k - ε モデルに基づくティルティングパッドジャーナル軸受の 乱流熱流体潤滑性能解析および実測値との比較

島中 清史^{*1}

A new turbulent thermohydrodynamic performance analysis of tilting pad journal bearing based on a k - ε model and comparison with measurements

Kiyoshi HATAKENAKA^{*1}^{*1}Department of Computer Science and Systems Engineering, Kyushu Institute of Technology
680-4 Kawazu, Iizuka-shi, Fukuoka 820-8502, Japan

Received 7 May 2015

Abstract

The oil film flow in large journal bearings usually transits from laminar flow to turbulent one with increase in shaft speed. This paper presents a new turbulent THL (thermo-hydrodynamic lubrication) model based on the low-Reynolds-number k - ε model to predict the performance of such bearings, while conventional turbulent THL models are based on the mixing length theory. The static performance of a four-pad tilting pad journal bearing of a real size is predicted with the new turbulent THL model and the predictions are found to agree well with the measurements presented in the open literature, including the temperature inflection characteristics of maximum pad surface temperature, a hump increase of minimum oil film thickness corresponding to the temperature inflection with shaft speed and also a steep increase of friction loss resulting from the transition to the turbulent flow of the oil film with increase in shaft speed. The new turbulent THL model is also shown to give the predictions comparable with those with the conventional turbulent THL model. However, the program developed by applying the new model is found to give the predictions surely, when compared with the one applying the conventional model. It is concluded that the new turbulent THL model can replace the conventional one in designing the turbulent journal bearings.

Key words : Tribology, Turbulent thermohydrodynamic lubrication model, k - ε model, Tilting pad journal bearing, Performance

1. 緒 言

高速回転機械に多用されるすべり軸受では、軸の大径化により高周速化が進むと油膜流れは層流から乱流に遷移することが知られている。このような領域で運転されるすべり軸受の性能を理論的に予測するには、油膜流れの乱流化を前提に導出された流体潤滑モデルを適用する必要がある。例えば Prandtl の混合距離理論に基づいて渦粘性係数を与える Ng・Pan のモデル (Ng and Pan, 1965) や青木・原田のモデル (青木, 原田, 1971) の他、乱流エネルギー k と乱流散逸率 ε の輸送方程式で渦粘性係数を与えるモデル (加藤, 堀, 1983) があり、これらはいずれも等粘度流体潤滑モデルである。さらに、軸受パッド表面の最高温度やその挙動を含めて予測するためには、油膜内の3次元的な温度分布、粘度分布を考慮した熱流体潤滑モデル (Thermo-Hydrodynamic Lubrication Model. 以下, THL モデル) との統合が必要となる。

Safar・Szeri (Safar and Szeri, 1974) は、先に述べた Ng・Pan の等粘度乱流潤滑モデルを THL モデルに拡張した。Taniguchi ら (Taniguchi, et al., 1990) は、混合油温を考慮してこの乱流 THL モデルを実機サイズのティルティングパッドジャーナル軸受性能の予測へ展開し、さらに実験を行って実測値と比較している。また、著者らは先に、Prandtl の混合距離理論に青木・原田が独自に修正を加えて導いた等粘度乱流潤滑モデル (青木, 原田,

Fig. 1 Four-pad tilting pad journal bearing with load between pads

1971) を 3 次元 THL モデルに拡張した乱流熱流体潤滑モデル (Turbulent THL Model. 以下, 乱流 THL モデル) を提示し, そのモデルによって求めた予測値を Taniguchi らの実験結果と比較したところ, Taniguchi らのモデルよりも実測値とより良い一致をみている (Tanaka and Hatakenaka, 2004).

しかし, これらの乱流 THL モデルの基礎となる混合距離の式はもともと圧力勾配の小さな場合の実験で得られた経験式であり, すべり軸受油膜のように圧力勾配の大きい流れには本来は適さないという性質を内蔵している (加藤, 堀, 1983).

さらに, 混合距離は複雑な代数式から構成される非線形方程式を解かない限り求まらない. 場合によっては繰り返し収束計算を行う過程で混合距離が求まらず, これが原因で軸受性能予測値が最終的に得られないこともある.

CFD (Computational Fluid Dynamics) の分野では, 航空機や自動車の周辺のような自由空間流れを数値的に解析する際には, 混合距離理論に替え $k-\varepsilon$ モデルも多用されている. 特に, 境界層内で壁面の減衰効果や粘性効果の作用を大きく受ける流れに対しては低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルが提案されている (Jones and Launder, 1972). この乱流モデルは, 混合距離理論とは異なり, 圧力勾配の影響を受けにくいとされ (加藤, 堀, 1983), また, 乱流エネルギーと乱流散逸率に関する輸送方程式がいずれも数値収束解を得やすい型をしている.

そこで, 本論文では, まず, 壁面付近における乱流諸量の漸近挙動を満たす阿倍らの低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル (以下, AN モデル) (阿倍他, 1992) を層流 THL モデルと統合した 3 次元乱流 THL モデル (以下, 本乱流 THL モデル) を新たに提案する. 次に, Taniguchi ら (Taniguchi, et al., 1990) が実験対象とした大型高速ティルティングパッドジャーナル軸受の軸受パッド表面の最高温度, 最小油膜厚さ, しゅう動損失について予測値を求め, 混合距離を用いる従来の乱流 THL モデル (Tanaka and Hatakenaka, 2004) による予測値および実測値との比較を行うことで, 本乱流 THL モデルの評価を行うことにする.

2. 記 号

本論文で用いる記号をまとめて以下に示す.

