非線形バネ要素を含む剛体リンク機構により支持される構造物の
過渡応答への非線形バネ特性の影響高阪 文彦^{*1}, 井上 剛志^{*2}, 高木 賢太郎^{*2}**An influence of nonlinear restoring force characteristics on transient response of a structure supported by rigid link mechanics including nonlinear springs**Fumihiko KOSAKA^{*1}, Tsuyoshi INOUE^{*2} and Kentaro TAKAGI^{*2}^{*1} Mitsubishi Motors Corporation

1 Nakashinkiri, Hashime-cho, Okazaki-shi, Aichi 444-8501, Japan

^{*2} Dept. of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8603, Japan

Received 14 July 2015

Abstract

The demands for comfort vehicle are getting increased in these years. On the other hand, the demands for the weight reduction for low fuel consumption are also increasing. In order to achieve these demands, the most efficient way is to reduce the input to the vehicle body. For reducing the input from road surface to the vehicle body, the suspension plays very important roles. So far, many literatures written about reduction of the input by the suspension have been reported. However, there are less papers written about the influence of nonlinear restoring force of the suspension component such as the shock absorber and the suspension bush. Typically, time domain behavior like harshness has large displacement. Therefore, the influence of the nonlinear restoring forces is not negligible. In this paper, the influence of the nonlinear restoring force in time domain is presented. For simplicity, two dimensional model which consists of rigid links connected by the nonlinear springs and elastic beam is used. On the model, the restoring force characteristic of an actual suspension bush is taken into account to set the range of the design space for the nonlinear restoring force of springs. The instantaneous maximum beam energy is maximized and minimized in order to show the influence of the nonlinear restoring force of springs. The maximization and minimization are conducted using local optimization method by the use of the sensitivity with respect to the nonlinear restoring force coefficient. Besides, the mechanism of the change of the instantaneous maximum beam energy is discussed from the point of view of energy flow. Finally, the influence in different input characteristics is investigated by changing the speed passing over a protrusion.

Key words : Nonlinear dynamics, Multi body dynamics, Sensitivity analysis, Energy flow**1. 緒 言**

近年、自動車の快適性への要求は年々高くなってきている一方で、低燃費化のための重量低減の要求も高くなっている。そのような要求に応える設計をするためには、車体への入力を低減することが最も効率的である。路面により強制変位されたタイヤの振動がサスペンションへ伝わり、その振動が車体への入力となることから、その伝達経路におけるサスペンションは車体の入力低減に対して重要な役割を果たしている。

れ剛体リンク b, c, d と, R 端で弾性梁の結合点 A, B, C と並進バネおよび回転バネで結合されている．簡単のため, バネ 2~7 は並進方向にのみ非線形復元力を有し, 回転方向は線形復元力で表せるとする．入力は, 剛体リンク a の L 端の X 方向, Y 方向にそれぞれつけられた線形バネと減衰要素の他端 GD を強制変位する．

リンク a の長さ $l_a = 600$ mm, 単位長さあたりの質量 $m_a = 5.1$ kg/m, リンク $b \sim d$ の単位長さあたりの質量 $m_b \sim m_d = 2.1$ kg/m, リンク $e \sim f$ の単位長さあたりの質量 $m_e \sim m_g = 1.7$ kg/m であり, リンク結合位置は $\mathbf{r}_2 = \{200, 130\}$ mm, $\mathbf{r}_3 = \{250, -60\}$ mm, $\mathbf{r}_4 = \{120, -110\}$ mm である．バネ 1 の並進線形バネ剛性は X, Y 方向共に $k_1 = 200$ N/mm, 減衰要素 1 の並進方向に関する減衰は X, Y 方向共に $c = 0.1$ Ns/mm である．本論文ではバネの非線形復元力特性に傾注するためバネ 2~7 の線形復元力特性は固定し, それらの並進線形バネ剛性は $k_2 \sim k_7 = 1.5 \times 10^4$ N/mm, 回転バネ剛性は $k_{\theta 2} \sim k_{\theta 7} = 3.0 \times 10^5$ Nmm/rad である．弾性梁はヤング率 $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, 密度 $\rho = 7860$ kg/m³, 長さ $L = 400$ mm, 幅 $b = 50$ mm, 厚さ $h = 10$ mm, モーダル減衰係数は全てのモードで同じとし $\eta = 0.04$ である．点 GD の強制変位 $\mathbf{u}_{GD}$ は突起乗り越しを想定した式 (1)(2) を用いる．

$$\mathbf{u}_{GD} = \begin{Bmatrix} \frac{R}{2} \sin 2\varphi \\ R \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{R - v\tau}{R} \right) \quad (2)$$

ここで, τ は強制変位の開始時刻を 0 とした時刻であり, 突起の高さ R は 20 mm とする． v は突起乗り越し時の乗り越し速度である．

3. 運動方程式

図 1 に示した系の運動方程式をマルチボディダイナミクスの定式化に基づき導出する．一般化座標として, 剛体リンクの位置, 姿勢および弾性梁のモーダル座標系を用い, 剛体リンク $a \sim d$ 間の結合を拘束として取り扱う．

