誘起電荷電気浸透流を用いたマイクロポンプを対象とした
レベルセット法に基づくトポロジー最適化田中 隆太^{*1}, 矢地 謙太郎^{*1}, 佐藤 綾美^{*2}
泉井 一浩^{*1}, 山田 崇恭^{*1}, 西脇 眞二^{*3}Level set-based topology optimization targeting micropumps
employing an induced-charge electro-osmosis flowRyuta TANAKA^{*1}, Kentaro YAJI^{*1}, Ayami SATO^{*2},
Kazuhiro IZUI^{*1}, Takayuki YAMADA^{*1} and Shinji NISHIWAKI^{*3}^{*1,*2,*3} Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Kyotodaigaku-katsura C3, Nishikyo-ku, Kyoto 615-8540, Japan

Received 22 July 2015

Abstract

The aim of this research is to construct a topology optimization method for the design of micropumps driven by induced-charge electro-osmosis. Micropumps are one of the most important components in micro-fluid devices such as μ -TAS (Micro Total Analysis Systems). In particular, electro-osmotic micropumps offer many advantages. They have a simple structure, are easy to miniaturize, and generate flow that is free from pulsation, but such pumps are typically driven by direct current fields, so electrolysis may cause problems. To avoid the problems of electrolysis, a phenomenon called induced-charge electro-osmosis is attracting increasing attention because, being driven by alternating current fields, electrolysis is much less prevalent. Since the amount of liquid discharge is controlled through the electro-osmotic phenomenon, the micropump performance is greatly influenced by the shapes and locations of the dielectric material in its interior. For the design of the distribution of dielectric material in a micropump, we construct a topology optimization method for the micropump design that maximizes the amount of liquid discharge, using level set boundary expressions so that the expressed structural boundaries are free from expanded grayscale areas. Several numerical examples are provided to confirm the utility of the proposed method.

Key words : Topology optimization, Induced-charge electro-osmosis, μ -TAS, Micropump, Level set method

1. 緒 言

MEMS 技術の発展に伴い、チップ上に微小な流路、反応室、混合室等を設けた小型化学分析器、 μ -TAS (Micro-Total Analysis Systems) が近年注目を集めている。 μ -TAS は微量の試薬で迅速かつ高感度の化学分析を行うことが可能であり、DNA 解析や血液検査、有害物質の検出など、その応用範囲は多岐にわたる。

μ -TAS における重要な構成要素のひとつとして、マイクロポンプが挙げられる。マイクロポンプは μ -TAS を始めとする微小な流路を有するマイクロ流路デバイスへの液体搬送に用いられ、その主な駆動方式はダイヤフラム機構を利用する機械式と、電気浸透や磁性流体を利用する非機械式に分類される (Wojas, 2005)。中でも電気浸透

を利用した非機械式マイクロポンプは、構造が単純で小型化が容易であると共に、拍動を生じないことから高精度な液体搬送が可能であり、これまでに多くの研究が成されている (Ajdari, 2000; Takamura et al., 2003)。

電気浸透とは、固体と液体の界面に集積するイオンが、外部から与えられた電圧によって移動し、それに伴い液体が流れる現象である。この電気浸透を利用したマイクロポンプは、前述のように多くの利点を有しているものの、直流電圧を用いることから稼働中に電気分解が生じるため、気泡の発生、電極の劣化、サンプルの汚染等を生じる問題を持つ。そこでこれらの問題を抜本的に解決するため、誘起電荷電気浸透と呼ばれる現象を利用したマイクロポンプが近年注目を集めている (Squires and Bazant, 2004)。誘起電荷電気浸透は交流電圧の下で生じる電気浸透現象であり、電気分解を生じにくい特徴を持つ。この誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプを設計する上で、ポンプ内部に配置する固体 (誘電体) の形状は極めて重要であり、より多くの吐出量を得るためにも適切な形状を選ぶ必要がある。

この内部に配置する誘電体の形状については、三角形や矩形といった基本形状を用いたマイクロポンプに関する研究がこれまでに幾つか報告されており、誘起電荷電気浸透を利用することで電気分解が生じにくい非機械式マイクロポンプが実現可能であることが示されている (Squires and Bazant, 2004; Bazant and Squires, 2004; Squires and Bazant, 2006)。しかし、従来の研究では誘電体を単純な形状に想定し、試行錯誤的に誘電体形状を決めていることから、必ずしもそれらが最適な形状であるとは言い難い。特定の形状に限定することなく最適な形状を創出することができれば、誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプの更なる高性能化が期待できる。この課題を解決するための有効な一手法として、トポロジー最適化の適用が考えられる (Bendsøe and Kikuchi, 1988)。この方法の基本的な考え方は、構造最適化問題を材料分布問題に置き換えることにあり、これにより構造の形状のみならず、形態の変更をも許容した設計自由度の高い構造最適化が可能となる。

流体問題を対象としたトポロジー最適化に関する研究は、Borravall と Petersson (2003) により始まる。この研究では、流れ場の粘性散逸エネルギー最小化問題を対象として最適構造を創出している。これまでに、この方法は層流域における流れ場の粘性散逸エネルギー最小化を目的とした流路設計問題 (Guest and Prévost, 2006; Zhou and Li, 2008) を中心として、複数の流出境界での流量を規定する流路設計問題 (Liu et al., 2011) や、揚抗比最大化を目的とした翼設計問題 (Kondoh et al., 2012)、更には乱流問題 (Papoutsis-Kiachagias and Giannakoglou, 2014) にも適用され、成功を収めている。しかしながら、これまでの流体問題を対象としたトポロジー最適化に関する研究では、そのほとんどが流れ場のみに着目しており、流れ場と温度場が連成する最適化問題に関する研究は近年幾つか報告があるものの (Matsumori et al., 2013; Yaji et al., 2015)、誘起電荷電気浸透のように、流れ場と電氣場が連成する最適化問題への展開は未だほとんど報告されていない。

