質量変化を伴う柔軟多体システムの MBD 解析

楨原 幹十朗^{*1}, 吉川 堯志^{*2}, 菅原 佳城^{*3}

MBD analysis of flexible multibody system with mass loss

Kanjuro MAKIHARA^{*1}, Takashi KIKKAWA^{*2} and Yoshiki SUGAWARA^{*3}^{*1,2} Department of Aerospace Engineering, Tohoku University

6-6-01 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Akita University

1-1 Tegatagakeuenmachi, Akita-shi, Akita 010-0852, Japan

Received 15 September 2015

Abstract

In this paper, we propose a formulation method for flexible multi-body systems with mass loss. The method derives the equation of motion using the velocity transformation method, in consideration of the shift of center-of-mass. There are three research purposes in this paper. The first purpose is to extend the velocity transformation method for describing flexible bodies. Conventional velocity transformation method has only focused on the dynamics of rigid bodies. The restoring force due to flexibility is introduced to the equation of motion as generalized external force. Our proposed method can deal with rigid, elastic, or geometric connections, such as hinge and sliding joints. The second purpose is to formulate flexible multi-body systems with mass loss. Conventional Kane's technique only deals with the dynamics of particles. On the other hand, the proposed method can express the dynamics for the mixed model of particles and rigid bodies, where particle elements express the mass change of the system. The third purpose is to verify the high usefulness of our method for the dynamics simulation of a flying rocket. The rocket is a representative multi-body system whose mass varies. We analyze the flight characteristics, such as pitch angle, for rocket models associated with the variation in stiffness. The simulation indicates that the mass loss greatly affects the dynamics of rockets. The calculation demonstrates a large difference in the flight dynamics between rigid and flexible models.

Key words : Multibody dynamics, Flexible body, Mass loss, Velocity transformation, Rocket

学術用語

$\mathbf{H}$	: 分系の一般化速度をまとめた全体ベクトル	$\mathbf{r}$	: 定数位置ベクトル
$\mathbf{m}^H$	: 分系の質量行列の全体行列	$\tilde{\mathbf{R}}$	: 3×1 行列に外積オペレータを作用させた 3×3 行列
$\mathbf{f}^H$	: 分系の外力ベクトルの全体ベクトル	Φ^x	: 並進方向形状を表すモードベクトルの全体行列
$\mathbf{S}$	: 全系の一般化速度の全体ベクトル	Φ^0	: 回転方向形状を表すモードベクトルの全体行列
$\mathbf{H}_S$	: $\mathbf{H}$ を $\mathbf{S}$ で偏微分した行列	Φ	: Φ^x , Φ^0 をまとめた行列
$\mathbf{H}_{\bar{S}}$	: $\mathbf{H}$ 中の $\mathbf{S}$ と関係のない項	$(\)_{AB}$	: 座標系 A により表された変数
$\mathbf{C}_{AB}$	: 座標系 B から座標系 A への座標変換行列	$(\)'_{AB}$	: 座標系 B により表された変数
$\mathbf{E}_{AB}$	: 座標系 A から見た座標系 B の回転姿勢を表すオイラーパラメータ (4×1 行列)	${}^c(\)_{AB}$	: 座標系 C により表された変数

1. 緒 言

No.15-00504 [DOI:10.1299/transjsme.15-00504], J-STAGE Advance Publication date : 28 January, 2016

^{*1} 正員, 東北大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01)^{*2} 東北大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻^{*3} 正員, 秋田大学大学院 工学資源学研究科 機械工学専攻 (〒010-0852 秋田県秋田市手形学園町 1-1)

E-mail of corresponding author: makihara@ssl.mech.tohoku.ac.jp

近年、ロケットなどの質量変化を伴う大型宇宙構造物は、複雑化、柔軟化する傾向にある。また、質量変化に伴い重心が変化するため、その運動の定式化は困難となる。質量が変化する構造物の運動解析に関する過去の研究(Thomson and Reiter, 1965)(田寺, 1973)は、質量変化に伴う重心の変化を考慮しているが、簡単なモデルにおいても運動方程式の導出に複雑な手順が必要となるため、複雑な多体システムに適用することは困難である。ロケットなどの質量変化を伴う大型宇宙構造物の複雑化に伴い、質量変化を考慮した柔軟多体システムの効率的な運動解析法が必要とされている。

柔軟多体システムの運動解析法の一つに Craig-Bampton 法(Craig and Bampton, 1968)があり、最近でも、Craig-Bampton 法を使った研究(巳谷, 2013)が行われている。Craig-Bampton 法は、構造物全体を部分構造の剛結合、弾性結合により表現し、運動の定式化を行う手法である。同形の構造や対象構造が複数存在する場合でも一回のモデル化のみで済むといった利点を持つが、ジョイント拘束などの幾何学的な拘束には対応できない。

