次仕事の素材への流入に関係し、これはまた各座標軸に関する公称応力速度とそれに伴うひずみ速度に関係している。これは外部負荷に関連しているので、因子 z を外部因子と呼ぶ。これに対して、因子 y は固有値でもあり、素材側の状態量に関係していることから内部因子と呼ぶことにした。これら外部因子、内部因子が共に零となる状態(外部要件、内部要件)が共存し、この条件下において塑性不安定状態が出現する。

3. 塑性不安定に関連する基本式

3・1 基礎関係式

金属素材を考察対象としている。したがって、塑性変形は体積一定の条件下にある。そのとき、公称応力速度テンソルの成分は

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{kj} v_{i,k} \quad (12)$$

である(竹山, 1969)。ここで、 v_i は変位速度成分を表わす。Jaumann の応力速度は

$$\dot{\sigma}_{ij}^J = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik} \omega_{kj} - \sigma_{kj} \omega_{ki} \quad (13)$$

で、ひずみ速度と剛体回転速度をそれぞれ

$$\dot{\epsilon}_{ij} \equiv \frac{1}{2}(v_{j,i} + v_{i,j}), \quad \omega_{i,j} \equiv \frac{1}{2}(v_{j,i} - v_{i,j}) \quad (14)$$

としている。このとき、式(12)は

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^J - \sigma_{kj} \epsilon_{ik} + \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad (15)$$

となる。これらを用いて式(8)の y は

$$y = 1 - \sigma'_{rs} C_{rs}, \quad C_{rs} \equiv a \sigma'_{rk} \sigma_{sk}, \quad a \equiv \frac{9}{4} \frac{1}{\sigma_g^2 \frac{d\sigma_g}{d\epsilon_g}} \quad (16)$$

で表される (守時, 奥山, 1998a). ここで, σ'_{ij} は偏差応力である. 相当応力と相当ひずみ速度はそれぞれ

$$\sigma_g \equiv \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \dot{\varepsilon}_g \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} \quad (17)$$

と置いている. ここでは, 通常, 金属素材で常用されているべき乗ひずみ硬化則

$$\sigma_g = c \varepsilon_g^n \quad (18)$$

を適用する. ここで, c と n はそれぞれ硬化係数, 硬化指数である. 本報で具体例が必要な場合には, 素材としてアルミニウムを対象に, おおまかに, $n = 0.27$, $c = 161 \text{ MPa}$ とした. 式 (18) による表現の下で, 式 (8) と式 (16) の a は

$$z = \frac{n}{\varepsilon_g} \sigma_g (\dot{\varepsilon}_g)^2 y, \quad a = \frac{9}{4} \frac{\varepsilon_g}{n \sigma_g^3} \quad (19)$$

さらに y は

$$y = 1 - \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_{gY}}, \quad \frac{n}{\varepsilon_{gY}} \equiv \frac{9}{4} \frac{\sigma_{ij} \sigma'_{ik} \sigma'_{jk}}{\sigma_g^3} \quad (20)$$

となる. $z = 0$ において $y = 0$ が要請される. そのときの状態が固有状態であり, 相当ひずみはこのとき $\varepsilon_g = \varepsilon_{gY}$ の状態にあり, ε_{gY} を限界ひずみと呼ぶことにする. 添字 Y はこの状態に関連していることを表す. 限界ひずみに関しては

$$\frac{n}{\varepsilon_{gY}} = \frac{27}{4} \frac{J_3}{\sigma_g^3} + \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\sigma_g}, \quad J_3 \equiv \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \quad (21)$$

に変換できる. ここで, J_3 は偏差応力の 3 次の不変量, σ は平均垂直応力である. 限界への周辺静水圧の影響はこの σ の項に現れる.

3・2 疑似張出し変形

塑性固体に周辺圧力を作用させることで延性の向上が望めるか否かについては十分には議論が尽くされていない. しかし, 塑性加工の鍛造現場では開放型に比べて密閉型の金型では周辺拘束が大きく, このことが成形性の向上に寄与している傾向が伺える. このような周辺静水圧の影響を調査するため, 板の張出し変形 (平面応力場) に静水圧を付加した状態, 疑似張り出し変形を取り上げた.

