ブレーキ鳴き現象への形状最適化の応用

新谷 浩平^{*1}, 古屋 耕平^{*2}, 伊藤 聡^{*1}

Application of shape optimization to brake squeal phenomena

Kohei SHINTANI ^{*1}, Kohei FURUYA ^{*2} and Satoshi ITO ^{*1}^{*1}Toyota Motor Corporation

1 Toyota-Cho, Toyota-shi, Aichi 471-8571, Japan

^{*2}Department of Mechanical Engineering, Gifu University

1-1 Yanagido, Gifu-shi, Gifu 501-1193, Japan

Received 26 April 2015

Abstract

The present paper describes an application of non-parametric shape optimization to disc brake squeal phenomena. The disk brake squeal is known as self-excited vibration; the real and imaginary parts of the complex eigenvalue indicate the damping coefficient and natural angular frequency, respectively. The modes that have a negative damping coefficient cause disk brake squeal. Therefore, a main problem is defined as complex eigen value problem and a real part of the complex eigenvalue causing the brake squeal is chosen as an objective cost function for the shape optimization problem. For the solution to main problem which has a large number of DOF, component mode synthesis method adapting residual stiffness (CMS-R) is used in order to improve the accuracy of eigenpairs by conventional component mode synthesis method (CMS). The Fre'chet derivative of the objective cost function with respect to the domain variation, which we call the shape derivative of the objective cost function, is evaluated using the solution of the main problem and the adjoint problem. A scheme to solve the shape optimization problem is presented using an iterative algorithm based on the H^1 gradient method for reshaping. For an application of the shape optimization method, a numerical example by using a practical disc brake model is presented. From the numerical result, the real part of the target complex eigenvalue monotonously decreases until it reach zero and effectiveness of CMS-R with regard to the shape optimization problem is presented.

Key words : Self-excited vibration, Noise, Complex eigenvalue analysis, Component mode synthesis, Disk brake squeal, Finite element method, Residual stiffness, Optimum design, H^1 gradient method

1. 緒 言

自動車のブレーキ鳴き現象は 1kHz から 15kHz で生じる自励振動現象であり、品質・商品性に直結する重要な性能指標のひとつである。そのため、ブレーキ鳴きが生じないブレーキ部品の形状設計が重要である。ブレーキ鳴きに対する形状設計では、ブレーキ鳴き現象が複数部品のアセンブリ状態で生じる現象であるため、アセンブリ状態における性能評価と、性能目標を満たす各コンポーネントの形状対策が実施される。しかしながら、コンポーネントの形状対策とアセンブリ状態での効果確認による反復検討が必要であるため、その検討は容易ではない。本稿ではアセンブリ状態におけるブレーキ鳴きの評価指標である複素固有値の実部をコスト関数とするノンパラメトリック形状最適化問題を構成し、その解法及びブレーキモデルへの応用例を紹介する。ブレーキ鳴き性能設計にノンパラメトリック形状最適化を応用することで、上記反復検討における工数の低減が期待できる。

No.15-00238 [DOI:10.1299/transjsme.15-00238], J-STAGE Advance Publication date : 17 July, 2015

^{*1} 正員, トヨタ自動車(株) 車両 CAE 部 (〒471-8571 愛知県豊田市トヨタ町 1)

^{*2} 正員, 岐阜大学 工学部 (〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1)

E-mail of corresponding author: kohei_shintani@mail.toyota.co.jp

ブレーキ鳴き現象の数理モデルについては、これまでに多くの研究が報告されている。Mills はブレーキ鳴きがディスクローターとパッドの間の摩擦に起因するスティックスリップ現象であることを明らかにしており (Mills, 1938), North はブレーキ鳴きが自励振動であることを示した (North, 1972)。Millner は摩擦によって剛性行列が非対称になることで、ブレーキ鳴き現象が複素固有値解析によって記述できることを示し、得られた複素固有値の実部を用いることでブレーキ鳴きを数値的に判定できることを示した (Millner, 1978)。Millner が示した方法に基づいて、これまでに多くの有限要素法による解析例が示されている (例えば, Matsushima, et al., 1997, Joo, et al., 2006)。また、これらブレーキ鳴きの数理モデルに対する包括的な調査は Kinkaid らによってまとめられている (Kinkaid, et al., 2003)。有限要素法によるブレーキ鳴きの評価が可能になると、得られた評価結果を用いて、最適化技術の適用事例が報告されるようになった。Lee らや Guan らはブレーキを構成する各コンポーネントの実固有値を設計変数に選んだ上で、アセンブリ状態で評価した性能目標値である複素固有値の実部に対する設計感度を導出し、勾配法を用いた最適化法を示している (Lee and Kikuchi, 2003, Guan, et al., 2006)。この方法を用いれば、各コンポーネントの最適な固有値配列を求めることができる。また、Nelagadde らはディスクブレーキの固有振動数を離間することでブレーキ鳴きを低減できると仮定した上で、固有振動数の離間を目的とした形状最適化問題を解いている (Nelagadde and Smith, 2009)。Soh らは複素固有値の実部をコスト関数に選んだ形状最適化問題を定義し、キャリパーシリンダーの爪部の寸法を最適化する問題を解いた (Soh and Yoo, 2010)。しかしながら、これらの研究はパラメトリック形状最適化手法に基づいているため、モデルの表面全体を設計変数とするような設計自由度が多い問題には適用が困難であると考えられる。

このような課題に対し、ノンパラメトリック形状最適化手法を用いた研究が報告されている。後藤らは Lee らの手法を用いて得られたコンポーネントの目標固有値を実現するために、コンポーネントの実固有値をコスト関数としたノンパラメトリック形状最適化問題を構成し、 H^1 勾配法 (Azegami and Takeuchi, 2006) を用いて解いている (Goto, et al., 2010)。この方法を用いることで、設計自由度の大きな問題であっても目標固有値を有する最適な形状を求めることができる。しかしながら、この方法ではアセンブリ状態における複素固有値解析による性能評価と、コンポーネントの実固有値に対する形状最適化計算の反復検討が必要となる。一方で、著者らはアセンブリ状態における評価指標である複素固有値の実部をコスト関数に選んだノンパラメトリック形状最適化問題を構成し、 H^1 勾配法による解法を示している (Shintani and Azegami, 2014)。この解法を用いればアセンブリ状態における性能評価とコンポーネントレベルでの形状設計を最適化計算の中で同時に扱うことができるため、上記反復検討は不要となる。しかしながら、この研究では最適化解法の提案と 2000 自由度程度の簡易モデルを用いた検証に留まっており、実際の製品規模のモデルを対象とした事例は示されていない。その一つの理由として、複素固有値問題の解の精度による最適化結果への影響が挙げられる。