3.1 一般化座標

3.1.1 剛体リンク

各剛体リンクの重心において局所座標をとり, 大域座標 $O-XY$ における局所座標の位置および姿勢を一般化座標とする．剛体リンク a を例にとると, 剛体リンク a の一般化座標 $\mathbf{q}_a$ は次のように表される．

$$\mathbf{q}_a = \{x_a \ y_a \ \theta_a\}^T \quad (3)$$

ここで, x_a, y_a はそれぞれ剛体リンク a の重心の X 座標, Y 座標であり, θ_a は剛体リンク a の姿勢である．すべての剛体リンクの一般化座標 $\mathbf{q}$ は次のように表される．

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{q}_b^T \ \mathbf{q}_c^T \ \mathbf{q}_d^T \ \mathbf{q}_e^T \ \mathbf{q}_f^T \ \mathbf{q}_g^T\}^T \quad (4)$$

3.1.2 弾性梁

弾性梁の変位は, 弾性梁の剛性が十分に高くその振動振幅が微小であり, 両端単純支持梁の線形化された運動方程式より導出した実固有モードの重ね合わせで表せるとする．弾性梁の z 方向たわみ変位 w をモード座標で以下のように表す．

$$w = \sum_r \phi_r \xi_r \quad (5)$$

ξ_r は r 次モードのモード振幅, ϕ_r は r 次モードのモード形状であり, 両端単純支持の梁では次式である．

$$\phi_r(x) = \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (6)$$

モード振幅の一般化座標 $\boldsymbol{\xi}$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots\}^T \quad (7)$$

3.2 局所座標から大域座標への座標変換

剛体リンクに固定された局所座標で表されるベクトルは上付き (l) で表すとする。例えば、リンク a の重心からリンク a の L 端へのベクトル $s_{aL}^{(l)}$ は次のようになる。

$$s_{aL}^{(l)} = \left\{ \frac{-l_a}{2} \ 0 \ 0 \right\}^T \quad (8)$$

添え字 aL は剛体リンク a の L 端を意味し、以降同様な表記で剛体リンクの端点を表す。式 (8) において、ベクトルの第 1, 第 2 成分はそれぞれ局所座標系における x, y 座標を示す。第 3 成分は剛体リンクの一般化座標と次元を同じにして表記を簡単にするために便宜上用いる。(したがって、局所座標系では常に 0 である。) 局所座標系で表された式 (8) は剛体リンク a の座標変換マトリクス A_a を用いて大域座標 $O-XY$ での位置ベクトル s_{aL} へ変換される。

$$s_{aL} = A_a s_{aL}^{(l)} \quad (9)$$

$$A_a = \begin{bmatrix} \cos \theta_a & -\sin \theta_a & 0 \\ \sin \theta_a & \cos \theta_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

3.3 拘束

リンク a, b, c, d 間の拘束は次のように表される。

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b + s_{bL} - \mathbf{q}_a - \Theta_{ab} \\ \mathbf{q}_c + s_{cL} - \mathbf{q}_a - \Theta_{ac} \\ \mathbf{q}_d + s_{dL} - \mathbf{q}_a - \Theta_{ad} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Θ_{ab} は剛体リンク a と剛体リンク b の無荷重時の平衡位置における相対角を表すベクトルであり、剛体リンク a の平衡姿勢 θ_{0a} 、剛体リンクの平衡姿勢 θ_{0b} を用いて次のように表される。

$$\Theta_{ab} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{0b} - \theta_{0a} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Θ_{ac} , Θ_{ad} に関しても同様である。

本論文で検討するモデルにおいては、剛体リンク a~d を一つの剛体として扱うことも可能であるが、ピンジョイントなどの拘束を有する場合なども考慮し、剛体リンク a~d の結合を拘束として取り扱う。

3.4 バネによる復元力

並進方向のバネとして平衡位置に関して対称で等方性な復元力を有する非線形バネを考える。このような非線形特性を持つ様々なバネが考えられるが、簡単のため、1 次と 3 次関数により表される非線形バネを考える。その際の復元力のポテンシャルエネルギー V は次のように表される (山本, 石田, 2001)。

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{4}\alpha r^4 \\ r^2 &= d_x^2 + d_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 k は線形バネのバネ定数、 α は 3 次の非線形復元力係数である。 d_x, d_y はバネの相対変位ベクトル $\mathbf{d} = \{d_x \ d_y \ d_\theta\}^T$ の X, Y 成分である。相対変位ベクトルは一般化座標を用いて表され、例えばバネ 2 における剛体リンク b に対する剛体リンク e の相対変位ベクトル $\mathbf{d}_2$ は次のように表される。

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{q}_e + \mathbf{s}_{eL} - (\mathbf{q}_b + \mathbf{s}_{bR}) \quad (14)$$