幾何学的な拘束を含む系の運動解析法の一つに、ケイン型運動方程式(Kane, 1961)があり、宇宙構造物の運動解析法として広く使用されている(Kane et al., 1983)。質量が変化する構造物に対する運動解析法として、質点系のケイン型運動方程式を、質量が変化する質点系に適用した手法が提案されており(Ge and Cheng, 1982)、更にそれを柔軟体に適用した手法が提案されている(Banerjee, 2000)。近年では、急激な質量変化を伴う柔軟体の運動解析法も提案されている(Banerjee and Lemak, 2013)。これらの手法を用いれば、質量変化による重心の変化や推進力が、多体システムの運動に与える影響を解析することができる。しかし、質点要素を用いて質量変化部分を表現しているため、ケイン型運動方程式を用いる手法では、数多くの質点要素を用いて系全体を表現する必要がある。多くの質点要素を用いる場合、それぞれについて一つ一つ運動方程式を立てる必要があり、複雑な構造物の定式化には適していない。また、質点要素を用いた表現方法では、一つの要素に回転姿勢の情報がないため、回転に関する拘束には特別な扱いが必要である。更に、トルクを加える場合でも、二つの質点要素に偶力を加えることにより擬似的にトルクを作り出す必要がある。一方、剛体要素を用いれば、一つの要素で回転に関する拘束やトルクを扱うことができる。質量変化部分は質点要素を用いて表現し、他の部分構造は剛体要素を用いて表現した方が、多くの質点要素を用いることなく、より現実に近い形で複雑な構造物をモデル化することができる。しかしながら、従来の手法では質点系と剛体系が混在したような系を扱うことはできない。

複雑に拘束された系の運動解析法の一つとして、Velocity Transformation(Kim and Vanderploeg, 1986)が提案されており、更に、それを柔軟体に適用した手法が提案されている(Lee et al., 1993)。Velocity Transformation は、自由な剛体を拘束したときに生じる速度表現の変化を利用する手法であり、機械的な手順に沿って複雑な構造物の運動の定式化を行うことができるため、最近でも複雑な構造物の運動解析法として使用されている(Joo and Lee, 2013)。また、Velocity Transformation を広く解釈した手法として、速度変換法(田島, 2006)が提案されており、最近でも速度変換法を用いた研究(Suzuki et al., 2012)がおこなわれている。速度変換法は、複雑に拘束された構造物全体(全系)を、運動方程式が既知であるいくつかの系(分系)に分割し、分系の運動方程式を基に全系の運動方程式を導く手法である。部分構造ごとに立てた運動方程式を活用して構造物全体の定式化を行うことができ、複雑な拘束を多く含む系にも対応することができるため、複雑な構造物の定式化に適している。また、ケイン型運動方程式が単一の系しか扱えないのに対し、速度変換法では、系の種類に関係なく、部分構造の運動方程式を用いて定式化を行うことができる。しかし、速度変換法を用いた定式化において、柔軟性や質量変化を考慮する試みは今まで成されていない。

2. 研究の目的

本研究の目的は次の3つである。第1に、ケインの理論(Kane and Levinson, 1985)に基づき、弾性結合により生じる復元力項を一般化外力として追加し、速度変換法を柔軟体に適用可能な形に拡張する。これにより、速度変換法において、部分構造同士の弾性結合を取り扱うことが可能となる。従来の Craig-Bampton 法では、部分構造の剛結合や弾性結合しか扱うことができなかったが、本手法では、剛結合、弾性結合、幾何学的な拘束を含む複雑な柔軟構造物の効率的な定式化が可能となる。

第2に、有限個の剛体要素と質量が変化する質点要素を結合することで、質量が変化する柔軟体を表現し、速度変換法を活用した定式化を行う。従来の Banerjee らの手法では、系全体を質点系として扱う必要があったが、

速度変換法では、系の種類に関係なく、部分構造の運動方程式を用いて定式化を行うことができる。質量変化部分は質点要素を用いて表現し、他の部分構造は、一つの要素で回転に関する拘束やトルクを扱うことのできる剛体要素を用いて表現する。これにより、質量が変化する複雑な柔軟構造物に対して、多くの質点要素を用いることなく、より現実に近いモデルを作成し、運動の定式化を行うことができる。

第3に、有限個の剛体要素と質量が変化する質点要素を結合することでロケットをモデル化し、提案手法を用いた数値シミュレーションを行う。まず、ロケットの質量の変化が、ロケットの姿勢に与える影響を解析する。解析結果から、ロケットの運動に質量変化が及ぼす影響を考慮することの重要性を述べる。次に、ロケットの剛性の変化が、ロケットの姿勢に与える影響を解析する。解析結果から、ロケットの運動に柔軟性が及ぼす影響を考慮することの重要性を述べる。以上の解析結果と考察から、本手法の有用性を検証する。