ブレーキ鳴きの計算で用いられるブレーキアセンブリモデルは詳細なメッシュを用いて大規模にモデル化される例が多い。そのため、主問題の解法として Hessenberg 法のようにすべての固有値、固有モードを求める直接法を適用することは計算コストの面から現実的ではない。そこで、摩擦の影響を無視した状態で求めた実固有モードを利用し、複素固有値問題を不拘束モード法によってモード座標に変換した後、Hessenberg 法で複素固有値を求めることで、固有値の見落としや疑似固有値の採用などの問題を高い確度で回避できる。しかしながら、採用されなかったモードに起因して、解の精度が低下することが知られている。著者らはこの解の精度の低下によって、ブレーキ鳴きの評価指標である複素固有値の実部や、形状最適化の解法で利用される形状感度に大きな誤差が生じることを示している (古屋他, 2014)。

また、これら誤差に対する計算精度を向上させる方法として、複素固有値問題に対する剰余剛性を考慮したモード合成法 (CMS-R) を提案した (古屋他, 2014)。CMS-R を用いれば、大規模なブレーキアセンブリモデル (数十万節点程度) に対しても複素固有値の実部や形状感度が精度よく計算可能であるため、ノンパラメトリック形状最適化の適用が可能となる。

本稿では、CMS-R によって評価された複素固有値の実部を最小化するノンパラメトリック形状最適化問題を定義し、 H^1 勾配法を用いた解法の説明と、ブレーキアセンブリモデルへの適用例を示す。

2. 領域の定義と設計変数

ブレーキモデル全体の領域を $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^3$ とし、その領域の境界は Lipschitz 級を仮定する。パッド領域とローター領域をそれぞれ $\Omega_{P0} \subset \Omega_0$, $\Omega_{R0} \subset \Omega_0$ と表す。それぞれの接触境界 $\Gamma_{P0} \subset \partial\Omega_{P0}$, $\Gamma_{R0} \subset \partial\Omega_{R0}$ にはそれぞれ接触剛性 α と、Coulomb 摩擦 μ を定義する (図 1)。また、図 1 の ν_P, ν_R と τ_R, τ_P はそれぞれローターとパッドに定義した法線と接線である。

本研究ではブレーキモデルを構成する各コンポーネントの領域の写像 ϕ を設計変数に選ぶ。設計変数 ϕ を用いると、変動後の領域は次のように表現することができる

$$\Omega(\phi) = \{(i + \phi)(x) | x \in \Omega_0\} \quad (1)$$

ここで、 i は単位写像である。形状最適化の過程で 1 対 1 写像の連続性を保つために、 ϕ の許容集合を次のように定義する。

$$D = \{\phi \in \mathbf{Y} | \|\phi\|_{\mathbf{Y}} < \sigma, \phi = 0 \text{ on } \Gamma_C\} \quad (2)$$

ここで、 Γ_C は形状拘束境界を表し、 σ は正の値とする。また、 $\mathbf{Y}$ は 1 階までの導関数が ∞ 乗 Lebesgue 可積分な関数空間 $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ に属し、記号 $\|\cdot\|_{\mathbf{Y}}$ は関数空間 $\mathbf{Y}$ における内積を表す。

Fig. 1 Contact boundary between disc rotor domain and pad domain. The contact stiffness and Coulomb friction are defined on the contact boundary.

3. 主問題

本章では Millner が提案した数理モデルに基づいて、ブレーキ鳴きの支配方程式について述べる。変位 $u \in \mathbf{R}^3$ を自由振動の解とする。変位 u を用いれば、ひずみテンソルと応力テンソルは次のようにかける。

$$E(u) = \frac{1}{2} (\nabla u^T + (\nabla u^T)^T) \quad (3)$$

$$S(u) = C : E(u) \quad (4)$$

ここで、 $C \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3})$ は剛性を表す。次に任意の $s \in \mathbf{C}$ に対して u の変数分離型を次のように仮定する。

$$u(x, t) = e^{st} \hat{u}(x) + e^{s^*t} \hat{u}^c(x) \quad (5)$$

肩付きの c は複素共役を表す。以上の定義を用いると、ブレーキ鳴きの複素固有値問題は次のように記述することができる。

問題 1 (ブレーキ鳴きの複素固有値問題) 以下を満たす固有振動対 $(s_k, \hat{u}_k)$ を求めよ.

$$\begin{aligned}
 \rho s_k^2 \hat{u}_k - (\nabla \cdot S(\hat{u}_k))^T &= 0 \quad \text{in } \Omega \\
 S(\hat{u}_k) \nu &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega / (\Gamma_R \cup \Gamma_P) \\
 S(\hat{u}_{Rk}) \nu_R &= \alpha \{ (\hat{u}_{Rk} - \hat{u}_{Pk}) \cdot \nu_R \} \quad \text{on } \Gamma_R \\
 S(\hat{u}_{Pk}) \nu_P &= \alpha \{ (\hat{u}_{Pk} - \hat{u}_{Rk}) \cdot \nu_P \} \quad \text{on } \Gamma_P \\
 S(\hat{u}_{Rk}) \tau_R &= \mu \alpha \{ (\hat{u}_{Rk} - \hat{u}_{Pk}) \cdot \nu_R \} \tau_R \quad \text{on } \Gamma_R \\
 S(\hat{u}_{Pk}) \tau_P &= -\mu \alpha \{ (\hat{u}_{Pk} - \hat{u}_{Rk}) \cdot \nu_P \} \tau_P \quad \text{on } \Gamma_P \\
 \hat{u}_k &= 0 \quad \text{on } \Gamma_D
 \end{aligned} \tag{6}$$