- B_o : 潤滑油粘度の温度指数 (無次元) $= [w_g / (2r_j l_j \rho c_p)] \beta_o$
- c_b, c_p : 軸受組立半径すきま, 軸受加工半径すきま
- c_p : 潤滑油の比熱
- $C_{E1}, C_{E2}, C_M, \sigma_E, \sigma_K$: 低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルで用いる定数
- d_p : パッド厚さ
- D_p : 無次元パッド厚さ $= d_p / r_j$
- e, e^* : 偏心率とその修正量
- E_0, E_1, E_2, G_0, G_1 : 無次元油膜粘度の関数
- E_t : 無次元乱流散逸率 $= \varepsilon / [\omega(r_j \omega)^2]$
- f_E, f_M : 低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルで用いる乱流レイノルズ数の関数

h	: 油膜厚さ
H	: 無次元油膜厚さ $= h/c_p$
h_{amb}	: 軸受パッドと環境間の熱伝達率
I, J_o, J_p, K	: θ, η, R, Z の各軸方向の格子分割数
k	: 乱流エネルギー
K_t	: 無次元乱流エネルギー $= k/(r_j \omega)^2$
l_f	: しゅう動損失
L_f	: 無次元しゅう動損失 $= l_f/(w_g c_p \omega)$
l_j	: 軸受幅
m_p	: 予圧係数 $= 1 - c_b/c_p$
M	: 無次元油膜粘度 $= \mu/\mu_{sup}$
M_t	: 無次元渦粘性係数 $= \mu_t/\mu_{sup}$
n	: 軸回転速度
n_p	: パッド枚数
p	: 油膜圧力 (ゲージ圧)
P	: 無次元油膜圧力 $= (2r_j l_j/w_g) p$
Pe	: ペクレ数 $= \rho c_p c_p^2 \omega/\lambda_o$
Pr	: プラントル数 $= \mu_{sup} c_p/\lambda_o$
Pr_t	: 乱流プラントル数
q	: 流量
Q	: 無次元流量 $= q/(l_j c_p r_j \omega)$
r	: 半径, 半径方向座標
R	: 無次元半径, 無次元半径方向座標 $= r/r_j$
Re^*	: 軸受レイノルズ数 $= \rho c_p^2 \omega/\mu_{sup}$
Re_t	: 乱流レイノルズ数 $= \rho k^2/(\mu \varepsilon)$
S	: ゾンマーフェルト数 $= (2r_j l_j/w_g) \mu_{sup} \omega (r_j/c_p)^2$
T	: 温度
u, v, w	: 円周方向, 油膜厚み方向, 軸方向の油膜速度
U, V, W	: 円周方向, 油膜厚み方向, 軸方向の無次元油膜速度 $= u/(r_j \omega), = v/(c_p \omega), = w/(l_j \omega)$
w_g	: 軸受荷重
x, y	: 鉛直方向, 水平方向の座標
X, Y	: 鉛直方向, 水平方向の無次元座標 $= x/c_b, = y/c_b$
y, z	: 油膜厚み方向, 軸方向の座標
Y^*	: 壁座標
β_o	: 潤滑油粘度の温度指数
δ, δ^*	: パッド傾斜角とその修正量
ε	: 乱流散逸率
$\varepsilon, \varepsilon^*$	: 偏心率とその修正量 $= e/c_b, = e^*/c_p$
η, Z	: 油膜厚み方向, 軸方向の無次元座標 $= y/h, = z/l_j$
θ	: 円周方向座標
Θ	: 無次元温度 $= (2r_j l_j/w_g) \rho c_p (T - T_{sup})$
λ	: 熱伝導率
Λ	: 軸受幅径比 $= l_j/(2r_j)$
μ	: 油膜粘度
μ_t	: 渦粘性係数
ν	: 動粘度 $= \mu/\rho$

ρ : 潤滑油の密度
 χ : 混合係数
 ψ : すきま比 $= c_p / r_j$
 ω : ジャーナル回転角速度 $= 2\pi n / 60$

添え字など

h : ハウジングを表す
 in : 油膜入口部, パッド前縁を表す
 j : ジャーナルを表す
 $\max, \min$: 最大値, 最小値を表す
 $\text{Min}(A, B)$: A と B のうち, 値の小さい方を表す
 mix : 混合油を表す
 o : 油膜を表す
 out : 油膜出口部, パッド後縁を表す
 p : パッドを表す
 pb : 軸受パッド背面を表す
 $pivot$: ピボットを表す
 ps : 軸受パッド表面を表す
 sup : 給油を表す
 X, Y : 鉛直方向, 水平方向を表す

3. 理論モデル

ティルティングパッドジャーナル軸受の乱流 THL 性能は, 5 つの偏微分方程式 (乱流レイノルズ方程式, 油膜のエネルギー方程式, 軸受パッドの熱伝導方程式, 油膜の乱流エネルギーの輸送方程式, 油膜の乱流散逸率の輸送方程式) に加え, 9 つの代数式 (油膜厚さ式, 油膜速度式, 乱流レイノルズ数の算出式, 渦粘性係数の算出式, 混合油温度の算出式, ジャーナル表面温度の評価式, 油膜温度と粘度の関係式, ピボットまわりのモーメントの釣合い式, 軸受荷重と油膜反力の釣合い式) を連立して解くことにより求められる. 各式の関係を表 1 に示す. ただし, 変数は無次元量で記してある.

以下では, ティルティングパッドジャーナル軸受が軸受幅中央に関して対称であるとして定式化を行う.

3・1 乱流レイノルズ方程式

軸受すきまを満たす潤滑油を非圧縮性ニュートン流体とみなす. その運動量方程式に対して, まず, 軸受近似 (日本トライボロジー学会, 2001) を適用して簡略化する. 次に, レイノルズ応力項について, 油膜厚み方向への勾配が他の方向への勾配に比べて十分に大きいと仮定し, ブジネスク近似を適用したうえで追加する. このように変形した運動量方程式を, 壁面 (ジャーナルと軸受パッドの各表面) において流体のすべりはなしとする境界条件のもとで解くと, 油膜速度の式が得られる. それは, 無次元形で,

$$U = \frac{H^2}{S} \left[E_1(\theta, \eta, Z) - \frac{E_1(\theta, 1, Z)}{E_0(\theta, 1, Z)} E_0(\theta, \eta, Z) \right] \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{E_0(\theta, \eta, Z)}{E_0(\theta, 1, Z)} \quad (1)$$

$$W = \frac{H^2}{4A^2 S} \left[E_1(\theta, \eta, Z) - \frac{E_1(\theta, 1, Z)}{E_0(\theta, 1, Z)} E_0(\theta, \eta, Z) \right] \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (2)$$