以下では主応力場に関して論じる. 疑似張り出し変形について基礎関係式を求める. 付加する静水圧力を p_0 とする. $p_0 = 0$ では, 通常の板の張出し変形の状態になり, 板面内に座標軸 1, 2 を当てる. 座標軸 3 は板厚方向である. 平面応力場における引張り応力を q_1 , q_2 ($\leq q_1$) とする. これに静水圧 p_0 を付加する. p_0 は特別な場合を除き一定値に保持している. このとき, 疑似張出し系に作用する応力と応力速度は

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= q_1 - p_0, & \sigma_2 &= q_2 - p_0, & \sigma_3 &= -p_0 \\ \dot{\sigma}_1 &= \dot{q}_1, & \dot{\sigma}_2 &= \dot{q}_2, & \dot{\sigma}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

である. q_1 , q_2 , さらに p_0 を種々変えることにより, 主応力場において調査に関心のある多くの応力状態が表現できる. さらに, 本論文で考察する変形は, 以下に定義するひずみ速度比 γ を一定に保持する条件下 ($\dot{\gamma} = 0$) で進めるものとする. このとき, 式 (17) の各項は

$$\sigma_g = \sigma'_1 \sqrt{3}\Gamma, \quad \dot{\epsilon}_g = \dot{\epsilon}_1 \frac{2}{\sqrt{3}}\Gamma, \quad \gamma \equiv \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1}, \quad \Gamma \equiv \sqrt{1+\gamma+\gamma^2} \quad (23)$$

である. $p_0 = 0$ に対応する平面応力場における q_i に関する応力比を ς で表すと

$$\varsigma \equiv \frac{q_2}{q_1}, \quad \varsigma = \frac{1+2\gamma}{2+\gamma} \quad (24)$$

である. この第2式はひずみ速度が偏差応力と同方向にあることから得られる. これらを用いて, 式 (21-1) の第1項右辺の各項は

$$\frac{27}{4} \frac{J_3}{\sigma_g^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{4\Gamma^3} \gamma(1+\gamma), \quad \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\sigma_g} = \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma} (1+\gamma) - \frac{3}{2} \bar{p}_0 \quad (25)$$

と変換できる. ここで, 応力関連成分に付した上付記号 $\bar{}$ は, 元の値を相当応力 σ_g で除し, 無次元化した値であることを表す. これらを用いて限界ひずみは式 (21-1) より

$$\frac{n}{\varepsilon_{gY}} = \frac{\sqrt{3}}{4\Gamma^3} (1+\gamma) (2-\gamma+2\gamma^2) - \frac{3}{2} \bar{p}_0 \quad (26)$$

となる.

式 (15) の公称応力速度は, 主応力場では

$$\dot{s}_i = \dot{\sigma}_i - \sigma_i \dot{\epsilon}_i \quad (27)$$

である. ここで, ε_g を時間尺度に採ることとする. このとき

$$\dot{\epsilon}_g \equiv 1, \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma}, \quad \dot{\epsilon}_2 = \frac{\sqrt{3}\gamma}{2\Gamma}, \quad \dot{\epsilon}_3 = -\frac{\sqrt{3}(1+\gamma)}{2\Gamma} \quad (28)$$

となる. したがって, 式 (18), (23) を考慮して

$$\begin{aligned} q_1 &= \sigma_g \frac{2+\gamma}{\sqrt{3}\Gamma}, & q_2 &= \sigma_g \frac{1+2\gamma}{\sqrt{3}\Gamma}, & \sigma &= \sigma_g \frac{1+\gamma}{\sqrt{3}\Gamma} - p_0 \\ \dot{q}_1 &= \frac{n}{\varepsilon_g} \sigma_g \frac{2+\gamma}{\sqrt{3}\Gamma}, & \dot{q}_2 &= \frac{n}{\varepsilon_g} \sigma_g \frac{1+2\gamma}{\sqrt{3}\Gamma}, & \dot{\sigma} &= \frac{n}{\varepsilon_g} \sigma_g \frac{1+\gamma}{\sqrt{3}\Gamma} \end{aligned} \quad (29)$$