X 方向, Y 方向の復元力 f_x, f_y はそれぞれ式 (13) をバネが取り付けられた点の X, Y 座標で偏微分することにより求められ最終的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -kd_x - \alpha (d_x^3 + d_x d_y^2) \\ f_y &= -kd_y - \alpha (d_x^2 d_y + d_y^3) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また, 回転方向のバネは線形な回転バネとしており, そのバネ定数 k_θ とすると, 復元モーメント f_θ は次式となる。

$$f_\theta = -k_\theta d_\theta \quad (16)$$

3.5 系の運動方程式

各剛体リンクにかかる力およびモーメントと, 弾性梁へかかる力およびモーメントの動的釣り合いより系の運動方程式が次式のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{,q}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{F}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{m}_\xi \ddot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{F}_\xi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{c}_\xi \dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{k}_\xi \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここで, $\mathbf{M}_q$ は剛体リンクの質量マトリクス, $\mathbf{F}_q$ は剛体リンクを結合しているバネ 1 からバネ 7 による力と減衰要素 1 による力であり, 剛体リンクの位置, 速度および弾性梁の振動振幅の関数である。式 (17) の上式左辺第 2 項 $\Phi_{,q}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}$ は拘束式 (11) による拘束力をラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて表している。ここで, $\Phi_{,q}$ は拘束式 (11) のヤコビマトリクスである。表記 $x_{,y}$ は偏微分 $\partial x / \partial y$ を表し, 以降も同表記は偏微分を示す。 $\mathbf{m}_\xi, \mathbf{c}_\xi, \mathbf{k}_\xi$ はそれぞれ弾性梁のモーダル質量マトリクス, モーダル減衰マトリクス, モーダル剛性マトリクスであり, $\mathbf{F}_\xi$ は剛体リンクと弾性梁との間のバネ 5 からバネ 7 による力をモーダル座標で表したベクトルで, 剛体リンクの位置と弾性梁のモード振幅の関数である。

式 (17) は同時に拘束式 (11) を満たさなければならない微分代数方程式である。本論文においては, その微分代数方程式をニューマーク β 法 (Gavrea et al., 2005) を用いて数値積分する。

4. 弾性梁エネルギーの過渡応答

自動車の性能のうち, 時間領域で評価される性能はハーシュネスや瞬間最大応力などがあげられる。それらの一般的な評価として, 本論文ではエネルギー最大値 (弾性梁の振動エネルギーの過渡応答の最大値) を用いる。振動エネルギーで評価をする利点は, エネルギーフローの観点で解析を行うことができることである。エネルギーフローの観点で解析を行うことにより, 図 1 のモデルのような複雑な系における非線形挙動においても振動エネルギーに対する各結合点および減衰の寄与を確認することができ, 系の運動の変化の物理的解釈が容易となる。

4.1 弾性梁エネルギーの過渡応答の感度

弾性梁エネルギーの過渡応答 $E(t)$ は次式で表される。

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{m}_\xi \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{k}_\xi \boldsymbol{\xi} \quad (18)$$

評価関数 J_{obj} はエネルギー最大値とし, 式 (19) で表される。

$$J_{obj} = \max \{E(t)\} \quad (19)$$

本論文では, エネルギー最大値に対するバネの非線形復元力特性の影響を, エネルギー最大値を最大化および最小化することにより示す。最大化および最小化は感度を用いた局所最適化により行う。設計変数を μ とすると, 設計変数に対する弾性梁エネルギーの過渡応答の感度 $E_{,\mu}(t)$ は式 (20) となる。

$$E_{,\mu}(t) = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{,\mu}^T \mathbf{m}_\xi \dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\xi}_{,\mu}^T \mathbf{k}_\xi \boldsymbol{\xi} \quad (20)$$

したがって、評価関数である式 (19) の感度 $J_{obj,\mu}$ は式 (21) となる。

$$J_{obj,\mu} = E_{,\mu}(t_{max}) \quad (21)$$

ここで、 t_{max} はエネルギー最大値となる時刻である。

式 (20) において、弾性梁のモード振幅 ξ 、 ξ は運動方程式 (17) を数値積分することにより得られるが、弾性梁のモード振幅の感度 $\xi_{,\mu}$ 、 $\xi_{,\mu}$ は未知である。本論文では、感度 $\xi_{,\mu}$ 、 $\xi_{,\mu}$ を数値積分によって直接求める方法を用いる (Neto et al., 2009)。弾性梁のモード振幅の感度を求めるために、運動方程式 (17) および拘束式 (11) を設計変数で偏微分する。感度の変数についてまとめると次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}}_{,\mu} + \mathbf{\Phi}_{,q}^T \boldsymbol{\lambda}_{,\mu} &= \mathbf{G}_q \left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}_{,\mu}, \dot{\mathbf{q}}_{,\mu}, \boldsymbol{\xi}_{,\mu} \right) \\ \mathbf{m}_{\xi} \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{,\mu} &= \mathbf{G}_{\xi} \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{q}_{,\mu}, \boldsymbol{\xi}_{,\mu}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_{,\mu} \right) \\ \mathbf{\Phi}_{,\mu} \left(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{,\mu} \right) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式 (22) において $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\lambda}$ は式 (17) を数値積分した結果であり既知である。したがって、式 (22) は $\mathbf{q}_{,\mu}, \boldsymbol{\xi}_{,\mu}, \boldsymbol{\lambda}_{,\mu}$ に関する微分代数方程式であり、式 (17) と同様にニューマーク β 法を用いて数値積分を行うことで $\xi_{,\mu}, \xi_{,\mu}$ が得られる。