ここで,

Table 1 Relation between equations and expressions used in turbulent THL (TTHL) model

Equation/expression	Input	Output
Turbulent Reynolds equation	M, M_t, H	P
Energy equation for oil film	$U, V, W, M, M_t, H, \theta_p, \theta_{\text{mix}}, \theta_j, E_t$	θ_o
Heat conduction equation for pad metal temperature	θ_o	θ_p
Transport equation of turbulent energy for oil film	U, V, W, M, M_t, H, E_t	K_t
Transport equation of dissipation rate of turbulent energy for oil film	U, V, W, M, M_t, H, K_t	E_t
Expression of oil film thickness	$\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \delta$	H
Expression of oil film velocity	P, M, M_t, H	U, V, W
Expression of turbulent Reynolds number	M, K_t, E_t	Re_t
Expression of eddy viscosity	M, H, E_t, Re_t	M_t
Expression of temperature of mixing oil	θ_o	θ_{mix}
Expression of journal surface temperature	$\theta_o, \theta_{\text{mix}}$	θ_j
Expression of temperature-viscosity relation of lubricant	θ_o	M
Balance of moment about pad pivot	P	δ
Balance of bearing load and oil film reaction force	P	$\varepsilon_X, \varepsilon_Y$

$$E_0(\theta, \eta, Z) = \int_0^\eta \frac{1}{M + M_t} d\eta \quad (3)$$

$$E_1(\theta, \eta, Z) = \int_0^\eta \frac{\eta}{M + M_t} d\eta \quad (4)$$

式 (1) , 式 (2) を連続の式に代入すると乱流レイノルズ方程式が得られる。それは、無次元形で、

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[H^3 G_0 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{4\Lambda^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[H^3 G_0 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] = S \frac{\partial (H G_1)}{\partial \theta} \quad (5)$$

ただし、

$$E_2(\theta, \eta, Z) = \int_0^\eta \frac{\eta^2}{M + M_t} d\eta \quad (6)$$

として、

$$G_0(\theta, Z) = E_2(\theta, 1, Z) - \frac{E_1(\theta, 1, Z)^2}{E_0(\theta, 1, Z)} \quad (7)$$

$$G_1(\theta, Z) = 1 - \frac{E_1(\theta, 1, Z)}{E_0(\theta, 1, Z)} \quad (8)$$

乱流レイノルズ方程式 (5) に対し, 油膜の入口部, 出口部, 側面において油膜圧力は大気圧 (ゲージ圧 0) に等しいとする境界条件を与える. また, 円周方向への油膜破断条件にはレイノルズ境界条件を適用する.

ティルティングパッドジャーナル軸受の油膜厚さは, 無次元形で,

$$H = 1 + \varepsilon_X^* \cos(\theta + \delta) + \varepsilon_Y^* \sin(\theta + \delta) \quad (9)$$

ただし, $\delta^* = \{R_{pb} / (R_h - R_{pb})\} \delta$ として,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X^* \\ \varepsilon_Y^* \end{Bmatrix} = (1 - m_p) \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{Bmatrix} + \psi^{-1} (R_h - R_{pb}) \begin{Bmatrix} \cos(\theta_{pivot} - \delta^*) \\ \sin(\theta_{pivot} - \delta^*) \end{Bmatrix} - \psi^{-1} (R_{ps} + D_p - R_{pb}) \begin{Bmatrix} \cos(\theta_{pivot} + \delta) \\ \sin(\theta_{pivot} + \delta) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

パッド傾斜角 δ は, 揺動可能な軸受パッドが釣合いをとる角, つまり, 油膜圧力によるピボットまわりのモーメントが 0 になるときの角として求める.

偏心率 ε_X , ε_Y は, 油膜圧力による反力と軸受荷重との釣合いを満たすように求める.

式 (5) に対し, 有限体積法を適用して離散化を行う. その際, 潤滑面 (θZ 平面) を各軸方向に等間隔に格子分割する. 格子分割数は, θ 軸方向には I , Z 軸方向には K とする.

3・2 油膜のエネルギー方程式と軸受パッドの熱伝導方程式

3次元層流 THL モデルで使用する油膜のエネルギー方程式 (Tanaka, 1991) において, 乱流熱流束項が油膜温度の勾配に比例すると仮定し, その油膜厚み方向への勾配が他の方向への勾配に比べて十分に大きいとしてこれを追加する. また, 粘性散逸項は, 油膜速度のレイノルズ平均からの変動分に起因する乱流散逸率を用いて補正する. このように変形した油膜のエネルギー方程式を無次元形で表すと,

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \Theta_o}{\partial \theta} + \frac{1}{H} \left(V - \eta \frac{\partial H}{\partial \theta} U \right) \frac{\partial \Theta_o}{\partial \eta} + W \frac{\partial \Theta_o}{\partial Z} \\ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{PeH^2} \left(1 + \frac{Pr}{Pr_t} M_t \right) \frac{\partial \Theta_o}{\partial \eta} \right\} + \frac{SM}{H^2} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 + 4A^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \right\} + SRe^* E_t \end{aligned} \quad (11)$$

ここで,

$$V = -H \int_0^\eta \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{\eta}{H} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (12)$$

本解析では, 乱流プラントル数 Pr_t は定数 (= 0.9) とする (数値流体力学編集委員会, 1995b).

油膜の乱流散逸率を考慮しない従来の乱流 THL モデル (Tanaka and Hatakenaka, 2004) では, 油膜のエネルギー方程式を定式化する過程で乱流散逸項を渦粘性と関連づけて粘性散逸項に組み込むことで乱流散逸が油膜温度に及ぼす影響をモデルに取り入れている. しかし, 本乱流 THL モデルではそのような関連づけは不要である. このため, 式 (11) は, 従来の乱流 THL モデルにおける油膜のエネルギー方程式と比べると, 粘性散逸項 (右辺第 2 項) が異なり, また, 乱流散逸項 (右辺第 3 項) が追加されている.