の関係を導く. これらを用いて式 (27) に従って公称応力速度は

$$\dot{s}_1 = \frac{2+\gamma}{\sqrt{3}\Gamma} \left(\frac{n}{\varepsilon_g} - \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma} \bar{p}_0, \quad \dot{s}_2 = \frac{1+2\gamma}{\sqrt{3}\Gamma} \left(\frac{n}{\varepsilon_g} - \frac{\sqrt{3}\gamma}{2\Gamma} \right) + \frac{\sqrt{3}\gamma}{2\Gamma} \bar{p}_0, \quad \dot{s}_3 = -\frac{\sqrt{3}(1+\gamma)}{2\Gamma} \bar{p}_0 \quad (30)$$

となる. 式 (30) の ε_g に式 (26) の ε_{gy} を代入することで, 塑性不安定時の限界における公称応力速度 $\dot{s}_{iy}$ が求められる.

外部因子 $\bar{z}$ の各項は定義に従って

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 \equiv \dot{s}_1 \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{2+\gamma}{2\Gamma^2} \left(\frac{n}{\varepsilon_g} - \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma} \right) + \frac{3}{4\Gamma^2} \bar{p}_0 \\ \bar{z}_2 \equiv \dot{s}_2 \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{\gamma(1+2\gamma)}{2\Gamma^2} \left(\frac{n}{\varepsilon_g} - \frac{\sqrt{3}\gamma}{2\Gamma} \right) + \frac{3\gamma^2}{4\Gamma^2} \bar{p}_0, \quad \bar{z}_3 \equiv \dot{s}_3 \dot{\varepsilon}_3 = \frac{3(1+\gamma)^2}{4\Gamma^2} \bar{p}_0\end{aligned}\quad (31)$$

であり, これらを加算すると

$$\bar{z} = \frac{n}{\varepsilon_g} - \frac{n}{\varepsilon_{gy}} \quad (32)$$

となる. ε_g が限界ひずみ ε_{gy} に到達した時点で外部要件 $\bar{z} = 0$ を満足している. ε_{gy} は内部要件 $y = 0$ を満足する条件の下で式 (26) により算出されており, これらが式 (8) の関係の下で同期していることが分かる.

公称応力速度 $\dot{s}_i$ の内, 成分 $\dot{s}_i$ が停留状態 $\dot{s}_i = 0$ となる時点に注目すると, 応力 σ_i に関する負荷停留ひずみ ε_{gs} は式 (30-1) から

$$\frac{n}{\varepsilon_{gs}} = \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma} - \frac{3}{2(2+\gamma)} \bar{p}_0 \quad (33)$$

である. 添字 s はこの状態にあることを表わす. さらに, q_1 に関する公称応力速度は式 (27) の関係に倣って

$$\dot{Q} \equiv \dot{q}_1 - q_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (34)$$

と置くことができる. これは式 (28), (29) を用いて

$$\dot{Q} = \frac{2+\gamma}{\sqrt{3}\Gamma} \left(\frac{n}{\varepsilon_g} - \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma} \right) \sigma_g \quad (35)$$

となる. この停留状態 $\dot{Q} = 0$ に注目し, 応力 q_1 に関する負荷停留ひずみ ε_{gQ} は

$$\frac{n}{\varepsilon_{gQ}} = \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma} \quad (36)$$

で与えられる. これは周辺圧力 p_0 の影響を受けていない. ここで, 添字 Q はこの状態にあることを表わす.

4. 限界変形などについての考察

4・1 静水圧下での引張り試験

引張り試験を静水圧下で行っても, 静水圧付加により塑性不安定の発生を遅らせることができないとする議論がなされている (Hill, 1957) が, 反面そうではないのではないかとする議論 (守時, 1999) もある. これらの議論では依って立つ概念の違いが必ずしも明確ではないため, この問題が提起されてから半世紀以上の期間を経ているにも拘わらず未だに決着したとの感がない. そこで, 2・3 節で論じた塑性不安定の概念に基づいてこのことを検討したい.