本研究では、誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプの吐出量最大化を目的として、流れ場と電氣場の連成問題を考慮した新しいトポロジー最適化手法を構築し、ポンプ内部の最適な誘電体形状を求めると共に、電極の配置と印加する交流電圧の周波数が最適構造に及ぼす影響について検証する。なお、誘起電荷電気浸透を考慮したトポロジー最適化に関する研究は Gregersen ら (2009) によってその基礎的な方法論が構築されているが、最適構造が流体と固体の中間的な空孔率を有する領域、いわゆるグレースケールを多く含むことが指摘されていることから、本研究では Yamada ら (2010) が提唱するレベルセット法に基づくトポロジー最適化に基づき方法論を構築する。この方法では、スカラー関数であるレベルセット関数の零等位面によって最適構造の境界を表現するため、明瞭な境界を有した最適構造の創出が可能である (Wang et al., 2003; Allaire et al., 2004)。これまでに構造力学問題を始め (Yamada et al., 2010; Otomori et al., 2011)、電磁波伝搬問題 (Otomori et al., 2012; Fujii et al., 2013)、流体力学問題 (Yaji et al., 2014; Yaji et al., 2015) など、多くの最適化問題に展開され、成功を収めている。以下 2 章では誘起電荷電気浸透の原理と、その支配方程式について概説する。3 章では、誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプの吐出量最大化を目的としたトポロジー最適化問題の定式化を行う。4 章では、数値実装法と最適化アルゴリズムについて述べる。最後に、5 章において数値例を示し、本研究で提案する方法論の妥当性と有用性を検証する。

2. 誘起電荷電気浸透

2.1 誘起電荷電気浸透の原理

誘起電荷電気浸透の簡単な例として図1に示す電解液中の導体円柱を考える．図1(a)のように，導体円柱に対し外部から電圧を印加すると，直後に電場が形成され導体表面に電荷が移動する．これに伴い電解液中のイオンは電場に沿って移動し，導体表面に集積して電気二重層を形成する．この電気二重層中のイオンは導体表面へ向かう電場を遮蔽するため，電気二重層に供給される電荷の量は徐々に減少して，一定時間の後に定常状態に達する．定常状態における電場は，図1(b)のように円筒を避けるように形成される．これにより電気二重層中のイオンが円筒を沿うように移動するため，それらに引きずられるようにして流れが生じる．円筒の場合は，図のように上下で符号が逆の等しい量の電荷が誘起するため，図1(c)のように上下対称の流れとなる．ここで電場の向きを逆転すると，表面に誘起する電荷と，それに伴って集積するイオンの符号がそれぞれ入れ替わるが，結果的に元の場合と全く同じ流れが生じる．そのため，誘起電荷電気浸透は交流電圧を用いても誘起される流れの方向は常に変わらず，これを利用することで交流電圧を用いた電気浸透ポンプを実現できる．

従来の直流電圧を用いる電気浸透ポンプでは，電解液中のイオンが極板に集まり，極板近傍での電位差が大きくなることで電気分解が生じるため，気泡の発生，電極の劣化，サンプルの汚染などの問題を抱えている．これに対し，交流電圧を用いる電気浸透ポンプでは，極板近傍での電位差が大きくなる前に極板の正負が入れ替わることで電気分解の発生を抑制することが可能であることから，近年，誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプに関する様々な研究が成されている (Squires and Bazant, 2004; Bazant and Squires, 2004; Squires and Bazant, 2006; Gregersen et al., 2009) ．

Fig. 1 (a) Electric field in the vicinity of a conductive cylinder; (b) Ions gather around the cylinder and repel the electric field; (c) Induced-charge electro-osmosis flow occurs away from the ions on the cylinder

2.2 支配方程式

続いて，誘起電荷電気浸透の支配方程式について考える．一般的に，誘起電荷電気浸透の支配方程式を定式化する際は，正負それぞれのイオン濃度 c_+ および c_- の二種類の電解質が含まれた電解液について，両者の価数 Z および拡散係数 D_f がそれぞれ等しいと仮定する．この場合，電気素量 e に対して，電荷密度を $\rho_{el} = Ze(c_+ - c_-)$ とすると，電解液中の静電ポテンシャル ψ は次のポアソン方程式に従う (Squires and Bazant, 2004) ．

$$\nabla \cdot (\epsilon_{\text{fluid}} \nabla \psi) = -\rho_{el} \quad (1)$$

ここで， ϵ_{fluid} は電解液の誘電率を表す．また，正負それぞれのイオン流束密度を J_+ および J_- とすると，イオン濃度と流束密度には次の保存則が成り立つ．

$$\frac{\partial c_{\pm}}{\partial t} = -\nabla \cdot J_{\pm} \quad (\text{複号同順}) \quad (2)$$

なお、電解液がイオン濃度に関して十分に希薄である場合、イオン流束密度は次のネルンストプランク方程式で表される。

$$\mathbf{J}_{\pm} = -D_f \left(\nabla c_{\pm} + \frac{\pm Ze}{k_B T} c_{\pm} \nabla \psi \right) \quad (\text{複号同順}) \quad (3)$$

ここで、 k_B はボルツマン定数、 T は絶対温度である。

また、電気二重層中におけるイオンの移動に起因して生じる体積力を $\mathbf{f}_{el}$ とすると、流れ場の流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p は、次の連続の式及びナビエ・ストークス方程式に従う。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

$$\rho_{\text{fluid}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_{el} \quad (5)$$

ここで、 ρ_{fluid} は流体の密度、 η は粘性係数を表し、 $\mathbf{f}_{el}$ は静電ポテンシャルの勾配と電荷密度の積を用いて、次式で与えられる (Gregersen et al., 2009)。

$$\mathbf{f}_{el} = -\rho_{el} \nabla \psi \quad (6)$$

2.3 支配方程式の無次元化と近似式の導入

誘起電荷電気浸透の支配方程式の無次元化について考える。 $l_0, p_0, \psi_0, c_0, \tau_0$ をそれぞれ、代表長さ、代表圧力、代表電位、代表濃度、代表時間として、各変数を次のように無次元化する。