油膜の粘度は, 温度に対して指数関数的に変化すると仮定する. それを無次元形で表記すると,

$$M = \exp[-B_o \Theta_o] \quad (13)$$

軸受パッド間における潤滑油の温度は、低温の供給油と高温の再循環油が混合して得られる油温(混合油温度)に支配されるとする。この混合油温度は、軸受パッド間に流れ込む再循環油の流量全体のうち $\chi (< 1)$ の割合だけが供給油と均一に混合すると仮定して算出する(田中, 畠中, 2004)。

ジャーナルは、表面温度が一樣であると仮定する。その温度は、ゼロネットヒートフローモデル(Pinkus, 1990)を修正して算出し、油膜からジャーナルに流入する熱量に加え、軸受パッド間領域からジャーナルに流入する熱量、ならびに、ジャーナルから回転軸を伝い軸方向に流出する熱量の総計を0とするモデルを用いる。

軸受パッドの熱伝導方程式は、無次元形で表すと、

$$\frac{\partial^2 \Theta_p}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_p}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta_p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4\Lambda^2} \frac{\partial^2 \Theta_p}{\partial Z^2} = 0 \quad (14)$$

油膜のエネルギー方程式(11)と軸受パッドの熱伝導方程式(14)に対し、次の境界条件を与える。ジャーナルとの界面では、油膜温度はジャーナル表面温度に等しいとする。油膜入口部における油膜温度は、軸受パッドとの界面では混合油温度に等しいとし、混合油温度からジャーナル表面温度まで油膜厚み方向に線形に変化するとする。ただし、油膜が部分的に逆流する場合(田中, 畠中, 2004)は、円周方向の油膜速度が0となる位置からジャーナルとの界面に至るまで油膜温度が混合油温度からジャーナル表面温度まで線形に変化するとする。油膜と軸受パッドの界面では、油膜と軸受パッドは温度が等しく、しかも、界面を通過する熱流束は油膜側と軸受パッド側とで連続するとする。軸受パッドの前縁と後縁では、軸受パッドと混合油との間で熱伝達が行われるとする。軸受パッドの側面と背面では、軸受パッドと環境との間で熱伝達が行われるとする。なお、油膜の出口部と側面、および、部分逆流が生じる場合の油膜入口部における油膜温度は、油膜のエネルギー方程式(11)を解いて求める。

式(11)、式(14)は、有限体積法を適用して離散化を行う。式(11)の離散化に際し、油膜($\theta \eta Z$ 空間)を θ , η , Z の各軸方向に等間隔に格子分割する。格子分割数は、 θ 軸方向には I , η 軸方向には J_0 , Z 軸方向には K とする。式(14)は、軸受パッド($R \theta Z$ 空間)を各軸方向に等間隔に配置した格子に分割して離散化を行う。格子分割数は、 R 軸方向には J_p , θ 軸方向には I , Z 軸方向には K とする。

3・3 油膜の乱流エネルギーと乱流散逸率の輸送方程式

ティルディングパッドジャーナル軸受では、ジャーナル表面および軸受パッドの曲率半径に比べて、油膜が形成される軸受すきまの寸法は十分に小さい。この状況のもとで、低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル(数値流体力学編集委員会, 1995a)における乱流エネルギーおよび乱流散逸率の輸送方程式を簡略化すると、これらは無次元形で、それぞれ、

$$U \frac{\partial K_t}{\partial \theta} + \frac{1}{H} \left(V - \eta \frac{\partial H}{\partial \theta} U \right) \frac{\partial K_t}{\partial \eta} + W \frac{\partial K_t}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{Re^* H^2} \left(M + \frac{M_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K_t}{\partial \eta} \right] + \frac{M_t}{Re^* H^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 + 4\Lambda^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \right] - E_t \quad (15)$$

$$U \frac{\partial E_t}{\partial \theta} + \frac{1}{H} \left(V - \eta \frac{\partial H}{\partial \theta} U \right) \frac{\partial E_t}{\partial \eta} + W \frac{\partial E_t}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{Re^* H^2} \left(M + \frac{M_t}{\sigma_E} \right) \frac{\partial E_t}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{C_{E1} M_t}{Re^* H^2} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 + 4\Lambda^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \right\} - C_{E2} f_E E_t \right] \frac{E_t}{K_t} \quad (16)$$

渦粘性係数 M_t は、油膜の乱流エネルギーの輸送方程式(15)、油膜の乱流散逸率の輸送方程式(16)の他に油膜速度式[式(1)、式(2)]、乱流レイノルズ方程式(5)、油膜のエネルギー方程式(11)にも含まれる。それは、

$$M_t = C_M f_M M Re_t \quad (17)$$

により算出する．式 (17) 中の乱流レイノルズ数 Re_t は,

$$Re_t = \frac{Re^* K_t^2}{\psi^2 M E_t} \quad (18)$$

から求める．式 (15) から式 (18) までにおける定数とモデル関数は，AN モデル（阿倍他，1992）では，

$$C_M = 0.09, \quad C_{E1} = 1.5, \quad C_{E2} = 1.9, \quad \sigma_K = 1.4, \quad \sigma_E = 1.4 \quad (19)$$

$$f_E = \{1 - \exp(-Y^*/3.1)\}^2 \left[1 - 0.3 \exp\{-(Re_t/6.5)^2\} \right] \quad (20)$$

$$f_M = \{1 - \exp(-Y^*/14)\}^2 \left[1 + 5 Re_t^{-3/4} \exp\{-(Re_t/200)^2\} \right] \quad (21)$$

ここで，式 (20) と式 (21) における壁座標 Y^* は，2 壁面（ジャーナルおよび軸受パッド）間の狭いすきま内に形成されるティルティングパッドジャーナル軸受の油膜では，

$$Y^* = H \left[(Re^*{}^3 E_t) / (\psi^2 M^3) \right]^{1/4} \text{Min}(\eta, 1 - \eta) \quad (22)$$