3・2節における解析で $\gamma = -1/2$ と置くことで、引張り試験に静水圧を付加した疑似単軸変形に関する関係が得られる。 $\gamma = 0$ ($z = 0$) に対応する限界ひずみ ϵ_{gY} 、応力 σ_1 に関する負荷停留ひずみ ϵ_{gS} 、応力 q_1 に関する負荷停留ひずみ ϵ_{gQ} はそれぞれ

$$\frac{n}{\epsilon_{gY}} = 1 - \frac{3}{2} \bar{p}_0, \quad \frac{n}{\epsilon_{gS}} = 1 - \bar{p}_0, \quad \frac{n}{\epsilon_{gQ}} = 1 \quad (37)$$

で与えられる。最初に現れるのが ϵ_{gQ} で、続いて ϵ_{gS} が、最後に ϵ_{gY} の状態に到達する。 ϵ_{gQ} には、 p_0 の影響は元々現れない。大気圧下における通常の引張り試験では、これら3種類の特徴点は完全に一致し、そこでは負荷荷重が停留する状態にある。Hillの議論(Hill, 1957)は結果的に ϵ_{gQ} に注目した形となり、これを以て静水圧 p_0 は延性に影響しないとの判断を下した。著者は負荷不安定概念(守時, 奥山, 1998b)(守時, 佐藤, 2001)を勘案することで ϵ_{gS} を安定性の限界と考えた。しかし、応力 σ_1 に関する負荷 s_1 が停留直後に、仮に周辺圧力 p_0 に変動が起こり s_1 の減少過程にこの影響が現れたとしても、これにより $\gamma = -1/2$ 以外の形態への移行は可能ではない。このため、この課題に負荷不安定概念を適用することは適切ではなかった。したがって、2次仕事全体として零となる真の塑性不安定まで、形態 $\gamma = -1/2$ を変えることなく追跡可能である。この限界 ϵ_{gY} においては、式(26)、(30)を用いて、公称応力速度は

$$\dot{s}_{1Y} = \dot{s}_{2Y} = \dot{s}_{3Y} = -\frac{1}{2} \bar{p}_0 \quad (38)$$

となる。これを見ると、 p_0 付加時にはどの座標軸に関しても $\dot{s}_{1Y}$ は停留状態ではなく減少の過程にある。このことから、負荷荷重の停留条件は塑性不安定の基本要件にはすべきではない。

p_0 付加による $\dot{s}_1$ の ϵ_g に伴う変化を図1に実線で示した。そこでは、左上から右下へと状態が変化する。 p_0 を零からほぼ50MPaまでの範囲で変化させたとき $\dot{s}_{1Y}$ は破線で示すような限界となる。これと実線との交点はその実線に帰属する p_0 における塑性不安定状態を表わし、その横軸の値は限界ひずみ ϵ_{gY} に相当している。 p_0 が大きくなるほど塑性不安定において $\dot{s}_{1Y}$ は停留状態から遠のき負荷荷重の減少の度合いは顕著となる。 $z = 0$ の状態において p_0 付加では、式(26)(31)を用いて

$$\bar{z}_{1Y} = -\frac{1}{2} \bar{p}_0, \quad \bar{z}_{2Y} = \bar{z}_{3Y} = \frac{1}{4} \bar{p}_0 \quad (39)$$

であり、2次仕事 $\bar{z}_{1Y}$ は他の2次仕事 $\bar{z}_{2Y}$ 、 $\bar{z}_{3Y}$ により埋め合わされ、全体として $\bar{z} = 0$ の状態が実現している。

Fig.1 The influence of hydrostatic pressure to the progress of nominal stress rate in tensile test.

4・2 疑似引抜き加工

疑似引張り変形の形態 ($\gamma = -1/2$) を維持し p_0 の値を大きくすると、引抜き加工における基本状態に類似してくる。このときの引抜き応力が σ_1 であり、 p_0 はダイス面からの拘束圧力に相当している。通常の加工では、 σ_1 は引抜きによる絞り変形とダイス面摩擦に打ち勝つために必要であるが、ここでは、 σ_1 はおおまかにこれらに該当するものと想定する。式 (22-1), (23-1) から