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{(l_0/\tau_0)}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{\psi_0}, \quad c_{\pm}^* = \frac{c_{\pm}}{c_0}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0} \quad (7)$$

ここで、記号 $*$ は無次元量であることを表す。代表電位、代表圧力、代表時間は次式で定義する。

$$\psi_0 = \frac{k_B T}{Ze}, \quad p_0 = \frac{\epsilon_{\text{fluid}} \psi_0^2}{l_0^2}, \quad \tau_0 = \frac{l_0}{D_f} \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{fluid}} k_B T}{2(Ze)^2 c_0}} \quad (8)$$

また、定常状態の流れ場を仮定し、交流周波数 ω^* を用いて極板間に印加する交流電圧を複素表示によって $\psi^*(t^*) = \text{Re}[2V_0^* \exp(i\omega^* t^*)]$ と定義すると、複素表示を用いた電位 Φ^* と電荷密度 P^* は、複素数 i を用いて実部と虚部に分けて、 $\Phi^* = \Phi_R^* + i\Phi_I^*$ 、 $P^* = P_R^* + iP_I^*$ とそれぞれ表すことができる。なお、電気二重層の厚さが十分に薄い場合は、デバイ-ヒュッケル近似により $c = 1 + \delta c$ および $\rho = 0 + \delta \rho$ の線形近似が成立することから、誘起電荷電気浸透の電気場は、式 (1) ならびに式 (2) と式 (3) より、 Φ^* と P^* に関する次の方程式に従う (Squires and Bazant, 2004)。

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi_{\beta}^*) = -\frac{1}{\lambda^{*2}} \mathbf{P}_{\beta}^* \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi_{\beta}^* + \nabla \mathbf{P}_{\beta}^*) = -\frac{\omega^*}{\lambda^*} \mathbf{P}_{\gamma}^* \quad (10)$$

ここで、 $\Phi_{\beta}^* = (\Phi_R^*, \Phi_I^*)^T$ 、 $\mathbf{P}_{\beta}^* = (P_R^*, P_I^*)^T$ 、 $\mathbf{P}_{\gamma}^* = (P_I^*, -P_R^*)^T$ とする。 λ は無次元のデバイ長と呼ばれ、無次元化された電気二重層の厚さに相当するパラメータであり、次式で定義される。

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{fluid}} k_B T}{2c_0 (Ze l_0)^2}} \quad (11)$$

また、マイクロポンプのようなスケールの小さな系について考える場合、一般的に代表流速及び代表長さのオーダーは非常に小さいため、流れの支配方程式は移流項を無視したストークス方程式としても問題は生じない。すなわち、流速 $\mathbf{u}^*$ 及び圧力 p^* について、式 (4)、(5) から次式が得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}^* - \nabla p^* + \mathbf{F}_{el}^* = 0 \quad (13)$$

ここで, $\mathbf{F}_{\text{el}}^*$ は, 式 (6) に基づき次式で定義される.

$$\mathbf{F}_{\text{el}}^* = -\frac{1}{2\lambda^{*2}} (P_R^* \nabla \Phi_R^* + P_I^* \nabla \Phi_I^*) \quad (14)$$

以上のことから, 定常状態を仮定し複素表示を導入することで, 誘起電荷電気浸透は式 (9)–(14) によって表すことができる. なお, 以後は簡単のため, 無次元量に付記した * を用いず, 有次元量と同じ記号を用いて表す.

3. 最適化問題

3-1 支配方程式の固定設計領域への拡張

トポロジー最適化の基本的な考え方は, 最適化される領域 Ω を包有する固定設計領域 D を設け, 特性関数 χ の導入により構造最適化問題を固定設計領域における材料分布問題に置き換えることにある. 固定設計領域における任意の位置座標を $\mathbf{x}$ とすると, 特性関数は次のように定義される.

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (15)$$

この特性関数を用いて, 誘起電荷電気浸透の支配方程式を固定設計領域に拡張することを考える. すなわち, 式 (9)–(14) が流体領域と誘電体領域の両方を表すことができるように, 各支配方程式の拡張を行う. なお, 本研究では流体領域を Ω , 誘電体領域を $D \setminus \Omega$ として定式化を行う.

まず, 式 (9) が流体および誘電体領域いずれにおいても成り立つように, 誘電体の誘電率 ϵ_{diel} , と流体の誘電率 ϵ_{fluid} からなる $\epsilon = \epsilon_{\text{diel}} + (\epsilon_{\text{fluid}} - \epsilon_{\text{diel}})\chi$ を用いて, 式 (9) を次式のように拡張する.

$$\nabla \cdot (\epsilon(\chi) \nabla \Phi_\beta) = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{P}_\beta \quad (16)$$

上式は無次元の方程式であるため, ϵ_{diel} および ϵ_{fluid} は無次元数であることを注記しておく. 本研究では有次元における各誘電率を流体の誘電率で除した値をそれぞれの無次元数として考える.

さらに, Killic ら (2007a; 2007b) の方法に基づき, 液体中のイオンが誘電体内部に侵入することを防ぐため, 自由エネルギー κ を導入し, 式 (10) を次のように拡張する.

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi_\beta + \nabla \mathbf{P}_\beta + \mathbf{P}_\beta \nabla \kappa(\chi)) = -\frac{\omega}{\lambda} \mathbf{P}_\gamma \quad (17)$$

ここで, κ_{max} を最大余剰ギブスエネルギーとして, $\kappa(\chi) = \kappa_{\text{max}}(1 - \chi)$ とする (Gregersen et al., 2009). なお, 式 (17) の左辺の括弧内の各項はテンソルであり, 第三項は二つのベクトル $\mathbf{P}_\beta$ と $\nabla \kappa$ の積から作られるテンソル (ディアド積) $\mathbf{P}_\beta (\nabla \kappa(\chi))^T$ であることを注記しておく. 流れ場の支配方程式に関しては, Borraavall と Petersson の方法 (2003) に基づき, 固定設計領域を多孔質体と仮定することで, 式 (13) に仮想的な外力項 $\mathbf{F}_\alpha$ を付加した次式に拡張する.