4.2 弾性梁エネルギーに対する各結合点および減衰の寄与

パネの非線形復元力特性による弾性梁エネルギーの過渡応答の変化についての考察をエネルギーフローの観点から行う。弾性梁の運動方程式である式 (17) の下式を詳細に記すと次のようになる。

$$\mathbf{m}_{\xi} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{c}_{\xi} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{k}_{\xi} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}_A^T \mathbf{F}_{5\xi} + \boldsymbol{\phi}_B^T \mathbf{F}_{6\xi} + \boldsymbol{\phi}_C^T \mathbf{F}_{7\xi} \quad (23)$$

ここで、 $\boldsymbol{\phi}_A$ は点 A における弾性梁のモード形状ベクトルを並べたモード形状マトリクスであり、 $\mathbf{F}_{5\xi}$ は点 A において剛体リンクと弾性梁を結合している非線形パネ 5 による力である。点 B における $\boldsymbol{\phi}_B$ 、 $\mathbf{F}_{6\xi}$ 、点 C における $\boldsymbol{\phi}_C$ 、 $\mathbf{F}_{7\xi}$ についても同様である。式 (23) の左から $\dot{\boldsymbol{\xi}}^T$ をかけ、式 (18) の時間微分の関係を用いると次のパワーバランス方程式が得られる。

$$\dot{E}(t) = \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\phi}_A^T \mathbf{F}_{5\xi} + \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\phi}_B^T \mathbf{F}_{6\xi} + \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\phi}_C^T \mathbf{F}_{7\xi} - \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{c}_{\xi} \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (24)$$

また、式 (24) を時刻 T まで積分すると、時刻 T における弾性梁エネルギーと時刻 T までに弾性梁になされた仕事量に関する次式が得られる。

$$E(T) = \int_0^T \left(\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\phi}_A^T \mathbf{F}_{5\xi} + \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\phi}_B^T \mathbf{F}_{6\xi} + \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\phi}_C^T \mathbf{F}_{7\xi} - \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{c}_{\xi} \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) dt \quad (25)$$

式 (24)、(25) はそれぞれ弾性梁への各結合点からの入力パワー寄与、仕事量寄与を表している。右辺第 1 項は点 A からの寄与を表し、右辺第 2 項、第 3 項はそれぞれ点 B、点 C の寄与を表している。右辺第 4 項は弾性梁の減衰による寄与である。

5. 解 析 結 果

図 1 のモデルにおいて、エネルギー最大値に対するパネの非線形復元力特性の影響について検討を行う。パネ 2~7 における式 (13) で表される 3 次の非線形復元力係数 α_i ($i = 2 \sim 7$) を設計変数として考える。まず、エネルギー最大値の最大化および最小化をする際に用いる感度について示す。次に、現実的な非線形復元力特性の設計範囲においてエネルギー最大値がどの程度変化するかを示すために、自動車のサスペンションブッシュを想定した非線形復元力特性の範囲においてエネルギー最大値を最大化および最小化する。その際のエネルギー最大値の変化のメカニズムをエネルギーフローの観点より考察する。最後に、入力の変動に対する影響の例として突起乗り越し速度を変化させた場合について検討し、設計的な観点において考察を行う。

5.1 エネルギーの過渡応答に対する各バネの非線形特性の感度

式 (17)(18) を用いて全てのバネの復元力特性が線形の場合 ($\alpha_i = 0, i = 2, 3, \dots, 7$) における弾性梁エネルギーの過渡応答を求めた結果を図 2(a) に示す。式 (2) の突起乗り越し速度 v は 6000 mm/sec とした。これは、後述において示すエネルギー最大値がほぼ最大となる突起乗り越し速度である。図 2(a) において、0.004 秒付近で突起乗り越しを開始した後の弾性梁エネルギーの過渡応答は 0.015 秒付近の時刻 t_{max} で最大となり、その後は時間とともに減衰していることが確認できる。

次に、この場合の弾性梁エネルギーの過渡応答に対する各バネの非線形特性の感度の時刻歴を式 (22)(20) を用いて求めた結果を図 2(b) に示す。図 2(b) の縦軸である感度は、バネの非線形復元力特性を硬くした際に、弾性梁エネルギーが増大するときを正で示し、逆に減少するときを負で示している。すなわち、時刻 t_{max} においては、図 2(b) よりバネ 2, 5 の感度が正の方向に高く、バネ 4, 7 の感度が負の方向に高いため、バネ 2, 5 を漸軟な非線形復元力特性とし、バネ 4, 7 を漸硬な非線形復元力特性とすることにより時刻 t_{max} におけるエネルギー最大値を低減できることが予想される。

また、感度は図 2(b) のように時間とともに変動する。そのため、ある一つのバネの非線形復元力特性を変更すると、弾性梁エネルギーの過渡応答が低減する時刻もあるが、逆に増大する時刻もある。例えば、バネ 4, 7 の復元力の非線形性を硬くすることは時刻 t_{max} のピークを低減できるが、同時に 0.008 秒付近のピークが増大してしまうことが予想される。

Fig. 2 Time history in the case of linear restoring force characteristics : (a) Enforced displacement and vibration energy response of the beam. (b) Energy sensitivities with respect to each 3rd order nonlinear coefficient α_i .