$$\bar{\sigma}_1 = 1 - \bar{p}_0, \quad \sigma_g = q_1 \quad (40)$$

の関係にある。さらに、ここでは式 (37-1) の関係が成り立っている。これによると、 $\bar{p}_0$ の増加に伴って n/ϵ_{gY} は減少し、 $\bar{p}_0 > 2/3$ では負値となる。これは塑性不安定の起こらないことを意味している。このとき、式 (40) では

$$\bar{\sigma}_1 < 1/3 \quad (41)$$

である。塑性不安定の回避には引抜き応力がこの状態を維持していることが求められる。

4・3 疑似張出し変形

さて、ここで、疑似張出し変形における同時停留条件について検討する。 $y=0$ ($z=0$) に対応する限界ひずみ ϵ_{gY} は式 (26) で算出され、応力 σ_1 に関する負荷停留 ($\dot{s}_1 = 0$) のひずみ ϵ_{gS} は式 (33) で、さらに応力 q_1 に関する負荷停留ひずみ ϵ_{gQ} は式 (36) ですでに求めた。これらによると、 ϵ_{gQ} は基本的に静水圧付加 $\bar{p}_0$ の影響を受けないが、 ϵ_{gY} と ϵ_{gS} では共に静水圧付加によりこれらが増大する傾向にあることが読み取れる。

最初に、静水圧を付加しない $\bar{p}_0 = 0$ の場合について $\dot{s}_i$ ($i=1,2$) の経過を中心に、限界値の状況を観察する。ここでは、ひずみ速度比 γ をある特定な値に設定し、これを一定に保持する負荷過程を考察している。公称応力速度 $\dot{s}_i$ の変形に伴う変化を図 2, 3 に示した。そこでは、実線は数種類の γ に関する $\dot{s}_i$ の経過であり、破線は対象としている $-0.5 \leq \gamma \leq 1.0$ の範囲における限界の $\dot{s}_{iY}$ を示している。図 2 では、この限界において負荷荷重が停留する状態、 $\dot{s}_{1Y} = 0$ を満足しているのは、 $\gamma = -0.5, 0, 1$ の 3 例においてのみである。図 3 では、 $\dot{s}_{2Y} = 0$ を満足するのは $\gamma = -0.5, 1$ であるが、 $\gamma = -0.5$ では、この方向の負荷は元々なくこの荷重は零であるので、現実には $\gamma = 1$ のみである。このように $\bar{p}_0 = 0$ においても限界状態において通常は荷重が停留するとは限らず、ましてや同時停留は $\gamma = 1$ においてのみである。 $0 < \gamma < 1$ の範囲では、限界において $\dot{s}_{1Y} < 0$ であり、限界に至る途中の変形過程で $\dot{s}_1 = 0$ の状態が出現している (守時, 奥山, 1993)。設定した γ をその値に維持するように負荷応力 q_1 , q_2 を制御しているが、 $\dot{s}_1 = 0$ の出現後は $\dot{s}_1 < 0$ となるようにこれらの負荷荷重を制御することが求められる。しかし、この減少割合を事前に知ることはできなく、それ相応に負荷を減少させることは増加の場合に比べて制御が難しく、設定し

Fig.2 Progress of nominal stress rate $\dot{s}_1$ in bi-axial tension.

Fig.3 Progress of nominal stress rate $\dot{s}_2$ in bi-axial tension.

た γ をその値に維持することが困難となる. このような状況を負荷不安定 (守時, 奥山, 1998b) (守時, 佐藤, 2001) と呼んでいる. 負荷不安定以降では負荷荷重の状況に応じて γ は変化しながら限界へと向かうと考えられるが, ここでは, このような負荷不安定を勘案することなく, 設定通りに限界に至るものとして取り扱った.

疑似張出し変形として, 周辺負荷 $p_0 = 10\text{MPa}$ の場合について $\dot{s}_i$ と $\dot{s}_{iY}$ の挙動を図 4, 5 に示した. $\bar{p}_0 = 0$ (図 2, 3) の場合と比較して線図の横軸 ϵ_g/n が右にシフトしており成形性の向上が伺える. 静水圧付加によるこのような傾向は Wu らの初期不整を導入した数値解析 (Wu, et al., 2009) でも認められている. $\dot{s}_2$ に関しては, $p_0 = 0$ (図 3) では $\gamma = -0.5$ において $\dot{s}_2$ は元々零であったが, $p_0 = 10\text{MPa}$ (図 5) の下では $\dot{s}_2$ は負値である. また, $\dot{s}_{iY}$ に関しては, $p_0 = 0$ (図 2) では $\gamma = -0.5, 0, 1$ において $\dot{s}_{iY} = 0$ であったが, $p_0 = 10\text{MPa}$ (図 4) ではこれらいずれの γ においても $\dot{s}_{iY} \neq 0$ であり停留状態にはない. しかし, ここでは $\gamma = 0$ に代わり $\gamma \approx -0.033$ 近辺で, これが停留する状態が存在していた.