油膜の乱流エネルギーの輸送方程式 (15)，油膜の乱流散逸率の輸送方程式 (16) に対し，次の境界条件を与える．油膜入口部においては，乱流エネルギーと乱流散逸率の円周方向への勾配はいずれも 0 であるとする．ジャーナル表面および軸受パッド表面においては，

$$K_t = 0, \quad E_t = \frac{2M}{Re^* H^2} \left(\frac{\partial \sqrt{K_t}}{\partial \eta} \right)^2 \quad (23)$$

なお，油膜の出口部と側面における油膜の乱流エネルギーと乱流散逸率は，それぞれの輸送方程式 (15)，式 (16) を解いて求める．

式 (15)，式 (16) の離散化は有限体積法を適用して行う．格子は，油膜のエネルギー方程式 (11) を離散化する際に用いた格子と同一とする．

3・4 しゅう動損失

油膜の粘性によるせん断応力がジャーナル表面に作用することで摩擦力が生じる．この摩擦力による損失を，油膜特性が確定したあとに，しゅう動損失 L_f として求める．その算出式は，無次元形で，

$$L_f = \frac{1}{2} S \sum_{n=1}^{n_p} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{out}} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{H} \left[(M + M_t) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right]_{\eta=1} dZ d\theta \quad (24)$$

3・5 計算の流れ

ティルティングパッドジャーナル軸受の性能予測値は、次の手順に従い求める。

まず、軸受諸元と運転条件の入力値から、計算に必要な無次元定数 (S , Pe , Pr , Re^* など) を算出する。

次に、偏心率 ε_X , ε_Y の値を仮定し、これらに対する油膜厚さ H の分布を求める。

さらに、乱流レイノルズ方程式 (5) を解き、油膜圧力 P の分布を求める。そして、ピボットまわりのモーメントを計算し、それが 0 でなければパッド傾斜角 δ に修正を加え、 H の分布を変更してから再び式 (5) を解く。この繰り返しループは、ピボットまわりのモーメントが 0 になるまで続ける。

油膜速度 U , W , V は、それぞれ式 (1), 式 (2), 式 (12) に従い求める。

油膜の乱流エネルギーの輸送方程式 (15), 油膜の乱流散逸率の輸送方程式 (16), 壁座標の算出式 (22), 乱流レイノルズ数の計算式 (18), 渦粘性係数の算出式 (17) を連立して解き、 K_t , E_t , Y^* , Re_t , M_t の分布を一括して求める。油膜の乱流エネルギー K_t , 油膜の乱流散逸率 E_t , 乱流レイノルズ数 Re_t , 渦粘性係数 M_t について収束判定を行う。収束解が得られていない場合は、乱流レイノルズ方程式 (5) を解く手順にまで戻る。この繰り返しループは、 K_t , E_t , Re_t , M_t の数値収束解が得られるまで続ける。

次に、油膜のエネルギー方程式 (11) と軸受パッドの熱伝導方程式 (14) を連立して解き、 θ_o , θ_p の分布と θ_{mix} , θ_j の値を一括して求める。

油膜粘度の式 (13) を用いて M の分布を修正する。油膜粘度 M について収束判定を行う。収束解が得られていない場合は、乱流レイノルズ方程式 (5) を解く手順にまで戻る。この繰り返しループは、 M の数値収束解が得られるまで続ける。

そして、油膜反力を求め、油膜反力と軸受荷重との釣合いを調べる。釣合いが取れない場合は、偏心率 ε_X , ε_Y に修正を加え、油膜厚さ H の分布を求める手順にまで戻る。この繰り返しループは、油膜反力が軸受荷重と釣り合うまで続ける。

最後に、しゅう動損失 L_f を計算する。

有次元化した軸受性能予測値のデータを保存し、計算を終了する。

4. 結果および考察

前章で提案した本乱流 THL モデルの評価を行うために、Taniguchi ら (Taniguchi, et al., 1990) が実験を実施した、荷重方向を LBP (Load Between Pads) とする 4 枚パッド式のティルティングパッドジャーナル軸受 (図 1) を対象として、まずは、軸受性能予測値に及ぼす格子分割数の影響について調べ、次いで、混合距離を用いる従来の乱流 THL モデル (Tanaka and Hatakenaka, 2004) による予測値および実測値との比較を行う。軸受の仕様は表 2 の通りである。

4・1 格子分割数の影響

さまざまな格子分割数の組に対して軸受性能予測を行い、軸受パッド表面の最高温度 $T_{ps \max}$ [$^{\circ}\text{C}$], 最小油膜

Table 2 Values for bearing performance of tilting pad journal bearing

Journal diameter $2r_j$	479 mm	Rotational frequency of journal n	1500 ~ 4000 rpm
Bearing width l_j	300 mm	Bearing load w_g	170 kN
Assembled mean radial clearance c_b	612 μm	Temperature of supplied oil T_{sup}	40 $^{\circ}\text{C}$
Machined mean radial clearance c_p	612 μm	Kinematic viscosity of supplied oil ν_{sup}	32 mm^2/s
Angular extent of bearing pad	80 $^{\circ}$	Oil density ρ	852 kg/m^3
Pad thickness d_p	121 mm	Specific heat of lubricant c_p	2260 $\text{J}/(\text{kg}^{\circ}\text{C})$
Thermal conductivity of oil film λ_o	0.121 $\text{W}/(\text{m}^{\circ}\text{C})$	Viscosity-temperature index β_o	0.0357 $^{\circ}\text{C}^{-1}$
Thermal conductivity of bearing pad λ_p	50 $\text{W}/(\text{m}^{\circ}\text{C})$	Flow rate of supplied oil q_{sup}	8.67 litre/s
Convective heat transfer coefficient from bearing pad to ambient h_{amb}	1500 $\text{W}/(\text{m}^2^{\circ}\text{C})$	Mixing coefficient χ	0.8

Table 3 Grid size

Type	I	J_0	J_p	K	Type	I	J_0	J_p	K
A	32	100	100	20	D-1	32	100	80	20
B-1	28	100	100	20	D-2			60	
B-2	24				D-3			50	
B-3	20				D-4			40	
B-4	16				D-5			30	
B-5	12				D-6			20	
B-6	8				D-7			15	
B-7	4				D-8			10	
C-1	32	80	100	20	D-9			5	
C-2		60			E-1	32	100	100	16
C-3		50			E-2				12
C-4		40			E-3				8
C-5		30			F	16	100	5	12
C-6		20							
C-7		10							

厚さ $h_{\min}$ [μm], しゅう動損失 l_f [kW] の各予測値に及ぼす格子分割数の影響について調べる. その結果をもとに性能予測値を求めるうえで適切な格子分割数を定める. なお, 本節では軸回転速度 n は 4000 rpm に固定する.