次に、任意関数 v を問題 1 の両辺に乗じた上で弱形式を導き、複素共役との和を考えれば以下ようになる。

$$h(s, \hat{u}, \hat{v}^c) + h(s, \hat{u}^c, \hat{v}) = 0 \tag{7}$$

ただし、以下の定義を用いた。

$$\begin{aligned}
 h(s, \hat{u}, \hat{v}^c) &= a(\hat{u}, \hat{v}^c) + s^2 b(\hat{u}, \hat{v}^c) - c_R(\hat{u}_R - \hat{u}_P, \hat{v}_R^c) \\
 &\quad - c_P(\hat{u}_R - \hat{u}_P, \hat{v}_P^c) - d_R(\hat{u}_R - \hat{u}_P, \hat{v}_R^c) + d_P(\hat{u}_R - \hat{u}_P, \hat{v}_P^c) \\
 a(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\Omega(\phi)} S(u) \cdot E(\hat{v}) \, dx, \\
 b(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\Omega(\phi)} \rho u \cdot \hat{v} \, dx, \\
 c_{(\cdot)}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\Omega(\phi)} \alpha (\hat{u} \cdot \nu_{(\cdot)}) (\hat{v} \cdot \nu_{(\cdot)}) \, dx, \\
 d_{(\cdot)}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\Omega(\phi)} \alpha (\hat{u} \cdot \nu_{(\cdot)}) (\hat{v} \cdot \tau_{(\cdot)}) \, dx,
 \end{aligned} \tag{8}$$

後に、5 章で述べる形状最適化問題では式 (7) は目的関数に対する等式制約として利用される。そのため、式 (7) に対する Lagrange 関数を次のように定義しておく。

$$L_M(\phi, s_k, \hat{u}_k, \hat{v}_k^c) = -h(s_k, \hat{u}_k, \hat{v}_k^c) - h(s_k^c, \hat{u}_k^c, \hat{v}_k) = 0 \tag{9}$$

次に、ガラーキン法を式 (7) に適用し近似方程式を求めると、次のブレーキ鳴きの特性方程式が得られる。ここで、 $\mathbf{K}$ は式 (8) の右辺第 1 項から得られる剛性行列であり、 $\mathbf{M}$ は式 (8) の右辺第 2 項から得られる質量行列である。また、 $\mathbf{K}_\mu$ は式 (8) の右辺 3 項～6 項から得られる剛性行列である。

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\mu + s^2 \mathbf{M}) \hat{u} = 0 \tag{10}$$

式 (10) の特性方程式には非対称行列 $\mathbf{K}_\mu$ が含まれるため固有値 s^2 と、固有モード $\hat{u}$ は複素数になる。また s の実部 σ は減衰率を表し、虚部 ω_d は減衰固有角振動数を表す。

$$s = -\sigma + j\omega_d \tag{11}$$

よって、実部が正 (負の減衰率) のモードは自励振動を引き起こす可能性があるモードを表しており、それらのモードを特定し、形状変更などの対策を行うことでブレーキ鳴きを低減することが可能となる。

4. 主問題の解法

本章では、前章で述べたブレーキ鳴きの複素固有値問題に対する数値解法を示す。本稿では大規模なブレーキアセンブリモデル（数十万節点程度）を計算対象として想定している。そのため、複素固有値問題の解法には第1章で述べたように計算コストと計算精度の観点から、既報（古屋他, 2014）で著者らが提案している剰余剛性を考慮した不拘束モード合成法（CMS-R）を採用する。以下に CMS-R の概要を述べる。

はじめに剰余剛性を考慮しない不拘束モード合成法（CMS）を説明する。次式のようにブレーキ鳴きの特性方程式の非対称行列 $\mathbf{K}_\mu$ を省略した運動方程式に着目し、実固有値 λ_i^2 と実固有モード $\mathbf{p}_i$ を算出する。

$$(\mathbf{K} - \lambda_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{p}_i = 0 \quad (12)$$

次に、実固有モードの重ね合わせで式（10）の複素固有モード $\hat{\mathbf{u}}$ を次式のように近似する。

$$\hat{\mathbf{u}} \cong \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} \quad (13)$$

$$\mathbf{P} \equiv [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$$

ここで、 n は採用モード数を表し、 $\boldsymbol{\xi}$ はモード寄与ベクトルを表す。式（13）のように仮定すると、式（10）のブレーキ鳴きの特性方程式は次式のようにモード座標上の特性方程式に変換できる。

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}_\mu + s^2 \mathbf{m}) \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (14)$$

$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}, \quad \mathbf{k}_\mu \equiv \mathbf{P}^T \mathbf{K}_\mu \mathbf{P}, \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}$$

ここで、式（14）は依然として非対称行列 $\mathbf{k}_\mu$ が含まれるが、自由度は採用する実固有モード数 n まで低減され、Hessenberg 法など信頼性の高い複素固有値解析を適用できる。以上が剰余剛性を考慮しない不拘束モード合成法の流れである。ただし、式（13）では採用しなかった $n+1$ 次以上の固有モードの成分による誤差を含むことになる。その成分は次式の剰余フレキシビリティ行列 $\mathbf{G}(\omega)$ で表される。以下では簡単のため $\mathbf{G}(\omega)$ を剰余行列と呼ぶ。

$$\mathbf{G}(\omega) = \sum_{j=n+1}^N \frac{\mathbf{p}_j \mathbf{p}_j^T}{\lambda_j^2 - \omega^2} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T}{\lambda_i^2 - \omega^2} \quad (15)$$

しかし、厳密な剰余行列 $\mathbf{G}(\omega)$ を求めるためには各周波数で式（15）を解く必要があり、不拘束モード合成法による計算負荷の低減などの利点はなくなる。この課題に対して、馬萩原らは次式の定数行列 $\mathbf{G}_C$ で剰余行列 $\mathbf{G}(\omega)$ を精度良く近似できることを導いている（馬萩原, 1991）。

$$\mathbf{G}(\omega) \cong \mathbf{G}_C = (\mathbf{K} - \omega_C^2 \mathbf{M})^{-1} - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T}{\lambda_i^2 - \omega_C^2} \quad (16)$$

ここで ω_C は剰余行列を計算する周波数を表し、周波数 ω の関数である剰余行列 $\mathbf{G}(\omega)$ を ω_C で計算した剰余行列 $\mathbf{G}_C$ で近似することを意味する。そのため、 ω_C の値によって近似精度が変化する。 ω_C が求めようとする ω に近づくほど近似精度は改善され、 ω_C が ω と等しいとき $\mathbf{G}_C = \mathbf{G}(\omega)$ が成立する。しかしながら、剰余計算周波数 ω_C が不減衰系の固有角振動数 ω_i 近傍になると式（16）の右辺第1項と第2項が無限大に発散し、その差分で定義された剰余行列 $\mathbf{G}_C$ が数値計算誤差に埋もれてしまう可能性がある。本稿では、このような数値誤差を避けるため、次式のように i 次モードと $i+1$ 次モードの実固有値 λ_i^2 , λ_{i+1}^2 の中間の周波数で ω_C を定義する。