3. 速度変換法による質量が変化する柔軟体の定式化

一般化速度が $\mathbf{S}$ によって与えられる全系の運動方程式を作することを目的とする。全系から運動方程式が既知となるようにいくつかの拘束を外し、分系を作成する。各分系の運動方程式を、式(1)に表すような形にまとめる。ここで、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{m}^H$ 、 $\mathbf{f}^H$ はそれぞれ各分系の一般化速度、質量行列、一般化外力をまとめている。

$$\mathbf{m}^H \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{f}^H \quad (1)$$

このとき、 $\mathbf{H}$ は $\mathbf{S}$ を用いて式(2)のように書ける。

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S \mathbf{S} + \mathbf{H}_{\bar{S}} \quad (2)$$

$\mathbf{H}_S$ と $\mathbf{H}_{\bar{S}}$ は結合による一般化速度の変化を表す速度変換行列である。これにより、式(1)を書き直すことができ、全系の運動方程式が式(3)のように得られる。 $\mathbf{f}_{\text{elas}}^S$ は弾性結合による拘束が存在する場合に生じる弾性復元力項である。 $\mathbf{m}^S$ と $\mathbf{f}^S$ は、それぞれ式(4)と式(5)のように書くことができる。

$$\mathbf{m}^S \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{f}^S + \mathbf{f}_{\text{elas}}^S \quad (3)$$

$$\mathbf{m}^S \equiv \mathbf{H}_S^T \mathbf{m}^H \mathbf{H}_S \quad (4)$$

$$\mathbf{f}^S \equiv \mathbf{H}_S^T \left\{ \mathbf{f}^H - \mathbf{m}^H \left(\frac{d\mathbf{H}_S}{dt} \mathbf{S} + \frac{d\mathbf{H}_{\bar{S}}}{dt} \right) \right\} \quad (5)$$

本手法では、質量が変化する柔軟体を全系とし、剛体系と、質量が変化する質点系からなる系を分系とする。分系の質量行列 $\mathbf{m}^H$ が時間変化する場合、式(4)に示す全系の質量行列 $\mathbf{m}^S$ に質量変化の影響があらわれる。また、次章で見るように、 $\mathbf{f}^H$ は質量変化により発生する力を含む。従って、式(3)の $\mathbf{f}^S$ は質量変化により発生する力を含む。

4. 分系の運動方程式の導出

全系から拘束を外し、剛体系と、質量が変化する質点系からなる分系を作成する。簡単のため、図1に示すモデルについて定式化を行う。この場合、分系は、剛体要素 O と剛体要素 P、質量が変化する質点要素 P_m からなる。剛体要素 O、剛体要素 P、質量が変化する質点要素 P_m を弾性結合することにより全系を表現する。

Fig. 1 Model of flexible body with mass loss

分系の運動方程式を式 (1) の形にまとめる. 重心に座標系が固定された自由な剛体要素 O の運動は, 式 (6) に示す重心の並進運動の運動方程式と, 式 (7) に示す回転の運動方程式により表現することができる.

$$\mathbf{M}_O \dot{\mathbf{V}}_{NO} = \mathbf{F}_{NO} \quad (6)$$

$$\mathbf{J}'_{NO} \dot{\boldsymbol{\Omega}}'_{NO} = \mathbf{N}'_{NO} - \tilde{\boldsymbol{\Omega}}'_{NO} \mathbf{J}'_{NO} \boldsymbol{\Omega}'_{NO} \quad (7)$$

ここで, $\mathbf{M}_O$ は剛体要素 O の質量行列であり, $\mathbf{J}'_{NO}$ は剛体要素 O の重心回りの慣性行列である. $\mathbf{F}_{NO}$ と $\mathbf{N}'_{NO}$ は, それぞれ剛体要素 O の重心に等価換算された外力と外力トルクであり, $\mathbf{V}_{NO}$ と $\boldsymbol{\Omega}'_{NO}$ はそれぞれ剛体要素 O の速度と角速度である. また, チルダはベクトルに外積オペレータを作用させたことを示している. 運動量保存則により, 質量が変化する自由な質点要素 P_m の運動方程式は式 (8) のように導出できる.

$$\mathbf{M}_{P_m} \dot{\mathbf{V}}_{NP_m} = \mathbf{F}_{NP_m} + \dot{\mathbf{M}}_{P_m} {}^N \mathbf{V}_e \quad (8)$$

ここで, $\mathbf{M}_{P_m}$ と $\mathbf{V}_{NP_m}$ と $\mathbf{F}_{NP_m}$ は, それぞれ質点要素 P_m の質量と速度と外力である. $\dot{\mathbf{M}}_{P_m}$ は質量変化率であり, ${}^N \mathbf{V}_e$ は噴射速度である. 自由な剛体要素 P についても, 式 (6) と式 (7) に示す運動方程式を立てる. 分系の運動方程式は, 式 (6), 式 (7), 式 (8) を用いて, 式 (1) の形にまとめることができる. このとき $\mathbf{H}$, $\mathbf{m}^H$, $\mathbf{f}^H$ はそれぞれ式 (9), 式 (10), 式 (11) のように書ける.