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{F}_{\text{el}} + \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{0} \quad (18)$$

ここで, 誘電体領域で流速が零になるように, 特性関数を用いて $\mathbf{F}_\alpha$ を次式のように定義する.

$$\mathbf{F}_\alpha = -\alpha(\chi) \mathbf{u} \quad (19)$$

ここで, α は多孔質体の逆透過抵抗係数であり, $\alpha = \alpha_{\text{max}}(1 - \chi)$ とする. α_{max} は誘電体領域における多孔質体の逆透過抵抗係数であり, η/l_0 で除した値を無次元数とする.

続いて, 式 (16)–(18) の境界条件について考える. 本研究では, 図 2 に示すように, 周期境界 $\Gamma_{\text{PEC}} = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}$ を有する固定設計領域 D を考え, 電圧を印加するための電極を設置した境界 Γ_+ 及び Γ_- と, 電極がない壁面境界 Γ_{wall} について境界条件を与える. まず, 極板の境界 Γ_+ 及び Γ_- では, 印加電圧を V_0 として, Φ_β に対する次の境界条件を与える.

$$\Phi_R = V_0, \quad \Phi_I = 0 \quad \text{on } \Gamma_+ \quad (20)$$

$$\Phi_R = -V_0, \quad \Phi_I = 0 \quad \text{on } \Gamma_- \quad (21)$$

Fig. 2 Design domain settings and boundary conditions

また, Γ_+ , Γ_- および壁面境界 Γ_{wall} では, 先行研究 (Gregersen et al., 2009) に基づき次の境界条件を与える.

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \Phi_\beta + \nabla \mathbf{P}_\beta + \mathbf{P}_\beta \nabla \kappa(\chi)) = 0 \quad \text{on } \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_{\text{wall}} \quad (22)$$

ここで, $\mathbf{n}$ は固定設計領域 D の境界における外向き単位法線ベクトルを表す. なお, 流速 $\mathbf{u}$ に関しては, 次式の下向き境界条件を与える.

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_{\text{wall}} \quad (23)$$

3.2 最適化問題の定式化

ここでは, 誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプの設計要件を明確化すると共に, その要件を満足する最適構造を創出するための目的汎関数を用いて最適化問題の定式化を行う.

マイクロポンプの基本性能として, μ -TAS などのマイクロ流体デバイスに効率良く液体搬送を行うことは極めて重要である. 誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプでは, ポンプ内部に配置する誘電体の位置や形状が吐出量に大きく影響することから, 本研究ではトポロジー最適化によって, 誘電体の最適構造を創出することを目的とする. すなわち, 液体の吐出量最大化を目的として, 誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプのトポロジー最適化手法を構築する. ここで, 図 2 に示す固定設計領域を考えた場合, この要件を満足する最適構造を創出するためには, $\Gamma_{\text{PEC}} = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}$ での流量を目的汎関数に設定し, その最大化を行えば良い. そこで, 本研究では次の目的汎関数の最小化問題を考える.

$$\inf_{\chi \in \mathcal{X}_{\text{ad}}} J = - \int_{\Gamma_{\text{out}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (24)$$

ここで, $\mathcal{X}_{\text{ad}}$ は設計変数が定義される次の関数空間とする.

$$\mathcal{X}_{\text{ad}} = \{\chi \in L^\infty(D) \text{ such that } |\Omega| \leq V\} \quad (25)$$

ここで, $|\Omega| := \int_D \chi d\Omega$ は流体領域が D で占める体積であり, V はその最大値を規定するパラメータである. なお, 流量の最大化を目的とするため, 目的汎関数 J に負号を付していることを注記しておく.

3.3 感度解析

定式化した最適化問題に基づき, 設計感度の導出を行う. 本研究では, 特性関数 $\chi(\mathbf{x})$ を 0 から 1 の連続値をとる関数 $\tilde{\chi}(\mathbf{x})$ に置き換えた上で, 目的汎関数 J の $\tilde{\chi}$ に関する次のガトー微分によって設計感度 J' を定義する.

$$\left. \frac{d}{d\theta} J(\tilde{\chi} + \theta \delta \tilde{\chi}) \right|_{\theta=0} = \langle J'(\tilde{\chi}), \delta \tilde{\chi} \rangle \quad (26)$$

上式に基づき、連続的に分布する設計変数 $\tilde{\chi}$ を $\delta\tilde{\chi}$ 方向に変動させた際の目的汎関数の変化率を設計感度とする。
 続いて、設計感度を随伴変数法を用いて導出するために、ラグランジュ未定乗数法を用いて、前述の最適化問題を次の無制約問題に置き換える。

$$\bar{J} = J + \sum_{i=1}^6 G_i + \mu (|\Omega| - V) \quad (27)$$

ここで、 $\bar{J}$ 、 μ はラグランジアン及びラグランジュ未定乗数をそれぞれ表し、 G_i ($i = 1 \sim 6$) は支配方程式に関する次の汎関数を表す。

$$\begin{cases} G_1 = \int_D \tilde{\Phi}_R \left\{ \nabla \cdot (\epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \Phi_R) + \frac{1}{\lambda^2} P_R \right\} d\Omega \\ G_2 = \int_D \tilde{\Phi}_I \left\{ \nabla \cdot (\epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \Phi_I) + \frac{1}{\lambda^2} P_I \right\} d\Omega \\ G_3 = \int_D \tilde{P}_R \left\{ \nabla \cdot (\nabla \Phi_R + \nabla P_R + P_R \nabla \kappa(\tilde{\chi})) + \frac{\omega}{\lambda} P_I \right\} d\Omega \\ G_4 = \int_D \tilde{P}_I \left\{ \nabla \cdot (\nabla \Phi_I + \nabla P_I + P_I \nabla \kappa(\tilde{\chi})) - \frac{\omega}{\lambda} P_R \right\} d\Omega \\ G_5 = \int_D \tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ G_6 = \int_D \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_\alpha) d\Omega \end{cases} \quad (28)$$