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \lambda_{i+1}^2)} \quad (17)$$

次に、剰余剛性 $\mathbf{G}_c$ を考慮した不拘束モード合成法 (CMS-R) について以下に示す. 式 (10) に示したブレーキ鳴きの特性方程式において、非対称行列 $\mathbf{K}_\mu$ の成分を右辺に移項すると次式を得る.

$$(\mathbf{K} + s^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_\mu \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_\mu \equiv -\mathbf{K}_\mu \hat{\mathbf{u}} \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{f}_\mu$ は系が $\hat{\mathbf{u}}$ の形で振動した際の摩擦力を表しており、式 (18) は対称行列で表される系に摩擦力が外力として作用することを表している. CMS-R では、式 (16) で示した剰余行列 $\mathbf{G}_c$ と、式 (12) の解 $\mathbf{P}$ を用いて、式 (18) の $\hat{\mathbf{u}}$ を次式のように近似する.

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{G}_c \mathbf{f}_\mu \quad (20)$$

ここで本式の右辺の $\mathbf{f}_\mu$ には式 (19) に示したように複素固有モード $\hat{\mathbf{u}}$ が含まれており、式 (20) をそのまま利用することは出来ない. また $\mathbf{G}_c$ は物理自由度 $N \times N$ の密行列であるため、 $\mathbf{G}_c$ を物理座標のまま保持することは現実的ではない. そこで式 (19) の摩擦力 $\mathbf{f}_\mu$ を表す式において複素固有モード $\hat{\mathbf{u}}$ を実固有モード $\mathbf{p}_i$ の重ね合わせで表現できると仮定する.

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_\mu \equiv -\mathbf{K}_\mu \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} \quad (22)$$

ここでの留意点は、摩擦力 $\mathbf{f}_\mu$ を求める際には式 (21) のように複素固有モード $\hat{\mathbf{u}}$ を実固有モード $\mathbf{p}_i$ の重ね合わせで近似するが、系全体の複素固有モード $\hat{\mathbf{u}}$ を求める場合には式 (20) のように実固有モード $\mathbf{p}_i$ と剰余行列 $\mathbf{G}_c$ で近似する点である. そして摩擦力 $\mathbf{f}_\mu$ を求める際の実固有モード $\mathbf{p}_i$ の寄与を $\boldsymbol{\eta}$ とおく. 式 (22) を式 (20) へ代入すると次式を得る.

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{R} \boldsymbol{\eta} \quad (23)$$

$$\mathbf{R} \equiv -\mathbf{G}_c \mathbf{K}_\mu \mathbf{P} \quad (24)$$

$\mathbf{R}$ は系の物理自由度 $N \times$ 採用モード数 n の行列で、 $-\mathbf{K}_\mu \mathbf{P}$ の力が作用したときの剰余行列 $\mathbf{G}_c$ の変形形状を表す. 本研究では $\mathbf{R}$ の各列を剰余ベクトルと呼び、 i 行の成分を i 次の剰余ベクトル $\mathbf{R}_i$ と呼ぶ. 本研究で定義した剰余ベクトルは実数のベクトルとなる. また式 (23) から $\boldsymbol{\eta}$ の各成分は、剰余ベクトル $\mathbf{R}_i$ の $\hat{\mathbf{u}}$ への寄与率を表している. 提案する剰余モード合成法では境界に作用する摩擦力 $\mathbf{f}_\mu$ を実固有モード $\mathbf{p}_i$ の重ね合わせで近似し、その寄与を新たな未知変数 $\boldsymbol{\eta}$ とおいた. 式 (21) (23) の定義から考えると物理的には $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$ の従属関係が成立する. しかし、近似という観点では、これらを独立に扱うことで精度が向上する. これは $\boldsymbol{\xi}$ が全系の $\hat{\mathbf{u}}$ を近似するのに対して、 $\boldsymbol{\eta}$ は境界面における力のみを近似するため、 $\mathbf{f}_\mu$ の精度が改善され、結果として $\hat{\mathbf{u}}$ の精度も改善されるためである.

複素固有モード $\hat{\mathbf{u}}$ を式 (23) のように実固有モード $\mathbf{p}_i$ と剰余ベクトル $\mathbf{R}_i$ の重ね合わせで表すと、式 (14) の物理座標上の特性方程式は、次式のモード座標上の特性方程式へ変換できる.

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}_\mu + s^2 \mathbf{m}) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} = 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{k} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} & \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{P} & \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_\mu \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \mathbf{K}_\mu \mathbf{P} & \mathbf{P}^T \mathbf{K}_\mu \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{K}_\mu \mathbf{P} & \mathbf{R}^T \mathbf{K}_\mu \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} & \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{P} & \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式 (25) の特性方程式の ξ , η が一意に決定されるためには, 実固有モード $\mathbf{p}_i$ と剰余ベクトル $\mathbf{R}_i$ が互いに線形独立でなければならない. 実固有モード $\mathbf{p}_i$ ($i=1 \sim n$) は互いに線形独立であり, また剰余行列 $\mathbf{G}_c$ は式 (16) で定義され 1 次から n 次までの実固有モード成分 $\mathbf{p}_i$ を含まない. よって $\mathbf{R}_i$ ($i=1 \sim n$) が互いに線形独立であれば $\mathbf{p}_i$ と線形独立となる. 互いに線形独立な $\mathbf{R}_i$ は, 剰余ベクトルを並べた行列 $\mathbf{R}$ を QR 分解することで抽出可能である. この線形独立な剰余ベクトルの選択により, 剰余ベクトルを並べた行列 $\mathbf{R}$ の列数は n 以下になる. 線形独立な剰余ベクトルの選択を行わない場合, 剰余モード合成法の特性方程式は $2n \times 2n$ 自由度となり, 採用モード数 n が大きい場合, 物理自由度 $N < 2n$ となるが, 線形独立な剰余ベクトルの選択を行うことで, 採用モード数 n が大きい場合でもモード座標上の特性方程式の自由度が N を超えることはない.