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{NO}^T & \boldsymbol{\Omega}'_{NO}^T & \mathbf{V}_{NP}^T & \boldsymbol{\Omega}'_{NP}^T & \mathbf{V}_{NP_m}^T \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$\mathbf{m}^H \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M}_O & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}'_{NO} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}'_{NP} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{P_m} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{f}^H \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{NO} \\ \mathbf{N}'_{NO} - \tilde{\boldsymbol{\Omega}}'_{NO} \mathbf{J}'_{NO} \boldsymbol{\Omega}'_{NO} \\ \mathbf{F}_{NP} \\ \mathbf{N}'_{NP} - \tilde{\boldsymbol{\Omega}}'_{NP} \mathbf{J}'_{NP} \boldsymbol{\Omega}'_{NP} \\ \mathbf{F}_{NP_m} + \dot{\mathbf{M}}_{P_m} {}^N \mathbf{V}_e \end{bmatrix} \quad (11)$$

式 (8) の右辺第二項は質量変化により発生する力を表しており, 式 (11) の $\mathbf{f}^H$ は $\dot{\mathbf{M}}_{p_m}$ を含むので, $\mathbf{f}^H$ は質量変化により発生する力を含んでいる. 更に, 式 (5) の $\mathbf{f}^S$ が $\mathbf{f}^H$ を含むので, 式 (3) の右辺第一項は質量変化により発生する力を含んでいる. また, 式 (8) の左辺の質量は変化しており, 式 (10) の $\mathbf{m}^H$ は $\mathbf{M}_{p_m}$ を含むので, $\mathbf{m}^H$ は質量変化を表現している. 式 (4) の $\mathbf{m}^S$ が $\mathbf{m}^H$ を含むので, 式 (3) の左辺は質量変化を表現している.

5. 質量が変化する柔軟体の運動方程式

分系を結合して全系を作成し, 結合による一般化速度の変化を利用して, 全系の運動方程式を求める.

5・1 結合による一般化速度の変化

剛体要素 O, 剛体要素 P, 質量が変化する質点要素 P_m を弾性結合することにより全系を表現する. 本節では, これらの剛体要素の速度と角速度, および質点要素の速度が, 結合によりどう変化するかを考える.

図 1 において座標系 N を慣性座標系とする. 剛体要素 O の重心を柔軟体の基準点 O とし, 座標系 O を固定する. 点 O の位置ベクトルを $\mathbf{R}_{NO}$, 座標系 O により表現された剛体要素 P の位置ベクトルを $\mathbf{R}_{OP}$ とすると, 座標系 N により表現された剛体要素 P の位置ベクトルは式 (12) で表される.

$$\mathbf{R}_{NP} = \mathbf{R}_{NO} + \mathbf{C}_{NO} \mathbf{R}_{OP} \quad (12)$$

ここで $\mathbf{C}_{NO}$ は座標系 O から座標系 N への座標変換行列である. $\mathbf{R}_{OP}$ は, 弾性変形を含まない位置ベクトル $\mathbf{r}_{OP'}$ と弾性変位ベクトル ${}^O\mathbf{R}_{pp}$ の和で, 式 (13) のように表現できる.

$$\mathbf{R}_{OP} = \mathbf{r}_{OP'} + {}^O\mathbf{R}_{pp} \quad (13)$$

弾性変位が, 固有モードベクトルの重ね合わせで表現できるとすると, 拘束モード法(長松, 大熊, 1991)により, ${}^O\mathbf{R}_{pp}$ は, モードマトリクス Φ^x と, モード座標をまとめたベクトル $\mathbf{q}$ を用いて式 (14) で表せる.

$${}^O\mathbf{R}_{pp} = \Phi^x \mathbf{q} \quad (14)$$

ここでは, 点 O を固定端, 点 P を自由端としたときのモード変換を行っている. 式 (12) に式 (13) と式 (14) を代入し, 微分することで, 剛体要素 P の速度は式 (15) のように書ける.

$$\mathbf{V}_{NP} = \mathbf{V}_{NO} - \mathbf{C}_{NO} \tilde{\mathbf{R}}_{OP} \boldsymbol{\Omega}'_{NO} + \mathbf{C}_{NO} \Phi^x \dot{\mathbf{q}} \quad (15)$$

式 (15) は弾性結合による剛体要素 P の速度表現の変化を表している. 質量が変化する質点要素 P_m の弾性結合による速度の変化も, 式 (15) と同様の形で得られる. 剛体要素 O の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}_{NO}$, 座標系 O により表現された剛体要素 P の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}_{OP}$ とすると, 座標系 N により表現された剛体要素 P の角速度ベクトルは式 (16) で表される.