ここで、記号 $\sim$ を付した変数は、各支配方程式に対するラグランジュ未定乗数とする。なお、この最適化問題における一次の最適性条件である KKT(Karush-Kuhn-Tucker) 条件は次のようになる。

$$\langle \bar{J}', \delta\tilde{\chi} \rangle = 0, \quad G_i = 0, \quad \mu(|\Omega| - V) = 0, \quad \mu \geq 0, \quad |\Omega| - V \leq 0 \quad (29)$$

次に、式 (20)–(23) の境界条件を考慮した上で $\bar{J}$ に対するガトー微分を導出すると、次式のように展開できる。

$$\begin{aligned} \langle \bar{J}', \delta\tilde{\chi} \rangle = & \int_D \left\{ \nabla \cdot \left(\frac{1}{2\lambda^2} P_R \tilde{\mathbf{u}} \right) + \nabla \cdot (\epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \tilde{\Phi}_R) + \nabla^2 \tilde{P}_R \right\} \delta\Phi_R d\Omega \\ & + \int_{\Gamma \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \mathbf{n} \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda^2} P_R \tilde{\mathbf{u}} - \epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \tilde{\Phi}_R - \nabla \tilde{P}_R \right) \delta\Phi_R d\Gamma + \int_{\Gamma} \epsilon(\tilde{\chi}) \tilde{\Phi}_R \delta(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_R) d\Gamma \\ & + \int_D \left\{ \nabla \cdot \left(\frac{1}{2\lambda^2} P_I \tilde{\mathbf{u}} \right) + \nabla \cdot (\epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \tilde{\Phi}_I) + \nabla^2 \tilde{P}_I \right\} \delta\Phi_I d\Omega \\ & + \int_{\Gamma \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \mathbf{n} \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda^2} P_I \tilde{\mathbf{u}} - \epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \tilde{\Phi}_I - \nabla \tilde{P}_I \right) \delta\Phi_I d\Gamma + \int_{\Gamma} \epsilon(\tilde{\chi}) \tilde{\Phi}_I \delta(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_I) d\Gamma \\ & + \int_D \left(-\frac{1}{2\lambda^2} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Phi_R + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\Phi}_R + \nabla^2 \tilde{P}_R - \nabla \tilde{P}_R \cdot \nabla \kappa - \frac{\omega}{\lambda} \tilde{P}_I \right) \delta P_R d\Omega + \int_{\Gamma} \left(-\nabla \tilde{P}_R \cdot \mathbf{n} \right) \delta P_R d\Gamma \\ & + \int_D \left(-\frac{1}{2\lambda^2} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Phi_I + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\Phi}_I + \nabla^2 \tilde{P}_I - \nabla \tilde{P}_I \cdot \nabla \kappa + \frac{\omega}{\lambda} \tilde{P}_R \right) \delta P_I d\Omega + \int_{\Gamma} \left(-\nabla \tilde{P}_I \cdot \mathbf{n} \right) \delta P_I d\Gamma \\ & + \int_D (\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \tilde{p} - \alpha \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_D \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \delta p d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_{out}} \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{I} + \tilde{p} \mathbf{I} - \nabla \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{out}} \mathbf{n} \cdot (\tilde{p} \mathbf{I} - \nabla \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}} \delta p d\Gamma \\ & + \int_D \left\{ \alpha_{max} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}) - (\epsilon_{fluid} - \epsilon_{diel}) \nabla \tilde{\Phi}_R \cdot \nabla \Phi_R - (\epsilon_{fluid} - \epsilon_{diel}) \nabla \tilde{\Phi}_I \cdot \nabla \Phi_I \right. \\ & \quad \left. - \kappa_{max} \nabla \cdot (P_R \nabla \tilde{P}_R) - \kappa_{max} \nabla \cdot (P_I \nabla \tilde{P}_I) + \mu \right\} \delta\tilde{\chi} d\Omega \quad (30) \end{aligned}$$

ただし、 Γ は固定設計領域 D の全境界 ($\Gamma_{PEC} \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_{wall}$) を表し、各変数 X ($= \Phi_R, \Phi_I, P_R, P_I, \mathbf{u}, p$) の変動は $\delta X = (\partial X / \partial \tilde{\chi}) \delta\tilde{\chi}$ とする。ここで、 δX を含む項が消えるようにラグランジュ未定乗数を新たに随伴変数とし

て定義することにより, 次の随伴方程式とその境界条件が得られる.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\frac{1}{2\lambda^2} \mathbf{P}_\beta \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \tilde{\Phi}_\beta) + \nabla \cdot (\nabla \tilde{\mathbf{P}}_\beta) = 0 \\ -\frac{1}{2\lambda^2} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\Phi}_\beta + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\Phi}_\beta + \nabla \cdot (\nabla \tilde{\mathbf{P}}_\beta) - \nabla \tilde{\mathbf{P}}_\beta \cdot \nabla \kappa - \frac{\omega}{\lambda} \tilde{\mathbf{P}}_\gamma = 0 \\ \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \tilde{p} - \alpha \tilde{\mathbf{u}} = 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \end{cases} \quad \text{in } D \quad (31)$$

$$\tilde{\Phi}_\beta = 0, \quad -\mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{P}}_\beta = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (32)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda^2} \mathbf{P}_\beta \tilde{\mathbf{u}} - \epsilon(\tilde{\chi}) \nabla \tilde{\Phi}_\beta - \nabla \tilde{\mathbf{P}}_\beta \right) = 0 \quad \text{on } \Gamma \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_{\text{wall}} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{\text{in}}} = \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{\text{out}}}, \quad \tilde{\sigma}|_{\Gamma_{\text{in}}} = -(\tilde{\sigma} + \mathbf{n})|_{\Gamma_{\text{out}}} \quad \text{on } \Gamma_{\text{PEC}} \quad (35)$$

ここで, $\tilde{\sigma}$ は次式の随伴応力ベクトルを表す.