5. 形状最適化問題

前節までに導入した定義に基づいて, 本節ではブレーキ鳴き現象に対する形状最適化問題を定義する. ブレーキ鳴きは複素固有値の実部が正である場合に生じる可能性があることより, 本研究では実部が正となる次数を k と表し, 目的関数を次のように定義する.

$$f_0(\phi, s_k) = 2\text{Re}[s_k] = s_k + s_k^c \quad (27)$$

形状最適化により正であった実部を減少させ, 0 にすることができれば, その系はブレーキ鳴きが生じないと判断することができる. 一方, 制約関数として, 次式に示す体積を選ぶ.

$$f_1(\phi) = \int_{\Omega(\phi)} d\mathbf{x} - c_1 \quad (28)$$

ここで c_1 は初期形状における体積を表す. これらのコスト関数を用いて, 本稿では次の形状最適化問題を考える.

問題 2 (形状最適化問題) $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$ が問題 1 の解であるとする. また k は複素固有値が正となる次数とする. このとき以下を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ.

$$\min_{\phi \in D} \{ f_0(\phi, s_k) \mid f_1(\phi) \leq 0, L_M(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c) = 0 \}$$

6. コスト関数の形状微分

前節で定義した形状最適化問題を, 勾配法を用いて解くために, 本節では式 (27), (28) で定義したコスト関数の形状変動に対する Frechet 微分を導出する. 目的関数 f_0 は主問題の解である s_k を含むので, 主問題を等式制約として考慮し, f_0 に対する Lagrange 関数を次のように定義する.

$$L_0(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k) = f_0(\phi, s_k) + L_M(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c) \quad (29)$$

ここで, $\hat{\mathbf{v}}_k$ は主問題に対する Lagrange 乗数である. $L_0(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)$ の ϕ の任意の変動 $\phi \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$ に対する形状微分は次のようになる.

$$\begin{aligned}
L_0(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\varphi] & \\
= L_{0\phi}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\varphi'] &+ L_{0s_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[s'_k] \\
+ L_{0\hat{\mathbf{u}}_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\hat{\mathbf{u}}'_k] &+ L_{0\hat{\mathbf{v}}_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\hat{\mathbf{v}}'_k]
\end{aligned} \tag{30}$$

ここで、 $(s'_k, \hat{\mathbf{u}}'_k, \hat{\mathbf{v}}'_k)$ は領域変動 φ に対する $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)$ の形状偏微分を表す。右辺第 4 項を具体的に計算すると次のようになる。ここで、 $L_0(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\varphi]$ の記号は $\varphi \in Y$ に対する $L_0(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)$ の Fre'chet 微分を表す。

$$\begin{aligned}
L_{0\hat{\mathbf{v}}_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\hat{\mathbf{v}}'_k] & \\
= -h_{\hat{\mathbf{v}}_k}(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c)[\hat{\mathbf{v}}'_k] - h_{\hat{\mathbf{v}}_k}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k)[\hat{\mathbf{v}}'_k] & \\
= -h_{\hat{\mathbf{v}}_k}(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}'_k) - h_{\hat{\mathbf{v}}_k}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}'_k) &
\end{aligned} \tag{31}$$

この結果は式 (7) と等価である。そのため、主問題の解 $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$ を用いれば、この項は 0 となる。次に、式 (30) の右辺第 3 項からは以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned}
L_{0\hat{\mathbf{u}}_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\hat{\mathbf{u}}'_k] & \\
= -h_{\hat{\mathbf{u}}_k}(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c)[\hat{\mathbf{u}}'_k] - h_{\hat{\mathbf{u}}_k}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k)[\hat{\mathbf{u}}'_k] & \\
= -h_{\hat{\mathbf{u}}_k}(s_k, \hat{\mathbf{u}}'_k, \hat{\mathbf{v}}_k) - h_{\hat{\mathbf{u}}_k}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k) &
\end{aligned} \tag{32}$$

また、式 (30) の右辺第 2 項からは以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned}
L_{0s'_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[s'_k] &= f_0(\phi, s_k)[s'_k] \\
= -h_{s'_k}(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c)[s'_k] - h_{s'_k}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k)[s'_k] & \\
= s'_k + s_k^c - 2s'_k b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c) - 2s_k^c b(\hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k) & \\
= s'_k(1 - 2s'_k b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c)) + s_k^c(1 - 2s_k^c b(\hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k)) &
\end{aligned} \tag{33}$$

ここで、 $\hat{\mathbf{v}}_k$ が以下に示す随伴問題の解であるとき、式 (32)、式 (33) は 0 となる。

問題 3 (f_0 の随伴問題) $\phi \in D$ が与えられたとき、 $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$ が主問題の解であるとする。任意の $\hat{\mathbf{u}}'_k$ に対して以下を満たす固有振動対 $(s_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k)$ を求めよ。

$$h(s, \hat{\mathbf{u}}', \hat{\mathbf{v}}^c) + h(s, \hat{\mathbf{u}}^c, \hat{\mathbf{v}}) = 0 \tag{34}$$

$$2s_k b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k^c) = 2s_k^c b(\hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k) = 1 \tag{35}$$

式 (34) は問題 1 に対する左固有値問題となっている。また式 (35) は、式 (34) の解として得られた左固有ベクトルの正規化条件となっている。以上の結果より、主問題の解 $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$ と、随伴問題の解 $(s_k^c, \hat{\mathbf{v}}_k)$ を用いれば、式 (30) の右辺第 1 項は次のようになる。

$$L_{0\phi}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k)[\varphi] = \int_{\partial\Omega/(\Gamma_R \cup \Gamma_F)} \mathbf{g}_0 \cdot \varphi \, d\gamma = \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle \tag{36}$$

ここで、 $\mathbf{g}_0$ は f_0 に対する形状微分、すなわち形状感度を表し、

$$\mathbf{g}_0 = 2\text{RE}[S(\hat{\mathbf{u}}_k) \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}^c) + s_k^2 \rho \hat{\mathbf{u}}_k \cdot \hat{\mathbf{v}}^c] \nu \tag{37}$$

となる。一方、コスト関数 f_1 の ϕ の任意の変動 φ に対する形状微分は次のようになる。

$$f_1(\phi)[\varphi] = \int_{\partial\Omega/(\Gamma_R \cup \Gamma_P)} \mathbf{g}_1 \cdot \varphi \, d\gamma = \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle \quad (38)$$

ここで, $\mathbf{g}_1$ は f_1 に対する形状感度を表し,

$$\mathbf{g}_1 = \nu \quad (39)$$

となる. また, ローターとパッドの接触境界 $\Gamma_R \cup \Gamma_P$ については形状拘束条件を考える. すなわち, $\varphi = 0$ とする.