Fig.4 Progress of nominal stress rate $\dot{s}_1$ in bi-axial tension under hydrostatic pressure.

Fig.5 Progress of nominal stress rate $\dot{s}_2$ in bi-axial tension under hydrostatic pressure.

4・4 疑似鍛造

軸対称の鍛造を想定し, 式 (22) において $q_2=q_1$ の状態にあるものとする. ひずみ速度比は当然 $\gamma=1$ である. 開放型の自由鍛造では, $\sigma_2=\sigma_1=0$ であるが, 型鍛造では $\sigma_2=\sigma_1<0$ の状態にあり, 変形駆動負荷は 3 軸方向の圧縮応力である. この場合も式 (40) の関係が成り立つ. 塑性不安定は式 (26) から

$$\frac{n}{\epsilon_{gY}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \bar{p}_0 \quad (42)$$

で発生する. p_0 の増加に伴って n/ϵ_{gY} は減少し, $\bar{p}_0 > 1/3$ では塑性不安定は起こり得ない. このとき, 式 (40) では

$$\bar{\sigma}_1 < 2/3 \quad (43)$$

の状態にある. 鍛造過程で何らかの原因で張出し応力が発生したとしても, 塑性不安定の回避にはこの状態を維持していることが望まれる.

5. 結 言

塑性不安定は延性破壊の始まりとして位置づけられているが、その概念が曖昧であった。そのため、流れ則では変形が周辺圧力の影響を受けない構造となっているので、塑性不安定もその影響を受けないのは当然とする非常に荒っぽい短絡的な見解もあった。塑性不安定の支配要件が、引張り試験から類推し負荷荷重の停留であるとして、二軸張出し成形では負荷荷重の同時停留がその規準になると想定されてきた。

Hill は多価解発生において満足しなければならない条件を提示した。その条件は負荷のあり様に関する外的要請を規制していることから、何らかの形で塑性不安定はこれに準拠すべきである。この外的要請を条件とすると、これに呼応する固有値が存在する。これは、塑性不安定の発生に関して素材への内的要請であり、これに基づき塑性不安定が発生するときの素材の状態を知ることができる。外的要請では、2 次仕事はその因子に現れる。これを用いて塑性不安定の概念は「各座標軸に関してそれぞれ 2 次仕事が求められるが、これらを加算した全体の 2 次仕事は塑性不安定においては零でなければならない」と表現できる。個々の 2 次仕事は零（負荷荷重の同時停留）であることを仮に前提としてもこの概念と同じ固有状態が導かれるが、前提とした同時停留は特別な場合を除いて成り立っていない。

本論文では上述の概念に従って、静水圧付加の下にある張出し変形を取り上げた。これは引張り試験の負荷状態も包含している。これに従って静水圧下の引張り試験を考察し、その限界への静水圧の影響を示した。さらに、一般の張出し変形についてもこのことに言及した。

塑性加工性との関連を疑似引抜き、疑似鍛造に関して概観した。これらは強い圧縮応力場に支配されている状態にあり、この種の変形に関してこれまでの負荷荷重の停留概念では成形性の議論はできなかったが、本報の概念ではその対応が可能となった。