格子分割数の組を表 3 に示す. θ , η , R , Z の各軸方向の格子分割数 I , J_0 , J_p , K の基準値をそれぞれ 32, 100, 100, 20 とし, これらの組をタイプ A とする. タイプ A を基準とし, タイプ B は分割数 I のみを 28 ~ 4 の範囲で, タイプ C は J_0 のみを 80 ~ 10 の範囲で, タイプ D は J_p のみを 80 ~ 5 の範囲で, タイプ E は K のみを 16 ~ 8 の範囲でそれぞれ変更した組を表す.

図 2 の(a), (b), (c)は, それぞれ, 軸受パッド表面の最高温度 $T_{ps \max}$ [$^{\circ}\text{C}$], 最小油膜厚さ $h_{\min}$ [μm], しゅう動損失 l_f [kW] に及ぼす格子分割数の影響を示す. 各図の点線は, 基準値 (タイプ A の結果) に対する許容誤差の上下限値を表す. 本研究では許容誤差を, $T_{ps \max}$ では $\pm 1^{\circ}\text{C}$, $h_{\min}$ と l_f ではいずれも $\pm 1\%$ と設定した.

格子分割数 I , J_0 , J_p , K が大きくなるにつれて, $T_{ps \max}$, $h_{\min}$, l_f はいずれもある値に収束していく傾向が見られる. 特に, J_0 の影響は大きく, J_0 が著しく小さい場合には, 基準値に対する誤差範囲から大幅に逸脱する. この結果をもとにして, 本解析では, 次節以降で軸受性能予測値を求める際に用いる格子分割数の組としてタイプ F ($I = 16$, $J_0 = 100$, $J_p = 5$, $K = 12$) を選定した. 表 4 に基準値とタイプ F による結果との比較を示す. いずれの予測値も許容誤差の範囲内にあることを確認できる.

4・2 軸受性能の比較

前節で定めたタイプ F の格子を用い, 軸回転速度 n を表 2 に示す範囲で変化させて軸受性能予測値を求めた. 軸回転速度 n に対する軸受パッド表面の最高温度 $T_{ps \max}$, 最小油膜厚さ $h_{\min}$, しゅう動損失 l_f の変化をそれぞれ図 3, 図 4, 図 5 に示す. 図中, 実線, 点線, 破線は, それぞれ, 本乱流 THL モデル, 層流 THL モデル, 混合距離を用いる乱流 THL モデル (Tanaka and Hatakenaka, 2004) による予測値を, ● は Taniguchi ら (Taniguchi, et al., 1990) の実測値を表す. Taniguchi らの実験では, 軸回転速度 n の上昇にともない, 軸受動力損失が著しく増大し, 軸回転速度とともに単調に上昇していた軸受パッド表面の最高温度が, ある回転速度を超えるといったん低下し, さらに増速を続けると再び上昇に転じる「腰折れ現象」が観測されている.

軸受パッド表面の温度は負荷側パッドの油膜出口部付近で最高値 $T_{ps \max}$ となる. その最高温度 $T_{ps \max}$ は, 層流 THL モデルでは軸回転速度 n に対して単調に増加する. これに対し, 本乱流 THL モデルでは, n が 2800 rpm を超えるあたりから増加の傾向が緩やかとなり, 3500 rpm から 3900 rpm までにかけていったんは低下し, その後, 再び増加傾向に転じており, 実験的に観測された温度の腰折れ現象が再現されている. 混合距離を用いる乱流

(a) Maximum pad surface temperature

(b) Minimum oil film thickness

(c) Frictional loss

Fig. 2 Effect of grid size on bearing performance

Table 4 Comparison of bearing performance calculated with Type A and Type F

Type	$T_{ps \max}, ^\circ\text{C}$	$h_{\min}, \mu\text{m}$	l_f, kW
A	72	208	405
F	73	208	404

THL モデルによる予測値も同様の傾向を示す。本乱流 THL モデル、混合距離を用いる乱流 THL モデルともに、予測値は実測値と良好に一致している。

最小油膜厚さ $h_{\min}$ は、本乱流 THL モデル、層流 THL モデルともに、軸回転速度 n に対して緩やかに増加する傾向を示すが、 n が 2800 rpm を超えると、本乱流 THL モデルによる予測値が層流 THL モデルによる予測値に比べて大きくなる。本乱流 THL モデルによる予測値は、図 3 における温度の腰折れに対応して 3800 rpm 程度の軸回転速度で増加の度合いがいったん強まるが、それ以上の軸回転速度になると再び緩やかな増加傾向に戻る。混

Fig. 3 Variation of maximum pad surface temperature with journal rotational speed

Fig. 4 Variation of minimum oil film thickness with journal rotational speed

Fig. 5 Variation of bearing friction loss with journal rotational speed

合距離を用いる乱流 THL モデルによる予測値も同様な傾向を示す。本乱流 THL モデル，混合距離を用いる乱流 THL モデルともに，予測値は実測値と良好に一致している。

しゅう動損失 I_f は，層流 THL モデルによる予測値が軸回転速度 n に対して緩やかに増加するのに対し，本乱流 THL モデルでは n に対する増加の度合いが大きい。混合距離を用いる乱流 THL モデルによる I_f の予測値においても同様な傾向を示す。本乱流 THL モデル，混合距離を用いる乱流 THL モデルともに，予測値は実測値と良好に一致している。