7. 形状最適化問題の解法

本章では, 5 章で定義した形状最適化問題の解法について述べる. 前章のようにして形状感度が求まれば, 形状変動方向 φ は H^1 勾配法を用いることで, 以下の問題の解として得ることができる.

問題 4 (問題 2 に対する H^1 勾配法) 形状感度 $\mathbf{g}_i$, $i \in \{0,1\}$ が与えられたとき, 以下を満たす φ_i を求めよ.

$$\begin{aligned} -c_a \nabla^T S(\varphi_i) &= \mathbf{0}^T \quad \text{in } \Omega(\phi) \\ c_a S(\varphi_i)\nu &= -\mathbf{g}_i \quad \text{on } \partial\Omega(\phi) \\ \varphi_i &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

この問題の概念図を図 2 に示す. この問題は, $\Omega(\phi)$ を線形弾性体に仮定して, 境界に力 $\mathbf{g}_i$ を作用させたときの変位 φ_i を求める問題となっている. c_a はステップサイズを表す. 問題 4 によって形状更新方向 φ_i が求まれば, 次の逐次 2 次計画問題を解くことにより最適解 φ を得ることができる.

問題 5 (逐次 2 次計画問題) 形状感度 $\mathbf{g}_i$, $i \in \{0,1\}$ が与えられたとき, 以下を満たす φ を求めよ.

$$\min_{\varphi \in Y} \left\{ q(\varphi) = \frac{1}{2} a(\varphi, \varphi) + \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle \mid f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle \leq 0 \right\}$$

問題 5 の Lagrange 関数を次のようにおく.

$$L_{SQ}(\varphi, \lambda_1) = q(\varphi) + \lambda_1 (f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle) \quad (40)$$

ここで, λ_1 は不等式制約条件 $f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle \leq 0$ に対する Lagrange 乗数を表す. ここで, 問題 5 の解 φ に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件は次のようになる.

$$a(\varphi, \varphi) + \langle \mathbf{g}_0 + \lambda_1 \mathbf{g}_1, \varphi \rangle = 0 \quad (41)$$

$$f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle \leq 0 \quad (42)$$

$$\lambda_1 (f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle) = 0 \quad (43)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (44)$$

ここで、問題 4 の解 φ_{gi} を用いて、 $\varphi_g = \varphi_{g0} + \lambda_1 \varphi_{g1}$ とおくと φ_g は式 (41) を満たす。さらに制約条件が有効であるならば、式 (42) は等号で成り立ち、次式が成り立つ。

$$\langle \mathbf{g}_1, \varphi_1 \rangle \lambda_1 = -f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi_0 \rangle \quad (45)$$

さらに、 $f_1(\phi) = 0$ であるならば、 λ_1 は次式から求めることができる。

$$\langle \mathbf{g}_1, \varphi_1 \rangle \lambda_1 = \langle \mathbf{g}_1, \varphi_0 \rangle \quad (45)$$

上記逐次 2 次計画法の計算のフローチャートを図 3 に示す。

Fig. 2 Boundary condition of strong form of the H^1 gradient method. The variation of the design variable is determined by solving elliptic partial differential equation.

Fig. 3 Flowchart of program to solve shape optimization problem. The optimal shape can be solved by using iterative method based on sequential quadratic programming and H^1 gradient method.

8. 数値計算例

本章では前章までに述べたノンパラメトリック形状最適化法をブレーキ鳴き問題へ適用し、従来のパラメトリック形状最適化では困難であったモデルの表面全体を設計変数とする形状最適化が、ブレーキ鳴き問題に対しても実行できることを示す。またブレーキ鳴きの複素固有値問題を解く際に、残余剛性を考慮した不拘束モード合成法 (CMS-R) を利用することで、従来の残余剛性を考慮しない不拘束モード合成法 (CMS) と比較して、少ない計算負荷で精度の高い複素固有値を算出できる。また、その結果、形状感度と MAC を精度良く評価することができる為、最適化過程で着目するモードを正確に追従することが可能であることを示す。

8・1 モデルの説明と形状最適化の結果

図 4 (a) に対象とするブレーキの有限要素モデルを示す。モデルの節点数は約 38 万で、ブレーキパッドとローター間に接触剛性と摩擦を定義している。本モデルの複素固有値問題を CMS-R で解析すると、60 次モードにおいて複素固有値 $s = -\sigma + j\omega_d$ の実部が正 (負の減衰率) となり、ブレーキ鳴きを引き起こすモードであることがわかった。60 次モードの固有振動数は $\omega_d = 4.31 \text{ kHz}$ 、減衰比は $\zeta = \sigma/\omega_d = -1.87 \times 10^{-2}$ で、そのモード形状を図 4 (b) に示す。CMS-R の解析条件は、採用モード数 $n = 94$ 、式 (16) の残余計算周波数を $\omega_c = 4.10 \text{ kHz}$ とした。

本適用例では、図 4 (a) に示したマウントブラケットの表面形状を設計領域とし、60 次モードの複素固有値の実部をコスト関数、マウントブラケットの体積を初期形状以下とする制約条件の下、形状最適化を適用した。

なお、本事例では 60 次モードのみを対象にしたが、他の次数のモードでも鳴き性能の悪化が懸念される場合には、懸念される次数のモードに対する複素固有値の実部を制約関数として考慮することで、他の鳴き性能を悪化させずに最適な形状を求めることができる。

また、最適化の繰り返し計算過程では対象とするモードの追従を行っており、最適化計算 1 回目は 60 次モードを対象に最適化を行い、2 回目の計算では 1 回目に対象とした 60 次モードとのモード相関 (MAC, Modal Assurance Criterion) が高いモードを対象とする。

図 5 に形状最適化過程のコスト関数の履歴を示す。最適化により複素固有値の実部がゼロに収束しており、本稿で展開したノンパラメトリック形状最適化の妥当性が確認できる。また図 6 に得られたマウントブラケットの最適形状を示す。図 6 (a) のコンター図はマウントブラケット表面の形状変動量を示している。また、図 6 (b) に点 A の X—Y 平面の断面における、初期形状と最適化後形状の比較を示す。図 5, 6 に示したように、本稿で展開したノンパラメトリック形状最適化手法を適用することで、従来のパラメトリック形状最適化では困難であったモデルの表面全体を設計変数とする最適化が、ブレーキ鳴き問題に対しても実行できることが確認できる。

Fig. 4 Detailed brake FE model and target 60th mode. The modal damping coefficient and natural angular frequency are $\zeta = \sigma/\omega_d = -1.87 \times 10^{-2}$ and $\omega_d = 4.31 \text{ kHz}$.