5.2 バネの非線形復元力特性を設計変数としたエネルギー最大値の最大化および最小化

バネの復元力の非線形特性を設計変数とし、自動車のサスペンションブッシュを想定した設計範囲において最適化によりエネルギー最大値の最大化および最小化を行い、エネルギー最大値が現実的な設計範囲においてどの程度変化するかを調べる。その際の最適化においては感度を用いた局所最適化を行い、最適化手法は MMA (Krister, 1987) を用いた。

5.2.1 非線形復元力係数の設計範囲

設計範囲は、自動車のサスペンションブッシュを想定し漸硬形の非線形性のみを考える。自動車のサスペンションは、本論文で検討しているような突起乗り越し時のハーシュネスだけでなく、ロードノイズなどの線形解析で検討される微小変位の現象に対しても重要な役割を担っている。非線形性が強すぎる場合には、微小変位の振動に対しても非線形性の影響が現れ予期せぬ振動が発生することが考えられるため、非線形性の強さの上限としては、

ロードノイズのような微小振動における変位域では線形とみなせる程度の弱い非線形復元力特性とする。微小変位域とみなす範囲は、本論文と同様なモデルを用いてロードノイズを想定した解析を行った前報（高阪他，2014）の結果を参考にする。その解析におけるバネの相対変位の最大値は約 0.2 mm 程度であるので，微小変位域は -0.2 mm ~ 0.2 mm と設定する。そのような設計範囲として，3 次係数の上限は $\alpha_i = 20000 \text{ N/mm}^3$ ，下限は $\alpha_i = 0 \text{ N/mm}^3$ （すなわち，線形復元力特性）とする。図 3 に設計範囲の上限と下限の復元力特性をそれぞれ示す。

Fig. 3 Nonlinear restoring force characteristics at lower bound (blue dashed) and upper bound (red solid) of design variables.

5.2.2 非線形復元力特性の最適化結果

図 4 に突起乗り越し速度 6000 mm/sec における，バネの復元力が線形の場合（以降，線形ケース），エネルギー最大値を最大化した場合（以降，最大化ケース），エネルギー最大値を最小化した場合（以降，最小化ケース）の弾性梁エネルギーの過渡応答を示す。また，表 1 に最大化ケースおよび最小化ケースのバネ 2～7 の非線形復元力係数を示す。それぞれのケースにおけるエネルギー最大値は図 4 において，それぞれ i)，ii)，iii) で示された点であり，最大化ケース，最小化ケースは線形ケースに比べ約 $\pm 10\%$ の変動をしており，その変動幅は小さくない。また，それぞれのエネルギー最大値となる時刻は若干異なっていることがわかる。

Fig. 4 Transient energy response at $v = 6000 \text{ mm/sec}$ in the case of the linear restoring force characteristics (blue solid), the optimized nonlinear restoring force characteristics obtained by maximization (red dashed) and minimization (green dotted).

Table 1 Optimized 3rd order nonlinear restoring force coefficients α_i at $v = 6000$ mm/sec.

	α_2 [N/mm ³]	α_3 [N/mm ³]	α_4 [N/mm ³]	α_5 [N/mm ³]	α_6 [N/mm ³]	α_7 [N/mm ³]
Maximize	20000.	0.	0.	20000.	0.	0.
Minimize	0.	20000.	20000.	0.	20000.	20000.

次に、大きな非線形復元力が発生しているバネおよびその時刻を確認するために、図 5(a) に最大化ケース、図 5(b) に最小化ケースにおける各バネの相対変位の絶対値を示す。表 1 の結果より、最適解において非線形性を有するバネの非線形復元力係数は設計範囲の上限 ($\alpha = 20000$ N/mm³) となっている。その非線形復元力係数のバネにおいて大きな非線形復元力が発生する範囲として、バネの相対変位の絶対値が 0.25 mm 以上の範囲に着目する。最大化ケースの図 5(a) においては表 1 よりバネ 2, 5 が非線形性を有しているの、エネルギー最大値となる時刻 t_{max} までの間にこれらのバネの復元力が非線形領域となる時刻は 0.009 秒, 0.012 秒, 0.015 秒付近である。また、最小化ケースの図 5(b) においては、バネ 3, 4, 6, 7 が非線形性を有しているの、0.008 秒から 0.011 秒の間で非線形復元力が発生していることがわかる。