文 献

- Drucker D. C., On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, *Journal de Mecanique*, Vol.3, No.2 (1964), pp.235-249.
- Hill, R., On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid III, *Journal of the Mechanics and physics of Solids*, Vol.5 (1957), pp.153-161.
- Hill, R., A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Journal of the Mechanics and physics of Solids*, Vol.6 (1958), pp.236-249.
- Hill, R., On intrinsic eigenstates in plasticity with generalized variables, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.93 (1983), pp.177-189.
- Hill, R., A General theory of plastic deformation and instability in thin-walled tubes under combined loading, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.44, No.12 (1996), pp.2041-2057.
- 守時 一, 奥山栄樹, 延性限界としての, 多価性の修正された許容基準, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.59, No.560 (1993), pp.992-1000.
- 守時 一, 奥山栄樹, 多価条件と塑性不安定の関連, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.64, No.617 (1998a), pp.193-199.
- 守時 一, 奥山栄樹, 円筒と板の張出し変形における成形性, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.64, No.628 (1998b), pp.2990-2997.
- 守時 一, 奥山栄樹, 固有状態と多価条件の関連, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.65, No.632 (1999), pp.756-762.
- 守時 一, 引張り試験における拡散くびれに及ぼす周辺圧力の影響に関する理論的考察, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.65, No.639 (1999), pp.2340-2347.
- 守時 一, 佐藤裕久, 延性破壊の塑性力学的予測 (第 1 報, 本質的規準), *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.67, No.659 (2001), pp.1201-1208.
- Swift, H. W., Plastic instability under plane stress, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.1 (1952), pp.1-18.
- 竹山寿夫, 初等塑性力学, 丸善 (1969), p.272.
- Wu, P. D., Embury, J. D., Lloyd, D. J., Huang, Y. and Neale, K. W., Effect of superimposed hydrostatic pressure on sheet metal formability, *International Journal of Plasticity*, Vol.25, No.9 (2009), pp.1711-1725.

References

- Drucker D. C., On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, *Journal de Mecanique*, Vol.3, No.2

(1964), pp.235-249.

Hill, R., On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid III, Journal of the Mechanics and physics of Solids, Vol.5 (1957), pp.153-161.

Hill, R., A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, Journal of the Mechanics and physics of Solids, Vol.6 (1958), pp.236-249.

Hill, R., On intrinsic eigenstates in plasticity with generalized variables, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.93 (1983), pp.177-189.

Hill, R., A General theory of plastic deformation and instability in thin-walled tubes under combined loading, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.44, No.12 (1996), pp.2041-2057.

Moritoki, H. and Okuyama, E., Modified admissible criterion for the collapse of unique solution as the limit of ductility, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.59, No.560 (1993), pp.992-1000 (in Japanese).

Moritoki, H. and Okuyama, E., Correlation of plastic instability with multiplicity, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.64, No.617 (1998a), pp.193-199 (in Japanese).

Moritoki, H. and Okuyama, E., Formability in bulging of tubes and stretching of sheets, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.64, No.628 (1998b), pp.2990-2997 (in Japanese).

Moritoki, H. and Okuyama, E., On the correlation of eigenstates with multiplicity, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.65, No.632 (1999), pp.756-762 (in Japanese).

Moritoki, H., Theoretical investigation on the influence of surrounding pressure on diffuse necking in tensile test, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.65, No.639 (1999), pp.2340-2347 (in Japanese).

Moritoki, H. and Sato, Y., Prediction of ductile fracture based on mechanics of plasticity (1st report, Intrinsic criterion), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.67, No.659 (2001), pp.1201-1208 (in Japanese).

Swift, H. W., Plastic instability under plane stress, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.1 (1952), pp.1-18.

Takeyama, H., Introduction to mechanics of plasticity, Maruzen (1969), p.272 (in Japanese).

Wu, P. D., Embury, J. D., Lloyd, D. J., Huang, Y. and Neale, K. W., Effect of superimposed hydrostatic pressure on sheet metal formability, International Journal of Plasticity, Vo.25, No.9 (2009), pp.1711-1725.