ここで本乱流 THL モデルと層流 THL モデルによる予測値の差について油膜流れの状態に着目して考察する。

まず，軸回転速度 n が小さいうちは，油膜流れが層流状態にあるので，本乱流 THL モデルと層流 THL モデルとで予測値に差は現れない。

軸回転速度 n が 1500 rpm 程度になると，反負荷側パッドの油膜内で流れの乱流化が部分的に始まる。この乱流化にともなう渦粘性係数の増加のために油膜粘度が見かけ上大きくなると油膜速度がその影響を受け，ジャーナル表面に接する箇所で油膜速度の勾配が大きくなり，しゅう動損失 I_f が増大する。これに対し，軸受パッド表面の最高温度 $T_{ps \max}$ と最小油膜厚さ $h_{\min}$ は，正圧が発生する負荷側パッドにおける油膜流れの影響を大きく受ける。しかし，軸回転速度 n が 1500 rpm 程度では，その流れは層流のままである。このため，両モデルで予測値に差は現れない。

軸回転速度 n が 3500 rpm 程度となり負荷側パッドにおいても油膜の乱流化が進む（図 6）と，油膜厚み方向の粘度分布，温度分布は均一化が進む（図 7，図 8(a)）。この状況下では，油膜全域が層流状態にある場合（図 8(b)）に比べて，油膜温度は全体的に見れば高くはなるものの，その最大値は低下する。これにともない，軸受パッド表面の最高温度 $T_{ps \max}$ も低下する。油膜粘度は，全体的には小さくなるが，渦粘性係数の分だけ見かけ上は大きくなる。この影響が油膜速度に及ぶことで，しゅう動損失 I_f はさらに増大することになる。また，油膜粘度の見かけ上の増大にともない油膜の負荷容量が増加するため最小油膜厚さ $h_{\min}$ は大きくなる。

軸回転速度 n が 3800 rpm 程度を超えると，負荷側パッドの油膜流れは出口部に達するまで乱流状態を維持するようになる（図 9）。この状況になると，油膜温度分布の均一化が油膜厚み方向のみならず円周方向にも進むため，

Fig. 6 Distribution of eddy viscosity μ_t in the mid-plane of oil film ($n = 3500$ rpm, unit: mPa·s)

Fig. 7 Distribution of dimensionless oil film viscosity M in the mid-plane of oil film ($n = 3500$ rpm)

(a) Present turbulent THL model

(b) Laminar THL model

Fig. 8 Distribution of oil film temperature T_o in the mid-plane of oil film ($n = 3500$ rpm, unit: °C)

Fig. 9 Distribution of eddy viscosity μ_t in the mid-plane of oil film ($n = 4000$ rpm, unit: mPa·s)

軸受パッド表面の最高温度 $T_{ps \max}$ が大きく低下して温度の腰折れが生じることになる。油膜粘度分布も同様に均一化するため、しゅう動損失 l_f ならびに最小油膜厚さ $h_{\min}$ は増加の度合いを強めることになる。

軸回転速度 n がさらに上昇すると、油膜の流れの乱流化はいつそう進み、しゅう動損失 l_f と最小油膜厚さ $h_{\min}$ は増加を続けることになるが、油膜温度の最大値は軸回転速度 n の上昇に対して増加傾向に転じ、これに連動して軸受パッド表面の最高温度 $T_{ps \max}$ も増加するようになる。

なお、軸受組立半径すきま c_b 、軸受加工半径すきま c_p 、軸受荷重 w_g を表 2 とは異なる適当な値（例えば、表 2 の値の 0.5 倍や 1.5 倍）に変更した場合の軸受性能についても予測してみた。軸回転速度 n は表 2 に示す範囲で変化させたに過ぎないが、いずれの場合も繰り返し収束計算の過程で数値的に発散することなく妥当な性能予測値が得られた。これに対し、混合距離を用いる従来の乱流 THL では、表 2 に示す軸受性能予測値の最終解を得るだけでも数値解析プログラムに何度も手を加える必要があった。このように、本乱流 THL モデルは、3.5 節の手順に従い数値解析プログラムを開発すれば軸受性能を安定的に予測できるという特徴を有しており、今後、従来の乱流 THL モデルに取って代わり、乱流すべり軸受設計への応用範囲を広げていくと考える。

5. 結 言

混合距離を用いる従来の 3 次元乱流熱流体潤滑モデルに基づく数値解析プログラムは、軸受性能予測値を安定的に得ることが困難であるという問題を有していた。本研究では、この解決を目的とし、油膜流れが層流状態を保つとする従来の熱流体潤滑モデルに、軸受近似を適用した低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを組み合わせた 3 次元乱流熱流体潤滑モデルを新たに提案した。この新しいモデルに基づく数値解析プログラムによれば軸受性能予測値を安定的に得ることができる。

本 3 次元乱流熱流体潤滑モデルにより、Taniguchi ら (Taniguchi, et al., 1990) が実験対象とした大型高速ティルティングパッドジャーナル軸受の軸受パッド表面の最高温度、最小油膜厚さ、しゅう動損失について予測値を求め、混合距離を用いる従来の 3 次元乱流熱流体潤滑モデル (Tanaka and Hatakenaka, 2004) による予測値および実測値との比較を行うことにより評価を行った結果、本モデルは次の特徴を有することが分かった。

- ・ 軸回転速度が小さいうちは、本 3 次元乱流熱流体潤滑モデルを適用しても、油膜流れの状態が層流であるとする従来の 3 次元熱流体潤滑モデルを適用しても、軸受性能の予測値に差はない。
- ・ 軸回転速度の上昇とともに油膜流れの状態が層流から乱流に徐々に遷移するにつれて、軸受性能予測値に乱流化の影響が顕在化する。
- ・ 本 3 次元乱流熱流体潤滑モデルを適用すると、軸回転速度の上昇とともに軸受パッド表面最高温度がいったん減少した後に再び増加に転じるという、いわゆる、温度の腰折れを再現できる。
- ・ 油膜流れの状態が乱流化すると、最小油膜厚さは増加する。しゅう動損失は格段に増大する。
- ・ 軸回転速度に対する軸受性能予測値の変化の定性的な傾向は、混合距離を用いる従来の 3 次元乱流熱流体潤滑モデル (Tanaka and Hatakenaka, 2004) による結果と同じである。
- ・ 実測値との一致度は、混合距離を用いる従来の 3 次元乱流熱流体潤滑モデルによる軸受性能予測値と同程度である。