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{n} \cdot (-\tilde{p}\mathbf{I} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}) \quad (36)$$

したがって, 式 (30) より, 設計感度 $\bar{J}'$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \bar{J}' = \alpha_{\max} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}) - (\epsilon_{\text{fluid}} - \epsilon_{\text{diel}}) \nabla \tilde{\Phi}_R \cdot \nabla \Phi_R - (\epsilon_{\text{fluid}} - \epsilon_{\text{diel}}) \nabla \tilde{\Phi}_I \cdot \nabla \Phi_I \\ - \kappa_{\max} \nabla \cdot (P_R \nabla \tilde{P}_R) - \kappa_{\max} \nabla \cdot (P_I \nabla \tilde{P}_I) + \mu \end{aligned} \quad (37)$$

3.4 レベルセット法に基づくトポロジー最適化

Gregersen ら (2009) は, ポンプの吐出量最大化を目的として, 密度法に基づき誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプのトポロジー最適化手法を提案している. しかしながら, 得られる最適構造はグレースケールを顕著に含むと共に, 固定設計領域内に小さな誘電体領域が無数に点在するような構造が最適解として創出されることが指摘されている.

そこで本研究では, グレースケールを含まない明瞭な境界を有した最適構造を創出するために, Yamada ら (2010) が提唱するレベルセット法に基づくトポロジー最適化に基づき, 方法論の構築を行う. すなわち, 流体領域 Ω と誘電体領域 $D \setminus \Omega$, 及びそれらの境界 $\partial\Omega$ を次のスカラー関数であるレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ によって表現する.

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{for } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (38)$$

上式において, レベルセット関数が正の場合は流体領域, 負の場合は誘電体領域, 境界を零等位面とする. なお, 後述の正則化の手続きのために, 図 3 のようにレベルセット関数の上限値と下限値をそれぞれ 1 と -1 に設定している. また, 式 (15) の特性関数を, レベルセット関数を用いて次のように定義する.

$$\chi_\phi(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi < 0 \end{cases} \quad (39)$$

この特性関数 χ_ϕ を用いて最適化問題を定式化し, レベルセット法の考え方に基づき, レベルセット関数の零等位面によって境界を表現することで, 明瞭な境界を有した最適構造を創出することができる.

式 (29) で表される KKT 条件を満足するレベルセット関数 ϕ が最適解の候補となるが, これを直接導くことは困難である. したがって本研究では仮想的な時間 $\xi \in [0, \infty]$ を導入し, 時間発展方程式によりレベルセット関数を更新していくことで最適解を導く. そこで本研究では, レベルセット関数 ϕ はラグランジアン $\bar{J}'$ に比例

Fig. 3 Fixed design domain D and level set function

して駆動されるものと仮定した次の時間発展方程式を考える．

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} = -K \bar{J}'(\mathbf{x}, \xi) \quad (40)$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad (41)$$

ここで、 $K > 0$ は比例定数を表し、式 (41) は $\phi_0(\mathbf{x})$ を適当な初期値とした初期条件である．この時間発展方程式に基づきレベルセット関数を更新する場合、固定設計領域の至るところでレベルセット関数が不連続に分布することを許容してしまう．この問題を解決するため、最適化の過程における ϕ の滑らかさを確保し、過度に複雑な構造が創出されないように、 ϕ に関する拡散項を付加した次の反応拡散方程式によってレベルセット関数の更新を行う．

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} = -K(\bar{J}'(\mathbf{x}, \xi) - \tau \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \xi)) \quad (42)$$

ここで $\tau > 0$ は拡散項の影響を調整するためのパラメータであり、正則化係数と呼ぶ．また、レベルセット関数の上限値と下限値を設定していることから、 τ を含む拡散項の影響は境界近傍に限定されており、この項を付加することは陰的なペリメータ制約を与えていることに相当する．すなわち、この τ の値を変化させることによって最適構造の幾何学的な複雑さを陰的に調整することができるため、小さな誘電体領域が無数に点在するような最適解の創出を排除することが可能である．

4. 数 値 実 装 法

図 4 に本研究における最適化アルゴリズムを示す．まず、適当な初期構造を表すレベルセット関数を与える．次に、有限要素法を用いて状態場である電気場および流体場の数値解析を行い、目的汎関数を算出する．ここで、目的汎関数が収束していれば最適解が得られたと判断し、最適化を終了する．収束していなければ、有限要素法を用いて随伴場の数値解析を行う．次に設計感度を算出し、反応拡散方程式を用いてレベルセット関数を更新し、状態場の数値解析を行う手続きに戻る．以上の手続きにより、目的汎関数が収束するまでこれらの操作を繰り返し行う．

ここで、本研究における最適化計算の収束判定条件は次式とする．

$$\left| \frac{J_{n+1} - J_n}{J_n} \right| < \epsilon_{\text{opt}} \quad (43)$$

ただし、 n は最適化計算の反復数を表し、 $\epsilon_{\text{opt}} = 1.0 \times 10^{-3}$ とする．

なお、本研究では流体領域と誘電体領域の境界を陽に抽出することなくレベルセット法に基づく形状表現を用いて有限要素法による数値解析を行う．その際、最適化の過程で変化しない共通の有限要素メッシュを用いた

Fig. 4 Optimization algorithm

め，特性関数 χ_ϕ を次式に示す近似されたヘビサイド関数に置き換える (Yamada et al., 2010) .