まず、最小化ケースに注目する。図 4 より、最小化ケースにおいて大きな非線形復元力が発生している時刻 (図 5(b) の 0.008 秒から 0.011 秒の間) で弾性梁エネルギーの過渡応答が線形ケースに比べ大きく変化していることが確認できる。また、その後のエネルギー最大値となる時刻 t_{max} において図 5(b) では大きな非線形復元力は発生しないが図 4 ではエネルギー最大値は線形ケースに比べ小さくなっている。これは、次のようなメカニズムであると考えられる。まず、大きな非線形復元力が発生している時刻 (0.008 秒から 0.011 秒の間) において系の運動が線形ケースに比べ変化をする。言い換えると、その後の時刻の自由振動の初期値が変化する。その結果、その後の時刻において、最小化ケースに大きな非線形復元力は発生しないがエネルギー最大値に差が表れることになる。

一方、最大化ケースにおいても、最小化ケースの場合と同じように、エネルギー最大値となる時刻 t_{max} より前の時間で発生した非線形復元力により系の運動が変化し、その後の自由振動が変化した結果、エネルギー最大値が増加していると考察できる。それに加え、最大化ケースにおいては、時刻 t_{max} においても非線形復元力が発生しており、そのため時刻 t_{max} における弾性梁への入力が大きくなり、これによってもエネルギー最大値が増加していると考えられる。

最大化ケースおよび最小化ケースにおいて、非線形復元力により系の運動がどのように変化し、どのようにエネルギー最大値が変化するかについて、次節で弾性梁のエネルギーフローの変化に着目し考察を行う。

Fig. 5 Time histories of the absolute relative displacements of the each spring: (a) the case of the maximized. (b) the case of the minimized.

5.3 バネの非線形復元力によるエネルギーフローの変化についての考察

弾性梁エネルギーおよびその時間微分は式 (24)(25) で示したように、弾性梁への仕事量および入力パワーに関して、各結合点 A, B, C および減衰の寄与に分けることができる。それらの寄与の各結合点ごとの比較を図 6 に示す。ここで、減衰による寄与は非常に小さいため無視する。図 6 において、線形ケースは実線、最大化ケースは破線、最小化ケースは点線で示されている。また、それぞれの差を明確にするために線形ケースと最大化ケースおよび最小化ケースの差をそれぞれの図の下図に示している。

まず、最小化ケースに注目する。図 6(a)(c)(e) の入力パワーの比較において、最小化ケースで大きな非線形復元力が発生した時刻 (0.008 秒から 0.011 秒の間) において、各結合点とも線形ケースに対して入力パワーが変動していることがわかる。特に、図 6(e) に示す点 C からの入力パワーは、点 C へつながる剛体リンク g の両端のバネ 4, 7 において大きな非線形復元力を発生しているため、その変動が大きい。また表 1 より、最小化ケースにおいては点 A につながるバネ 2, 5 は線形な復元力特性であるが、点 A においても入力パワーが変動している。これは、バネの非線形復元力により系全体の運動が変化していることを表している。

非線形復元力による入力パワーの変動により、入力パワーの積分値である仕事量が変化する。図 6(b)(d)(f) の各点からの仕事量の比較より、時刻 t_{max} において点 B からの仕事量が低減しており、これが最小化ケースのエネルギー最大値の低減に大きく寄与している。また、大きな入力パワーの変動がみられた点 C による仕事はエネルギー最大値に対し寄与が小さいことが図 6(f) よりわかる。すなわち、点 C に関連するバネ 4, 7 の非線形復元力は、点 B からの仕事量をエネルギー最大値となる時刻 t_{max} で低減するように系全体の運動を変化させる役割をしていると推察できる。

最大化ケースにおいても、図 6(a)(c)(e) の入力パワーの比較においては、非線形復元力が最初に発生した 0.009 秒以降で線形ケースに対して入力パワーが変動している。その入力パワーの変動は、非線形バネに関連する点 A だけでなく、その他の線形バネに関連する結合点でも確認でき、非線形復元力により系全体の運動が変化していることがわかる。また、図 6(b)(d)(f) の各点からの仕事量の比較においては、時刻 t_{max} において点 A, B の仕事量が増加している。非線形バネ 2, 5 に関連する点 A からの寄与だけでなく、線形バネでつながれている点 B からの寄与も大きくなっているのは、最大化ケースにおいても、非線形復元力による系全体の運動の変化がエネルギー最大値の変化に大きく寄与しているからと考えられる。

このように、サスペンションのような複雑な系においては、バネの非線形復元力のエネルギー最大値への影響は、局所的に復元力が大きくなることではなく、系全体の運動が変化することに起因する。言い換えると、ある結合点のバネの非線形復元力特性を変更すると、その影響は、その結合点のみだけでなく他の結合点からの寄与にも現れる。さらに、エネルギー最大値の変化は、エネルギー最大値となる時刻 t_{max} に発生する非線形復元力だけでなく、それ以前の時刻に発生した非線形復元力にも起因する。このような複雑なメカニズムにおいては、それぞれのバネの非線形復元力がエネルギー最大値に対してどのような影響を及ぼすか予測し設計をすることは容易でない。このような場合においては、エネルギー最大値を低減するようなバネの非線形復元力特性の設計を探索することに対し、本論文の感度解析や最適化などは有用な手法である。