Fig. 5 History of objective function $f_0(\phi)$ and constraint function $f_1(\phi)$ in shape optimization. The objective function $f_0(\phi)$ converges monotonically; it shows validity of proposing optimization scheme.

Fig. 6 Optimal shape of mounting bracket (a) and comparison to initial shape on cross section A (b)

8・2 複素固有値の計算精度の比較

本節では式 (12) から (14) で説明した剰余剛性を考慮しない CMS と、式 (15) から (24) で説明した剰余剛性を考慮した CMS-R の複素固有値の計算精度を比較する. 表 1 に CMS と CMS-R で求めた 60 次モードの複素固有値の比較結果を示す. CMS の結果は、60 次モードの固有振動数 $\omega_d=4.31\text{kHz}$ の約 1.5 倍の 7.5kHz までの実固有モードを採用した結果、同様に 15kHz , 20kHz までの実固有モードを採用した結果を示しており、採用モード数 n はそれぞれ $n=94$, 217 , 306 である. CMS-R の結果は、CMS と同じ採用モード数で、剰余計算周波数を $\omega_c=4.10\text{kHz}$ とした結果を示している. また表 1 の CMS-R の計算時間の () 内の数字は、同じ採用モード数の CMS の計算時間に対する CMS-R の計算時間の比率を表している. 計算機は CPU: Intel Xeon Processor X5680 x 2CPU, Memory: 192GB の Linux PC を利用し、固有値解析や剰余計算は Matlab で行った.

CMS の結果は、採用モード数が最も多い $n=306$ の結果を基準とすると、 $n=94$ の結果は減衰比 ζ で 9.5% の差が生じており、 $n=217$ まで採用した場合でも減衰比 ζ に 1% 程度の差が生じている. 同様にモードベクトルの計算精度を調べるために $n=306$ 採用したときの 60 次モードと、 $n=94$, $n=217$ 採用したときの対象モードの MAC (Modal Assurance Criterion) を求めると、 $n=94$ で 0.986, $n=217$ で 0.997 であり、減衰比 ζ の差と比較すると小さいものの、モードベクトルにも計算誤差が生じていることがわかる.

通常、図 4 に示したような詳細モデルに対して Hessenberg 法のようにすべての固有値、固有モードを求める直接法を適用することは計算コストの観点から難しく、正解値が不明である. そのため CMS では採用モード数に対する精度の検証が常に必要になり、採用モード数に対する複素固有値の変化が十分小さくなる n を決定する.

一方、CMS-R の結果は、CMS-R の $n=306$ の結果を基準とすると、 $n=94$ の場合でも減衰比 ζ の相対差は 0.5% で、固有振動数 ω_d は有効数字 4 桁まで一致しており、MAC も 0.999 と高い値となっている. また $n=217$ の結果は減衰比 ζ も有効数字 3 桁まで一致しており、少数の採用モードでも十分な精度が得られていると考えられる. また採用モード数 n に対する複素固有値の変動が小さいことから、CMS と比較してロバストな手法であることが確認できる. CMS と CMS-R の計算時間を比較すると、採用モード数 n が同じ場合、剰余計算が必要な CMS-R の方が計算時間は長いですが、計算時間の増加は 30% 程度である.

Table 1 Comparison of complex eigenvalue analysis. CMS vs. CMS-R (CMS with residue)

	Number of adopted mode n	Damping ratio $\zeta = \sigma/\omega_d$	Natural freq. ω_d [kHz]	Difference of ζ [%]	Difference of ω_d [%]	MAC	CPU time [Hour]
CMS	94 (under 7.5kHz modes)	-0.0172	4.314	-9.5	-0.1	0.987	1.62
	217 (under 15kHz modes)	-0.0188	4.307	-1.1	-0.3	0.996	4.77
	306 (under 20kHz modes)	-0.0190	4.318	0.0	0.0	1.000	7.82
CMS-R $\omega_c = 4.10\text{kHz}$	94 (under 7.5kHz modes)	-0.0187	4.312	-0.5	0.0	0.999	2.18 (1.35)
	217 (under 15kHz modes)	-0.0188	4.312	0.0	0.0	1.000	5.87 (1.23)
	306 (under 20kHz modes)	-0.0188	4.312	0.0	0.0	1.000	9.88 (1.26)

8・3 形状最適化の収束性の比較

本節では形状最適化過程の複素固有値解析を CMS, CMS-R で行った場合の最適化の収束性を比較する. 図 7 に採用モード数 $n=94, 217, 306$ の CMS で行った場合と, $n=94$ の CMS-R で行った場合の最適化履歴を示す. $n=94, 217$ の CMS で最適化を行った場合, $n=306$ の CMS の結果と比較して最適化の収束が遅いことがわかる. これは複素固有値, 複素モードの計算精度が低く, それらで計算される形状感度の精度が低いためだと考えられる. また $n=94, 217$ の CMS で最適化を行った場合, 最適化過程でコスト関数が不連続になっていることがわかる. これは複素固有値解析の計算精度に起因する問題で, 計算精度が低い形状感度を利用して形状変更を繰り返したことで, モードを多数採用した場合と異なるモード形状に収束したためだと考えられる.

CMS の結果でも, $n=306$ とした場合はコスト関数が一様収束しており, このことから採用モード数が最適化の収束性に影響を与えていることがわかる.

一方, $n=94$ の CMS-R の結果は, $n=306$ の CMS の結果とほぼ一致しており, $n=94$ の CMS-R が $n=306$ の CMS と同等の計算精度を有していることが確認できる. 表 1 に示した CMS-R と CMS の計算時間を比較すると $n=94$ の CMS-R では 2.18 時間, $n=306$ の CMS では 7.82 時間を要していることから, 剰余剛性を考慮した CMS-R は, CMS と比較して少ない計算負荷で精度の高い複素固有値を算出でき, 最適化の反復計算の過程における対象のモードの追従性がよいことがわかる. また CMS-R は少数の採用モードで十分な精度が得られるため, 採用モード数に対する解の精度検証などの作業を軽減できる.