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{for } \phi < -w \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{w} \left\{ \frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{w^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16} \frac{\phi^2}{w^2} \right) \right\} & \text{for } -w \leq \phi < w \\ 1 & \text{for } w \leq \phi \end{cases} \quad (44)$$

ここで， w はヘビサイド関数の遷移幅を表すパラメータであり， $H(\phi)$ は固定設計領域 D において連続的に分布する滑らかな関数である．

5. 数 値 計 算 例

数値例により本研究で提案する手法の妥当性と有用性の検証を行う．なお，すべての数値例における最適化に必要なパラメータとして， $\tau = 4.0 \times 10^{-4}$ ， $K = 0.8$ ， $w = 0.3$ とした．そして，レベルセット関数の初期値を $\phi_0 = 1$ に設定することにより，初期構造はすべて流体で満たされている状態として最適化を図った．四辺形二次要素を用いて流速 $\mathbf{u}$ と随伴変数 $\hat{\mathbf{u}}$ は離散化し，その他の変数はすべて四辺形一次要素を用いて離散化した．また，反応拡散方程式における仮想時間の更新幅は $\Delta\xi = 0.01$ とした．

5.1 数値例 1

初めに，図 5 に示す設計モデルに対して最適化を行った．ここでは， Γ_{in} と Γ_{out} を周期境界として，図中 x_1 方向の流量最大化問題を考える．表 1 に各物理パラメータの値を示す．また，印加する交流の周波数を $\omega = 1.0$ ，流体領域の体積の上限値を $V = 0.6 \int_D H_\phi d\Omega$ とし，要素分割に用いた固定設計領域の構造格子数は 140×140 とした．

本提案手法によって得られた最適構造を図 6(a) に示す．青色領域は誘電体領域を表し，白色領域は流体領域を示す．図に示すように，得られた最適構造は x_1 軸に対して対称であり，図 6(b) の電荷密度の分布からもわかるように，符号が逆の電荷が x_1 軸について対称に分布する．これにより， x_2 軸方向に向きが逆で，同じ正味量の流れが生じ，それらが相殺されている．また，逆向き $-x_1$ 方向への流れは，斜面近傍に誘電体片を配置されることによって，流路が狭まり，かつその誘電体小片周りに生じる誘起電荷電気浸透による流れによって，弱められていることがわかる．また，印加する交流の周波数を $\omega = 2.0, 3.0, 4.0$ として最適化を行った結果，図 7(a), (b), (c) に示す異なる最適構造がそれぞれ得られた．これにより，印加する交流周波数毎に最適な構造を創出可能であることがわかった．

なお，得られた最適構造の各目的汎関数は $f_1 = 2.50 \times 10^{-2} (\omega = 1.0)$ ， $f_2 = 2.18 \times 10^{-2} (\omega = 2.0)$ ， $f_3 = 1.90 \times 10^{-2} (\omega = 3.0)$ ， $f_4 = 1.60 \times 10^{-2} (\omega = 4.0)$ となった．この結果から，本事例において，誘起電荷電気浸透は周波数が高くなるほど流速は小さくなることがわかった．これは，周波数が高い場合，誘電体表面に形成される電気二重層における電荷密度が，飽和状態に至る前に流れが生じているためと考えられる．なお，この場合は極板の正負が頻繁に入れ替わることから，周波数を高くすることは電気分解の発生を抑制する働きがあ

Fig. 5 Design model of case 1

Table 1 Parameter values		
Symbol	Dimensionless values	Physical values
H	1.0	250 nm
L	1.0	250 nm
λ_D	0.08	20 nm
c_0	1.0	0.23 mM
V_0	1.0	25 mV
ω_0	1.0	$4 \times 10^5 \text{rads}^{-1}$
ϵ_{fluid}	1.0	$78\epsilon_0$
ϵ_{diel}	1.3×10^2	$10^4\epsilon_0$
η	1.0	10^{-3}Pas^{-1}
D_f	1.0	$2 \times 10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
κ_{max}	3.0	75 mV
α_{max}	10^5	$2 \times 10^{16} \text{Pasm}^{-1}$

(a)

(b)

Fig. 6 (a) Optimal pump structure with the velocity vector distribution ($\omega = 1.0$) (blue, solid domain; white, fluid domain); (b) distribution of charge density

(a)

(b)

(c)

Fig. 7 Comparison of optimal pump structures: (a) $\omega = 2.0$; (b) $\omega = 3.0$; (c) $\omega = 4.0$ (blue, solid domain; white, fluid domain)

る．すなわち，この結果から，液体の吐出量と，電気分解の抑制に重要となる交流周波数は相反関係にあることがわかった．

5.2 数値例 2

続いて，図 8 に示す設計モデルに対して最適化を行った．なお本事例では，電圧以外の各物理パラメータは表 1 の値を用い，電圧は $V_0 = 0.25$ とした．要素分割に用いた設計領域の構造格子数は 140×210 とした．印加する交流の周波数を $\omega = 1.0$ ，流体領域の体積の上限を $V_{\max} = 0.8 \int_D H_\phi d\Omega$ とした．

Fig. 8 Design model of case 2

得られた最適構造を図 9(a) に示す．これは，Bazant と Ben (2006) によって提案されている基本形状を用いたマイクロポンプの構造に類似しており，同じ誘電体形状が周期的に並ぶ構造が得られた．なお，本事例では図 8 に示すように， x_1 軸に対して対称な極板を周期的に配置していることから，電荷密度は 9(b) に示すように x_1 軸に対して対称な分布となった．周波数を $\omega = 3.0$ に設定した場合の最適構造を図 10(a) に示す．本事例においても，最適構造の周波数に対する依存性を確認できる．なお，両者の各目的汎関数は， $f_1 = 3.31 \times 10^{-3} (\omega = 1.0)$ ， $f_3 = 2.22 \times 10^{-3} (\omega = 3.0)$ となった．

Fig. 9 (a) Optimal pump structure with the velocity vector distribution ($\omega = 1.0$) (blue, solid domain; white, fluid domain); (b) distribution of charge density

6. 結 言

本研究では，誘起電荷電気浸透を利用したマイクロポンプのレベルセット法に基づくトポロジー最適化手法を構築した．得られた結果を以下に示す．

(1) 誘起電荷電気浸透の支配方程式を固定設計領域に拡張する方法を提案し，マイクロポンプの吐出量最大化を

Fig. 10 (a) Optimal pump structure with the velocity vector distribution ($\omega = 3.0$) (blue, solid domain; white, fluid domain); (b) distribution of charge density