5.4 突起乗り越し速度の変化による影響

5.4.1 突起乗り越し速度に対するバネの非線形復元力特性の最適解の変化

本論文で想定している自動車の突起乗り越しの際には、突起の形状や乗り越し速度により、その入力周波数特性は変化する。入力周波数特性が異なると、一般的に励起される各振動モードの振幅および位相の関係が変わることから、その過渡応答も変化する。その際には、バネの非線形復元力の過渡応答への影響も変化することが予想される。そこで、入力に変化した際のバネの非線形復元力の影響について考察を行う。ここでは突起乗り越し速度の変化を例に考える。突起乗り越し速度 2000 ~ 10000 mm/sec において最大化ケースおよび最小化ケースとなる非線形復元力係数を図 7 に示す。最適化は各突起乗り越し速度ごとに独立に行っているため、図 7 のように各突起乗り越し速度ごとに異なった非線形復元力特性となっている。また、その際のエネルギー最大値を図 8 に示す。図 8 において、実線は線形ケース、破線は最大化ケース、点線は最小化ケースを示している。

図 7 より、バネの非線形復元力係数の最適解は、最大化ケース、最小化ケースともに、ある突起乗り越し速度の範囲でそれぞれ同じ最適解となっている傾向がみられる。例えば、最小化ケースでは、4000 ~ 4500 mm/sec, 5500

Fig. 6 Comparison of the contributions from each point among the linear case (blue solid), the maximized case (red dashed) and the minimized case (green dotted). (a) input power from the point A. (b) work done by the point A. (c) input power from the point B. (d) work done by the point B. (e) input power from the point C. (f) work done by the point C.

～6400 mm/sec などの範囲である．これは，突起乗り越し速度が大きく変わらない場合は，入力周波数特性は大きく変わらないためである．そのような際には，励起される系の振動も大きく変わらず，同様な振る舞いとなるため，その振動に対する最適解が同様な結果となる．

図8より，本論文で検討しているモデルにおいては，突起乗り越し速度 6000 mm/sec 付近でエネルギー最大値が大きくなっていることが確認できる．その速度付近においては最大化ケースと最小化ケースのエネルギー最大値の差が大きくなっている．これは，振動振幅が大きくなるにしたがってバネの復元力に大きな非線形成分が発生するため，系のエネルギーフローの変化に対する影響が大きくなるからであると考えられる．また，図8の突起乗り越し速度が 2000～3000 mm/sec および 7000～8000 mm/sec のあたりにおいては，線形ケースと最小化ケースの結果が同じとなっている．それらの突起乗り越し速度範囲におけるバネの非線形復元力係数を図7(b)で確認すると，全てもしくはほとんどのバネの非線形復元力係数が同時に0となっている．これらは，入力周波数特性によっては，エネルギー最大値となる時刻においてすべてのバネの非線形復元力特性の感度が同符号となるからである．すなわち，入力周波数特性によっては，非線形復元力特性によるエネルギー最大値の低減ができない場合もあることを示している．

5.4.2 バネの非線形復元力特性最適化の設計への応用についての考察

次に，設計的な観点で考察をする．実際の設計をする際には，それぞれのバネごとに一つの非線形復元力特性に固定しなければならない．通常，突起乗り越し時の過渡応答は，その最悪となる場合を問題として対策をする．前節で述べたように，突起乗り越し速度が大きく変わらない場合は，入力周波数特性は大きく変わらず，励起される振動の振る舞いは同様である．そのため，設計上問題となる突起乗り越し速度帯のエネルギー最大値を低減しようとした場合，その問題となる突起乗り越し速度帯におけるある一つの突起乗り越し速度のエネルギー最大値を低減するようなバネの非線形復元力特性を設計すれば，同時にその周辺の突起乗り越し速度帯においてもエネルギー最大値を低減できると考えられる．そこで，本論文のモデルにおいては，突起乗り越し速度 6000 mm/sec 付近のエネルギー最大値を低減することをために，非線形バネの復元力特性を 6000 mm/sec の最適解（すなわち表1に示す非線形復元力特性）に固定した場合を検討する．その際の突起乗り越し速度に対するエネルギー最大値を図9に示す．

図9において，想定どおり 6000 mm/sec 付近のエネルギー最大値が大きく低減できている．その一方，前節で述べた最小化ケースと線形ケースの最適化結果が同一で，それよりエネルギー最大値を低減できない突起乗り越し速度（7000～8000 mm/sec など）では線形ケースより悪化している．しかし，その悪化している突起乗り越し速度のエネルギー最大値は，着目している 6000 mm/sec 付近のエネルギー最大値より小さく，通常，問題とならない．したがって，このバネの非線形復元力特性の設計は良好な設計であるといえる．