$$\boldsymbol{\Omega}_{NP} = \boldsymbol{\Omega}_{NO} + \mathbf{C}_{NO} \boldsymbol{\Omega}_{OP} \quad (16)$$

剛体要素 P の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_{OP}$ は, モードマトリクス Φ^θ と, モード座標の一階微分をまとめたベクトル $\dot{\mathbf{q}}$ を用いて式 (17) で表せる.

$$\boldsymbol{\Omega}_{OP} = \Phi^\theta \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

式 (17) を式 (16) に代入し, 式 (16) を剛体要素 P に固定された座標系 P により表現すると, 剛体要素 P の角速度は式 (18) のように表せる.

$$\mathbf{\Omega}'_{NP} = \mathbf{C}_{OP}^T (\mathbf{\Omega}'_{NO} + \mathbf{\Phi}^\theta \dot{\mathbf{q}}) \quad (18)$$

式 (18) は弾性結合による剛体要素 P の角速度表現の変化を表している.

5・2 全系の運動方程式の導出

全系の一般化座標 $\mathbf{Q}$ と一般化速度 $\mathbf{S}$ を式 (19) と式 (20) のように選ぶ.

$$\mathbf{Q} \equiv [\mathbf{R}_{NO}^T \quad \mathbf{E}_{NO}^T \quad \mathbf{q}^T]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{S} \equiv [\mathbf{V}_{NO}^T \quad \mathbf{\Omega}_{NO}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T \quad (20)$$

$\mathbf{E}_{NO}$ はオイラーパラメータと呼ばれる回転姿勢を表す変数である. 式 (15) と式 (18) を用いて, 式 (9) の $\mathbf{H}$ と式 (20) の $\mathbf{S}$ の関係を式 (2) のように表すことができる. このとき $\mathbf{H}_S$ は式 (21) のように書くことができ, $\mathbf{H}_{\bar{S}}$ はゼロとなる.

$$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{C}_{NO} \tilde{\mathbf{R}}_{OP} & \mathbf{C}_{NO} \mathbf{\Phi}^x \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{OP}^T & \mathbf{C}_{OP}^T \mathbf{\Phi}^\theta \\ \mathbf{I} & -\mathbf{C}_{NO} \tilde{\mathbf{R}}_{OP} & \mathbf{C}_{NO} \mathbf{\Phi}^x \end{bmatrix} \quad (21)$$

弾性復元力項 $\mathbf{f}_{\text{elas}}^S$ は, 弾性力によるポテンシャルエネルギー U を一般化座標 $\mathbf{Q}$ で偏微分することにより求める. 有限要素解析により得られる剛性行列 $\mathbf{K}$ を用いて, $\mathbf{f}_{\text{elas}}^S$ は式 (22) のように導出できる. ここで, $\mathbf{W}$ は一般化座標の一階微分 $\dot{\mathbf{Q}}$ と一般化速度 $\mathbf{S}$ との間の変換行列である.

$$\mathbf{f}_{\text{elas}}^S = -\mathbf{W}^T \frac{\partial U}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{q})^T \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$\mathbf{m}^H$, $\mathbf{f}^H$, $\mathbf{H}_S$, $\mathbf{H}_{\bar{S}}$, $\mathbf{f}_{\text{elas}}^S$, $\mathbf{S}$ を用いて式(3)に示す形で全系の運動方程式が得られる. 簡単のため, 図 1 に示すようなモデルについて定式化を行ったが, 得られた運動方程式を分系の運動方程式として活用し, 同様の手順に沿って定式化を行うことで, 複雑な構造物全体の運動方程式を求めることが可能である.

6. ロケットの運動解析

提案手法を用いた数値シミュレーションにより, 質量の変化や剛性の変化がロケットの飛行特性に及ぼす影響を調べる. 図 2 に示すように, 梁要素を活用して柔軟部分を離散化する. 剛体要素 O , 離散化された剛体要素 $P_1 \dots P_n$, 質量が変化する質点要素 $P_{m1} \dots P_{mk}$ をそれぞれ弾性結合することで, ロケットのボディをモデル化する. さらに, 剛体要素 O にジンバルノズル A をジョイント結合することで, ロケット全体をモデル化する. ロケットのピッチ角 θ_0 と, ジンバルノズルの座標系 O に対する角度 θ_A は, 図 3 に示すように定義し, ロケットの弾性変位は座標系 O の Y 軸からの変位とする. ジンバルノズルの角度 θ_A は図 4 に示すように時間の関数で指定し, 10 秒間の飛行を考える. ジンバルノズルに図 4 に示すような角度を与えることで, ロケットに重心周りのトルクが発生し, ロケットの姿勢を変更することができる. この時のロケットの姿勢の時間履歴は, 図 5 のようになる. 図 5 は, ロケットの弾性変形が生じない場合のピッチ角の時間履歴を表している. 同様の条件で, 質量変化や弾