目的としたトポロジー最適化問題を定式化した．

- (2) 最適化問題の定式化に基づき，設計感度を随伴変数法を用いて導出した．さらに，明瞭な境界を有した最適構造を創出するため，レベルセット法に基づく境界表現法を導入した．そして，状態場，随伴場，およびレベルセット関数の時間発展方程式の離散化に有限要素法を用いた最適化アルゴリズムを開発した．
- (3) 数値例により，本提案手法の妥当性と有用性の検証を行った．その結果，本提案手法により，所望の方向への吐出量を最大化する妥当な誘電体形状が得られることがわかった．また，交流電圧の周波数と最適構造の関係について検証を行った結果，正負の極板を一枚ずつ配置した設計モデルにおいては，最適構造が変化し，目的汎関数は無次元周波数が1に近いほど大きくなることがわかった．極板を周期的に配置した設計モデルに関しても，同様に最適構造の無次元周波数に対する依存性があることを明らかにした．なお，極板を周期的に配置したモデルに関しては，基本形状を用いた従来のマイクロポンプに類似した形状が得られることがわかった．

謝 辞

本研究の一部は JSPS 科研費 25600158 の支援を受けた．ここに記して謝意を表します．

References

- Ajdari, A., Pumping liquids using asymmetric electrode arrays, *Physical Review E*, Vol.61, No.1 (2000), p.R45.
- Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A. M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol.194, No.1 (2004), pp.363–393.
- Bazant, M. Z. and Squires, T. M., Induced-charge electrokinetic phenomena: theory and microfluidic applications, *Physical Review Letters*, Vol.92, No.6 (2004), p.066101.
- Bazant, M. Z. and Ben, Y., Theoretical prediction of fast 3D AC electro-osmotic pumps, *Lab on a Chip*, Vol.6, No.11 (2006), pp.1455–1461.
- Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, No.2 (1988), pp.197–224.
- Borrvall, T. and Petersson, J., Topology optimization of fluids in Stokes flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.41, No.1 (2003), pp.77–107.
- Fujii, G., Watanabe, H., Yamada, T., Ueta, T. and Mizuno, M., Level set based topology optimization for optical cloaks, *Applied Physics Letters*, Vol.102 (2013), p.251106.
- Gregersen, M. M., Okkels, F., Bazant, M. Z. and Bruus, H., Topology and shape optimization of induced-charge electro-osmotic micropumps, *New Journal of Physics*, Vol.11, No.7 (2009), p.075019.
- Guest, J. K. and Prévost, J. H., Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy–Stokes finite element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.66, No.3 (2006), pp.461–484.

- Kilic, M. S., Bazant, M. Z. and Ajdari, A., Steric effects in the dynamics of electrolytes at large applied voltages. I. Double-layer charging, *Physical Review E*, Vol.75, No.2 (2007a), p.021502.
- Kilic, M. S., Bazant, M. Z. and Ajdari, A., Steric effects in the dynamics of electrolytes at large applied voltages. II. Modified Poisson-Nernst-Planck equations, *Physical Review E*, Vol.75, No.2 (2007b), p.021503.
- Kondoh, T., Matsumori, T. and Kawamoto, A., Drag minimization and lift maximization in laminar flows via topology optimization employing simple objective function expressions based on body force integration, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.45, No.5 (2012), pp.693–701.
- Kontoleonos, E. A., Papoutsis-Kiachagias, E. M., Zymaris, A. S., Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C., Adjoint-based constrained topology optimization for viscous flows, including heat transfer, *Engineering Optimization*, Vol.45, No.8 (2013), pp.941–961.
- Liu, Z., Gao, Q., Zhang, P., Xuan, M. and Wu, Y., Topology optimization of fluid channels with flow rate equality constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.44, No.1 (2011), pp.31–37.
- Matsumori, T., Kondoh, T., Kawamoto, A. and Nomura, T., Topology optimization for fluid-thermal interaction problems under constant input power, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.47, No.4 (2013), pp.571–581.
- Otomori, M., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S., Level set-based topology optimisation of a compliant mechanism design using mathematical programming, *Mechanical Sciences*, Vol.2, No.1 (2011), pp.91–98.
- Otomori, M., Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Andkjær, J., A topology optimization method based on the level set method for the design of negative permeability dielectric metamaterials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.237 (2012), pp.192–211.
- Papoutsis-Kiachagias, E. M. and Giannakoglou, K. C., Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: industrial applications, *Archives of Computational Methods in Engineering*, published online (2014), doi: 10.1007/s11831-014-9141-9.
- Squires, T. M. and Bazant, M. Z., Induced-charge electro-osmosis, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.509 (2004), pp.217–252.
- Squires, T. M. and Bazant, M. Z., Breaking symmetries in induced-charge electro-osmosis and electrophoresis, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.560 (2006), pp.65–101.
- Takamura, Y., Onoda, H., Inokuchi, H., Adachi, S., Oki, A. and Horiike, Y., Low voltage electroosmosis pump for stand alone microfluidics devices, *Electrophoresis*, Vol.24, No.1–2 (2003), pp.185–192.
- Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., A level set method for structural topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.192, No.1 (2003), pp.227–246.
- Wojas, P., Micropumps—past, progress and future prospects, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol.105, No.1 (2005), pp.28–38.
- Yaji, K., Yamada, T., Yoshino, M., Matsumoto, T., Izui, K. and Nishiwaki, S., Topology optimization using the lattice Boltzmann method incorporating level set boundary expressions, *Journal of Computational Physics*, Vol.274 (2014), pp.158–181.
- Yaji, K., Yamada, T., Kubo, S., Izui, K. and Nishiwaki, S., A topology optimization method for a coupled thermal-fluid problem using level set boundary expressions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.81 (2015), pp.878–888.
- Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.199, No.45–48 (2010), pp.2876–2891.
- Zhou, S. and Li, Q., A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier–Stokes flow, *Journal of Computational Physics*, Vol.227, No.24 (2008), pp.10178–10195.