以上により、本 3 次元乱流熱流体潤滑モデルによれば軸受性能を妥当な精度で安定的に予測できるので、軸受油膜の乱流化をとまなう大型高速ティルティングパッドジャーナル軸受の今後の設計にはこの新しいモデルが従来のモデルに取って代わりうる結論できる。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、東京大学名誉教授 田中正人先生 より多岐にわたる助言をいただいた。ここに謹んで謝意を表する。

文 献

- 青木弘，原田正躬，乱流域におけるジャーナル軸受の流体潤滑理論，潤滑，Vol. 16, No. 5 (1971), pp. 348–356.
- 阿倍賢一，長野靖尚，近藤継男，はく離・再付着を伴う乱流場への適用を考慮した $k-\varepsilon$ モデル，日本機械学会論文集 B 編，Vol. 58, No. 554 (1992), pp. 3003–3010.
- 数値流体力学編集委員会編，数値流体力学シリーズ 3 乱流解析(1995a)，pp. 21–52.
- 数値流体力学編集委員会編，数値流体力学シリーズ 3 乱流解析(1995b)，pp. 231–232.
- 日本トライボロジー学会編，トライボロジーハンドブック(2001)，p. 25.

- Jones, W. P. and Launder, B. E., The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, Issue 2 (1972), pp. 301–314.
- 加藤孝久, 堀幸夫, $k-\varepsilon$ モデルを用いたジャーナル軸受の乱流潤滑理論, 潤滑, Vol. 28, No. 12 (1983), pp. 907–914.
- Ng, C. W. and Pan, C. H., A Linearized Turbulent Lubrication Theory, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Basic Engineering, Vol. 87, No. 1 (1965), pp. 675–688.
- Pinkus, O., Thermal Aspects of Fluid Film Tribology (1990), p. 207, ASME Press.
- Safar, Z. and Szeri, A. Z., Thermohydrodynamic Lubrication in Laminar and Turbulent Regimes, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Lubrication Technology, Vol. 96, No. 1 (1974), pp.48–56.
- Tanaka, M., Thermohydrodynamic Performance of a Tilting Pad Journal Bearing with Spot Lubrication, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Tribology, Vol. 113, No. 3 (1991), pp. 615–619.
- Tanaka, M. and Hatakenaka, K., Turbulent Thermohydrodynamic Lubrication Models Compared with Measurements, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J, Journal of Engineering Tribology, Vol. 218, No. 5 (2004), pp. 391–399.
- 田中正人, 畠中清史, すべり軸受の熱流体潤滑モデル, トライボロジスト, Vol. 49, No. 9 (2004), pp. 714–719.
- Taniguchi, S., Makino, T., Takeshita, K. and Ichimura, T., A Thermohydrodynamic Analysis of Large Tilting-Pad Journal Bearing in Laminar and Turbulent Flow Regimes with Mixing, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Tribology, Vol. 112, No. 3 (1990), pp. 542–550.

References

- Aoki, H. and Harada, M., Turbulent Lubrication Theory for Full Journal Bearings, Journal of Japanese Society of Tribologists, Vol. 16, No. 5 (1971), pp. 348–356 (in Japanese).
- Abe, K., Nagano, Y. and Kondoh, T., An Improved $k-\varepsilon$ Model for Prediction of Turbulent Flows with Separation and Reattachment, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B, Vol. 58, No. 554 (1992), pp. 3003–3010 (in Japanese).
- Editorial Committee of Computational Fluid Dynamics ed., Computational Fluid Dynamics Series 3; Analysis of Turbulent Flows (1995a), pp. 21–52, University of Tokyo Press (in Japanese).
- Editorial Committee of Computational Fluid Dynamics ed., Computational Fluid Dynamics Series 3; Analysis of Turbulent Flows (1995b), pp. 231–232, University of Tokyo Press (in Japanese).
- Japanese Society of Tribologists ed., Tribology Handbook (2001), p. 25, Yokendo Ltd. (in Japanese).
- Jones, W. P. and Launder, B. E., The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, Issue 2 (1972), pp. 301–314.
- Kato, T. and Hori, Y., Turbulent Lubrication Theory Using $k-\varepsilon$ Model for Journal Bearings, Journal of Japanese Society of Tribologists, Vol. 28, No. 12 (1983), pp. 907–914 (in Japanese).
- Ng, C. W. and Pan, C. H., A Linearized Turbulent Lubrication Theory, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Basic Engineering, Vol. 87, No. 1 (1965), pp. 675–688.
- Pinkus, O., Thermal Aspects of Fluid Film Tribology (1990), p. 207, ASME Press.
- Safar, Z. and Szeri, A. Z., Thermohydrodynamic Lubrication in Laminar and Turbulent Regimes, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Lubrication Technology, Vol. 96, No. 1 (1974), pp.48–56.
- Tanaka, M., Thermohydrodynamic Performance of a Tilting Pad Journal Bearing with Spot Lubrication, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Tribology, Vol. 113, No. 3 (1991), pp. 615–619.
- Tanaka, M. and Hatakenaka, K., Turbulent Thermohydrodynamic Lubrication Models Compared with Measurements, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J, Journal of Engineering Tribology, Vol. 218, No. 5 (2004), pp. 391–399.
- Tanaka, M. and Hatakenaka, K., Thermo-Hydrodynamic Lubrication Model of Journal Bearings, Journal of Japanese Society of Tribologists, Vol. 49, No. 9 (2004), pp. 714–719 (in Japanese).
- Taniguchi, S., Makino, T., Takeshita, K. and Ichimura, T., A Thermohydrodynamic Analysis of Large Tilting-Pad Journal Bearing in Laminar and Turbulent Flow Regimes with Mixing, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Tribology, Vol. 112, No. 3 (1990), pp. 542–550.