性変形を考慮して、ロケットの飛行シミュレーションを行った。シミュレーションには、自作した MATLAB プログラムを用いた。ロケットの材料はアルミ合金とし、形状は厚さ 3 mm の中空円筒とする。表 1 に主なシミュレーションパラメータの値を示す。なお、推進力は、ジンバルノズルに集中して働くとし、固定された座標系 A の Y 軸方向に働くとする。

Fig. 2 Model of flexible rocket with mass loss

Fig. 3 Planar view of rocket with gimbaled nozzle

Fig. 4 Prescribed motion history of nozzle gimbal angle

Fig. 5 History of pitch angle θ_0 for rockets without mass loss

Table 1 Simulation parameters

Density [kg/m ³]	2.7×10^3	Young's modulus [GPa]	68.6
Total length [m]	26	Fuel mass [t]	10
Length of fuel tank [m]	23.4	Total mass [t]	10.9
Diameter [m]	2.6	Thrust [kN]	2000

6・1 剛体ロケットの運動に質量変化が及ぼす影響

まず、質量変化の影響のみを調べるために、剛体ロケットの飛行シミュレーションを行った。質量変化部分を、質量が変化する9つの質点要素でモデル化した。燃料タンク内の質量の変化の仕方として、Case 1とCase 2の二通りのモデルを考える。Case 1は固体燃料を想定した場合であり、Case 2は液体燃料を想定した場合である。Case 1とCase 2の質量変化の仕方の違いを図6に示す。Case 1とCase 2の質量変化の仕方の違いは、プログラム上で表現している。Case 1は質量変化部分を構成する質点の質量を均等に時間変化させており、Case 2は質量変化部分を構成する質点の質量を上から順に時間変化させている。

Fig. 6 Models for solid fuel and liquid fuel with mass loss

ここで、燃料消費率 (ml) というパラメータを定義する。燃料消費率は、シミュレーション時間 (10 秒) のうちに、全燃料に対してどれだけの燃料を消費したかを表す指数である。二つのモデルについて、 $ml = 0.1, 0.3, 0.5$ とした場合について飛行シミュレーションを行った。質量の変化のみが飛行特性に及ぼす影響を確認するために、全ての解析において推進力は一定とした。図 7 に Case 1 のピッチ角度 θ_0 の時間履歴を示す。図 7 から、燃料消費率の違いにより、ロケットの姿勢角に変化が生じることが分かる。質量減少に伴う慣性モーメントの低下によりロケットが回転しやすくなるため、このような変化が起きたと考えられる。図 8 に Case 2 のピッチ角度 θ_0 の時間履歴を示す。Case 2 についても、Case 1 と同様の理由で、燃料消費率の違いにより、ロケットの姿勢角に変化が生じることが分かる。

Fig. 7 History of pitch angle θ_0 (Case 1) Fig. 8 History of pitch angle θ_0 (Case 2)

Case 1 と Case 2 のピッチ角の時間履歴 (図 7 と図 8) と、図 5 に示すロケットの質量変化と弾性変形のいずれも生じない場合のピッチ角の時間履歴の差をとる。その差は質量変化によるピッチ角の変化量となり、その変化量の二乗平均平方根 (RMS) を算出した。燃料消費率の変化に伴うピッチ角の変化量の RMS の変化を図 9 に示す。図 9 から、燃料消費率が上がると、Case 1 に比べ Case 2 の方が、ピッチ角の変化量の RMS が大きく上昇することが分かる。Case 2 は質量が上方から減少していくため、Case 1 に比べ重心の位置が時間経過とともに大きく下方に変化する。これにより、Case 2 は Case 1 に比べ、推進力が生み出す重心周りのトルクが、時間経過とともに小さくなっていく。このため、5~7 秒間にロケットに働く回転を止めようとするトルクが小さくなり、Case

2の方が姿勢角の変化が大きくなると考えられる。以上の解析結果より、質量の変化が、ロケットの姿勢に影響を与えることがわかる。ロケットの運動に質量変化が及ぼす影響を考慮することは重要であり、本手法はロケットの質量の変化を考慮した飛行シミュレーションに有用であると言える。

Fig. 9 RMS of variation in pitch angle θ_0 as a function of fuel consumption rate