このように，本論文で用いた非線形復元力特性の最適化は設計に応用することが可能であり，突起乗り越しの過渡応答を低減する一つの有用な手法である．

6. 結 言

本研究により以下の結論を得た．

1. 弾性梁と非線形バネを含む剛体リンク機構からなるモデルにおいて，弾性梁エネルギーの過渡応答解析を行い，その応答に対するバネの非線形復元力特性の影響を感度解析により示した．
2. 自動車のサスペンションブッシュを想定した非線形復元力の設計範囲において，感度を用いた局所最適化により弾性梁の振動エネルギーの過渡応答の最大値（エネルギー最大値）を最大化および最小化するバネの非線形性の配置の最適解を求め，それらのバネの非線形復元力特性によるエネルギー最大値の変動幅を示した．
3. バネの非線形復元力特性によるエネルギー最大値の変化のメカニズムをエネルギーフローの観点から考察した．エネルギー最大値の変化は，その時刻より前の時刻においてバネの復元力の非線形性により系の運動に変化が生じ，それに起因して系のエネルギーフローの時刻歴全体が変化することにより現われていることを示した．
4. 設計的な観点から，突起乗り越し速度を変化させることにより入力周波数特性を変化させた場合を検討した．突起乗り越し速度によりバネの非線形性の配置の最適解は異なるが，局所的な突起乗り越し速度範囲に

Fig. 7 Optimized 3rd nonlinear restoring force coefficient over passing velocity from 2000 mm/sec to 10000 mm/sec. (a) the maximized case. (b) the minimized case.

Fig. 8 Maximum energy response at the different passing velocity. The case of the linear restoring force characteristics (blue solid). The case of the optimized nonlinear restoring force characteristics obtained at each velocity by the maximization (red dashed) and by the minimization (green dotted).

Fig. 9 Maximum energy response at the different passing velocity. The case of the linear restoring force characteristics (blue solid). The case of the nonlinear coefficients listed table.1 which are obtained at the velocity 6000 mm/sec by the maximization (red dashed) and by the minimization (green dotted).

においては同じ最適解でありつづける複数の速度範囲が現われた。また、このような特徴を持つため、本論文で示したバネの非線形復元力特性によるエネルギー最大値低減は設計へ応用可能であることを示した。

文 献

- Gavrea, B., Negrut, D. and Potra, F.A., The Newmark integration method for simulation of multibody systems: analytical considerations, Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition (2005).
- 平原 道人, 八木 徹, 阿部 智志, 赤津 洋介, ホイールセンタ軌跡傾斜角度とハーシュネス振動との関係に関するメカニズム検討, 自動車技術会学術講演会前刷集 (2000) .
- 高阪 文彦, 井上 剛志, 高木 賢太郎, 構造物を支持する剛体リンクの配置適正化による入力パワー低減, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.819 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0331 .

- Kosaka, F., Mizuno, H., Inoue, T. and Takagi, K., Road noise sensitivity analysis with respect to suspension geometry, Proceedings of the 43rd International Congress on Noise Control Engineering (Inter.noise 2014) (2014).
- Krister, S., The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24 (1987), pp. 359–373.
- 村松 英行, 馬場 広樹, 神野 紘二, 西山 淳, 小林 義明, ハーシュネス振動・過渡音予測技術, 自動車技術会学術講演会前刷集 (2011) .
- Neto, M., Ambrósio, J. and Leal, R., Sensitivity analysis of flexible multibody systems using composite materials components, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 77 (2009), pp. 386–413.
- 山本 敏男, 石田 幸男, 回転機械の力学 (2001) , pp.104–110 , コロナ社 .

References

- Gavrea, B., Negrut, D. and Potra, F.A., The Newmark integration method for simulation of multibody systems: analytical considerations, Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition (2005).
- Hirahara, M., Yagi, T., Abe, S. and Akatsu, Y., Dynamic analysis on harshness vibration reduction by wheel center trajectory control, Proceedings of JSAE Annual Congress (2000) (in Japanese).
- Kosaka, F., Inoue, T. and Takagi, K., Reduction of input power to the structure by the configuration of supporting rigid link mechanics, Transactions of the JSME (in Japanese) , Vol.80, No.819 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0331.
- Kosaka, F., Mizuno, H., Inoue, T. and Takagi, K., Road noise sensitivity analysis with respect to suspension geometry, Proceedings of the 43rd International Congress on Noise Control Engineering (Inter.noise 2014) (2014).
- Krister, S., The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24 (1987), pp. 359–373.
- Muramatsu, H., Baba, K., Jinnno, K., Nishiyama, J. and Kobayashi, Y., Time domain analysis for interior acoustic response, Proceedings of JSAE Annual Congress (2011) (in Japanese).
- Neto, M., Ambrósio, J. and Leal, R., Sensitivity analysis of flexible multibody systems using composite materials components, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 77 (2009), pp. 386–413.
- Yamamoto, T. and Ishida, Y., Linear and nonlinear rotordynamics : Modern treatment and application (2001), pp.104–110, Corona publishing (in Japanese).