Fig. 7 History of objective function $f_0(\phi)$ and constraint function $f_1(\phi)$ in shape optimization for various adopted mode number n . $f_0(\phi)$ of CMS $n=94$ (black line) and CMS $n=217$ (green line) doesn't converge. On the other hand, $f_0(\phi)$ of CMS $n=306$ (blue line) and CMS-R $n=94$ (red line) are overlap each other, and these lines converge uniformly. The result shows CMS-R $n=94$ has same accuracy with CMS $n=306$.

9. 結 言

本研究ではアセンブリ状態で評価したブレーキ鳴き指標である複素固有値の実部をコスト関数に選択した形状最適化問題を構成し、その解法及び製品規模のブレーキモデルへの応用例を示した。数値計算例では、複素固有値の実部が正となるモードに対して、本稿で示した形状最適化解法を適用した結果、複素固有値の実部が零となる形状を得ることができ、コスト関数が単調に減少していることから形状最適化の妥当性を示した。

また、剰余剛性の影響を考慮したモード合成法 (CMS-R) をブレーキ鳴きの主問題の解法に用いることで、従来のモード合成法 (CMS) よりも高い精度で解が得られることを示した。また、その結果、形状感度と MAC を精度良く評価することができ、最適化過程で着目するモードを正確に追従することが可能であることを示した。

文 献

- Azegami, H. and Takeuchi, K., A smoothing method for shape optimization: traction method using the Robin condition. International Journal of Computational Methods, Vol.3, No.1 (2006), pp.21-33.
- 古屋耕平, 新谷浩平, 伊藤聡, 剰余剛性を考慮した部分構造合成法によるブレーキ鳴き複素固有値問題の高精度求解, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.819 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0328.
- Goto, Y., Saomoto, H., Sugiura, N. and Matsushima, T., Structural design technology for brake squeal reduction using sensitivity analysis. SAE Technical Paper, No.2010-01-1691 (2010), pp.1-13.
- Guan, D. H., Su, X. D. and Zhang F., Sensitivity analysis of brake squeal tendency to substructures modal parameters. Journal of Sound and Vibration, Vol.291, No.1 (2006), pp.72-80.
- Joo, S., Han, J., Park, K. and Kim, Y., Reducing brake squeal through FEM approach and parts design modifications. SAE Technical Paper, No.2006-01-3206 (2006), pp.1-7.
- Kinkaid, N.M., O'Reilly, O.M. and Papadopoulos, P., Automotive disc brake squeal, Journal of Sound and Vibration, Vol.267, No. 1(2003), pp.105-166.
- Lee, H. and Kikuchi, N., Sensitivity analysis of complex eigensolutions for brake noise. SAE Technical Paper, No.2003-01-1626 (2003), pp.1-13.
- Matsushima, T., Nishiwaki, M., Masumo, H. and Ito, S., FEM analysis of low-frequency disc brake squeal : in case of opposed type caliper. SAE Technical Paper, No.973020 (1997), pp.1-6.
- Millner, N., An analysis of disk brake squeal. SAE Technical Paper, No.780332(1978).
- Mills, H. R., Brake squeal. Technical report, No.9162B(1938).
- Nelagadde, M. and Smith, E., Optimization and sensitivity analysis of brake rotor frequencies. SAE Technical Paper, No.2009-01-3046(2009), pp.1-10.

- North, M. R., Disc brake squeal : a theoretical model, Hillington Press (1972).
- Shintani, K. and Azegami, H., Shape optimization for suppressing brake squeal. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol 50, No.6 (2014), pp.1-9.
- Soh, H. J. and Yoo, J. H., Optimal shape design of a brake calliper for squeal noise reduction considering system instability., Journal of Automobile Engineering, Vol.224, No7 (2010), pp. 909-925.

References

- Azegami, H. and Takeuchi, K., A smoothing method for shape optimization: traction method using the Robin condition. International Journal of Computational Methods, Vol.3, No.1 (2006), pp.21-33.
- Furuya, K., Shintani, K. and Ito, K., Component mode synthesis with residual stiffness for brake squeal complex eigenvalue problem , Transactions of the JSME (in Japanese) Vol.80, No.819(2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0328.
- Goto, Y., Saomoto, H., Sugiura, N. and Matsushima, T., Structural design technology for brake squeal reduction using sensitivity analysis. SAE Technical Paper, No.2010-01-1691 (2010), pp.1-13.
- Guan, D. H., Su, X. D. and Zhang F., Sensitivity analysis of brake squeal tendency to substructures modal parameters. Journal of Sound and Vibration, Vol.291, No.1 (2006), pp.72-80.
- Joo, S., Han, J., Park, K. and Kim, Y., Reducing brake squeal through FEM approach and parts design modifications. SAE Technical Paper, No.2006-01-3206 (2006), pp.1-7.
- Kinkaid, N.M., O'Reilly, O.M. and Papadopoulos, P., Automotive disc brake squeal, Journal of Sound and Vibration, Vol.267, No. 1(2003), pp.105-166.
- Lee, H. and Kikuchi, N., Sensitivity analysis of complex eigensolutions for brake noise. SAE Technical Paper, No.2003-01-1626 (2003), pp.1-13.
- Matsushima, T., Nishiwaki, M., Masumo, H. and Ito, S., FEM analysis of low-frequency disc brake squeal : in case of opposed type caliper. SAE Technical Paper, No.973020 (1997), pp.1-6.
- Millner, N., An analysis of disk brake squeal. SAE Technical Paper, No.780332(1978).
- Mills, H. R., Brake squeal. Technical report, No.9162B(1938).
- Nelagadde, M. and Smith, E., Optimization and sensitivity analysis of brake rotor frequencies. SAE Technical Paper, No.2009-01-3046(2009), pp.1-10.
- North, M. R., Disc brake squeal : a theoretical model, Hillington Press (1972).
- Shintani, K. and Azegami, H., Shape optimization for suppressing brake squeal. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol 50, No.6 (2014), pp.1-9.
- Soh, H. J. and Yoo, J. H., Optimal shape design of a brake calliper for squeal noise reduction considering system instability., Journal of Automobile Engineering, Vol.224, No7 (2010), pp. 909-925.