6・2 ロケットの運動に柔軟性が及ぼす影響

柔軟部分を、9つの剛体要素の弾性結合でモデル化し、柔軟性を持つロケットの飛行シミュレーションを行った。減衰は考慮しないものとし、燃料消費率は0.5とした。Case 1とCase 2のロケットの先端部の弾性変位の時間履歴をそれぞれ図10と図11に示す。図10と図11において、ジンバルノズルが角度を持つ3秒後からロケットが弾性変位を持ち、その後振動を行う様子が確認できる。これは、ジンバルノズルに働く推進力が生み出すトルクの影響を受けて、ロケット全体が反りを引き起こすためだと考えられる。ジンバルノズルが角度を持つ3秒から7秒の間は、ロケット全体が反りながら振動を行い、7秒後は、座標系OのY軸を中心とした振動を行う様子が確認できる。これは、7秒後は推進力が座標OのY軸に沿って働くため、推進力が座標系Oに対シトルクを生み出さないためだと考えられる。9つの剛体要素の弾性変位の時間履歴から、RMSを算出した。曲げ剛性を0.1～10倍して、それぞれの場合について弾性変位のRMSを求めた。曲げ剛性の変化に伴う弾性変位のRMSの変化を図12に示す。横軸は曲げ剛性を何倍したかを表しており、縦軸は弾性変位のRMSを表している。図12から、剛性が上がるにつれて弾性変位のRMSが減少していく様子が確認できる。また、Case 1とCase 2では弾性変位のRMSの大きさが変わっていることが分かる。Case 1とCase 2では質量変化の仕方が異なるため、この質量分布の違いが弾性変位の大きさに影響を与えたと考えられる。

Fig. 10 History of tip deflection (Case 1)

Fig. 11 History of tip deflection (Case 2)

Fig. 12 RMS of elastic displacement as a function of stiffness

Case 1 と Case 2 のピッチ角の時間履歴 (図 10 と図 11) と, ロケットの弾性変形が生じない場合のピッチ角の時間履歴の差をとる. その差は弾性変形によるピッチ角の変化量となり, その変化量の RMS を算出した. 曲げ剛性を 0.1~10 倍して, それぞれの場合についてピッチ角の変化量の RMS を求めた. 曲げ剛性の変化に伴うピッチ角の変化量の RMS の変化を図 13 に示す. 横軸は曲げ剛性をノミナル値より何倍したかを表しており, 縦軸はピッチ角の変化量の RMS を表している. 図 13 より, ロケットの剛性が小さくなると, ピッチ角の RMS の変化量が大きくなる様子が確認できる. ロケットが柔軟性を持つ場合, 推進力の生み出すトルクの影響を受け, ロケット全体が図 10 と図 11 に示すような反りを引き起こし, 振動が生じる. 剛体 O に取り付けられたジンバルノズルがこの振動の影響を受けるため, 剛性が低くなり弾性変位が大きくなると, 図 13 に示すようなピッチ角の変化が生じるのだと考えられる. また, Case 1 と Case 2 ではピッチ角の変化量の RMS の大きさが変わっていることが分かる. 図 12 からわかるように, Case 1 と Case 2 では弾性変位の RMS の大きさが異なるため, この弾性変位の大きさがピッチ角に影響を与えたのだと考えられる.

Fig. 13 RMS of variation in pitch angle θ_0 as a function of stiffness

以上の解析結果より、ロケットの質量の変化と剛性の変化が、ロケットの振動や姿勢に影響を与えることがわかる。ロケットの運動に質量変化と柔軟性の両方が及ぼす影響を考慮することは重要であり、本手法はロケットの質量変化と柔軟性を考慮した飛行シミュレーションに有用であると言える。

7. 結 言

本研究では、ケインの理論に基づき、弾性結合により生じる復元力項を一般化外力として追加し、速度変換法を柔軟体に適用できる形に拡張した。また、有限個の剛体と質量が変化する質点を結合することで、質量が変化する柔軟体を表現し、速度変換法を活用した定式化を行った。提案手法を用いた数値シミュレーションにより、質量の変化と剛性の変化がロケットの飛行特性に及ぼす影響を確認し、本手法の有用性を検証した。提案手法は、質量変化による重心の変化を考慮した運動方程式を、部分構造の結合により生じる一般化速度の変化を求めるだけで機械的に導出することができる。提案手法を用いれば、質量が変化する複雑な柔軟構造物に対して、多くの質点を用いることなく、より現実に近いモデルを作成し、運動の定式化を行うことができる。提案手法により、質量変化、柔軟性、幾何学的な拘束を考慮した複雑な構造物全体の運動解析を効率的に行うことが可能となる。