付録1 負荷荷重の同時停留条件

Swift は、引張り試験で負荷荷重が停留する現象から類推し、二軸張り出し変形における塑性不安定の発生に負荷荷重の同時停留条件

$$\dot{s}_i = 0 \quad (i=1,2) \quad (\text{A1})$$

を提唱した (Swift, 1952). 主応力状態において、式 (7) の z は式 (A1) の条件下では恒に $z=0$ の状態に帰結するが、逆は必ずしも真ではない. Swift は式 (A1) を塑性不安定の大前提としたので、結果的に、 $z=0$ に対応する固有状態 ($\bar{p}_0=0$ とした式 (26) の関係) を得たことになる. しかし、この固有状態がこれを求める条件とした $\dot{s}_i=0$ を必ずしも満足していないことの認識は著者の文献 (守時, 奥山, 1993) を除いてほとんど見当たらなかった. このため、このことを確認することなく負荷荷重の同時停留を塑性不安定の基本概念とする風潮がこれまで定着してきた.

式 (27) より、公称応力速度は

$$\dot{s}_i = b_{ij} \dot{\sigma}_j, \quad b_{ij} \equiv \delta_{ij} - \sigma_i a_{ij}, \quad a_{ij} \equiv a \sigma'_i \sigma'_j \quad (\text{A2})$$

と表現できる. 式 (A2-1) は、 $\dot{\sigma}_j$ に関する連立 1 次方程式である. 式 (A1) の条件が課せられると、 $\dot{\sigma}_j$ を未知数とするこの連立 1 次方程式が、解を持つためには

$$\det |b_{ij}| = 0 \quad (\text{A3})$$

を満足していなければならない. 式 (A3) から $\bar{p}_0 = 0$ とした式 (26) の関係が求められる (守時, 奥山, 1993).

付録2 公称応力速度について

時刻 t における状態を基準状態とし, それから Dt 時間後の状態に上符号 $\sim$ を付すことにする. $\mathbf{T}$ を応力テンソル, $\mathbf{S}$ を公称応力テンソルとする. 埋込み座標系の基底 (共変) を $\mathbf{g}_i$ で, その反変基底を $\mathbf{g}^i$ で表す. $\mathbf{g}^i$ に垂直な基準単位断面の断面積は微小時間 Dt の前後で

$$\mathbf{A}^t = \frac{1}{2} e^{rst} (\mathbf{g}_r \times \mathbf{g}_s) = \sqrt{g} \mathbf{g}^t, \quad \tilde{\mathbf{A}}^t = \frac{1}{2} e^{rst} (\tilde{\mathbf{g}}_r \times \tilde{\mathbf{g}}_s), \quad \sqrt{g} \equiv \frac{1}{6} e^{ijk} (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k \quad (\text{A4})$$

である. ここで, e^{ijk} は $(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$ の循環指標を表わす.

公称応力の定義は

$$\mathbf{A}^t \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{T}} \quad (\text{A5})$$

の関係にある. 時刻 t を基準状態としているので,

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \quad (\text{A6})$$

と置く. これにより式 (A5) は

$$\mathbf{A}^t \cdot (\mathbf{T} + D\mathbf{S}) = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot (\mathbf{T} + D\mathbf{T}) \quad (\text{A7})$$

となる. 式 (A7) の左右の項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t \cdot (\mathbf{T} + D\mathbf{S}) &= \sqrt{g} (\sigma^{ij} + \dot{\sigma}^{ij} Dt) \mathbf{g}_j \\ \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot (\mathbf{T} + D\mathbf{T}) &= \frac{1}{2} e^{rst} (\tilde{\mathbf{g}}_r \times \tilde{\mathbf{g}}_s) \cdot (\sigma^{ij} + \dot{\sigma}^{ij} Dt) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

である. 基底 $\mathbf{g}_r$ は Dt 時間後には

$$\tilde{\mathbf{g}}_r = (\mathbf{g}_r + \mathbf{g}_m v^m |_{,r} Dt) \quad (\text{A9})$$

である. ここで, $v^m |_{,r}$ は変位速度成分 v^m の r 方向に関する共変微分である. 反変, 共変成分の関係

$$\mathbf{g}_r \times \mathbf{g}_s = \sqrt{g} e^{rst} \mathbf{g}^t, \quad \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}^t = \delta_r^t \quad (\text{A10})$$

などを用いて, 式 (A7) から

$$\dot{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} - \sigma^{kj} v^i |_{,k} + \sigma^{ij} v^k |_{,k} \quad (\text{A11})$$

が得られる. 本論文では, 金属素材を対象としているので, 体積一定の条件から式 (A11) の右辺最後の項は消失する.