文 献

- Banerjee, A. K., Dynamics of a variable-mass, flexible-body system, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.23, No.3 (2000), pp.501-508.
- Banerjee, A. K. and Lemak, M. E., Dynamics of a flexible body with rapid mass loss, *Journal of Aeronautics and Aerospace Engineering*, Vol.2, No.5 (2013), Article No.1000126.
- Craig, R. R. and Bampton, M. C. C., Coupling of substructures for dynamic analyses, *AIAA Journal*, Vol.6, No.7 (1968), pp.1313-1319.
- Ge, Z. M. and Cheng, Y. M., Extended Kane's equations for nonholonomic variable mass system, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.49 (1982), pp.429-431.
- Joo, S. H. and Lee, J. H., Real time traversability analysis to enhance rough terrain navigation for an 6×6 autonomous vehicle, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.27, No.4 (2013), pp.1125-1134.
- Kane, T. R., Dynamics of nonholonomic systems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.28 (1961), pp.574-578.
- Kane, T. R. and Levinson, D. A., Dynamics, theory and applications (1985), pp.130-141, McGraw-Hill.
- Kane, T. R., Likins, P. W. and Levinson, D. A., Spacecraft dynamics (1983), pp.247-277, McGraw-Hill.
- Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., A general and efficient method for dynamics analysis of mechanical systems using velocity transformations, *ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol.108 (1986), pp.176-182.
- Lee, B. H., Yoo, W. S. and Kwak, B. M., A systematic formulation for dynamics of flexible multi-body systems using the velocity transformation technique, *Proceedings of MechE, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol.207, No.4 (1993), pp.231-238.
- 巳谷真司, 部分構造法を用いた多体柔軟衛星のダイナミックモデリング手法, 第 57 回宇宙科学技術連合講演会講演集 (2013), 2013-10-09.
- 長松昭雄, 大熊政明, 部分構造合成法 (1991), pp.66-70, 東京電機大学出版局.
- Suzuki, S., Ishii, T., Yanagisawa, G., Tomita, K. and Yokoyama, Y., Modeling and motion analysis of fixed-pitch co-axial rotor unmanned helicopter, *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2012), pp.3774-3779.
- 田島洋, マルチボディダイナミクスの基礎 3次元運動方程式の立て方 (2006), pp.213-232, 培風館.
- 田寺木一, 質量が変化する弾性飛しょう体の運動方程式, *日本航空宇宙学会誌*, Vol.21, No.237 (1973), pp.580-592.
- Thomson, W. T. and Reiter, G. S., Jet damping of a solid rocket: theory and flight results, *AIAA Journal*, Vol.3, No.3 (1965), pp.413-417.

References

- Banerjee, A. K., Dynamics of a variable-mass, flexible-body system, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.23, No.3 (2000), pp.501-508.
- Banerjee, A. K. and Lemak, M. E., Dynamics of a flexible body with rapid mass loss, *Journal of Aeronautics and Aerospace Engineering*, Vol.2, No.5 (2013), Article No.1000126.
- Craig, R. R. and Bampton, M. C. C., Coupling of substructures for dynamic analyses, *AIAA Journal*, Vol.6, No.7 (1968), pp.1313-1319.
- Ge, Z. M. and Cheng, Y. M., Extended Kane's equations for nonholonomic variable mass system, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.49 (1982), pp.429-431.
- Joo, S. H. and Lee, J. H., Real time traversability analysis to enhance rough terrain navigation for an 6×6 autonomous vehicle, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.27, No.4 (2013), pp.1125-1134.
- Kane, T. R., Dynamics of nonholonomic systems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.28 (1961), pp.574-578.
- Kane, T. R. and Levinson, D. A., Dynamics, theory and applications (1985), pp.130-141, McGraw-Hill.
- Kane, T. R., Likins, P. W. and Levinson, D. A., *Spacecraft dynamics* (1983), pp.247-277, McGraw-Hill.
- Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., A general and efficient method for dynamics analysis of mechanical systems using velocity transformations, *ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol.108 (1986), pp.176-182.
- Lee, B. H., Yoo, W. S. and Kwak, B. M., A systematic formulation for dynamics of flexible multi-body systems using the velocity transformation technique, *Proceedings of MechE, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol.207, No.4 (1993), pp.231-238.
- Mitani, S., General dynamic modeling for a multibody flexible satellite using Craig-Bampton method, *Proceedings of 57th Conference on Space Science and Technology* (2013), 2013-10-09 (in Japanese).
- Nagamatsu, A. and Okuma, M., Substructure synthesis method (1991), pp.66-70, Tokyo Denki University Press (in Japanese).
- Suzuki, S., Ishii, T., Yanagisawa, G., Tomita, K. and Yokoyama, Y., Modeling and motion analysis of fixed-pitch co-axial rotor unmanned helicopter, *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2012), pp.3774-3779.
- Tajima, H., Fundamentals of multibody dynamics (2006), pp.213-232, Baifukan (in Japanese).
- Tatera, K., The equations of motion of an elastic launch vehicle with varying mass, *The Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol.21, No.237 (1973), pp.580-592 (in Japanese).
- Thomson, W. T. and Reiter, G. S., Jet damping of a solid rocket: theory and flight results, *AIAA Journal*, Vol.3, No.3 (1965), pp.413-417.