2次元象嵌構造の形状最適設計

下田 昌利^{*1}, 史 金星^{*1}, 川江 元氣^{*2}

Shape design optimization of 2-dimensional inlaid structures

Masatoshi SHIMODA^{*1}, Jin-Xing SHI^{*1} and Genki KAWAE^{*2}^{*1} Toyota Technological Institute

2-12-1 Hisakata, Tenpaku-ku, Nagoya-shi, Aichi 468-0034, Japan

^{*2} Graduate school of Toyota Technological Institute

2-12-1 Hisakata, Tenpaku-ku, Nagoya-shi, Aichi 468-0034, Japan

Received 21 January 2016

Abstract

Owing to the different mechanical behaviors of the instinct materials, inlaid structures composed of dissimilar materials have potential for industrial application, such as vibration suppression. The shape and position of inlaid components strongly affect the mechanical behaviors of inlaid structures. Thereby, we propose a shape optimization method for designing inlaid structures in terms of stiffness problem in the present work. This study focuses on the design optimization of 2-dimensional structures with inlaid components for enhancing their stiffness by optimizing the shape and position of inlaid components. We use compliance as the objective function and minimize it under the area constraint of inlaid components. The proposed shape optimization method is a type of gradient method that was named as the H^1 gradient method. We derive the shape gradient function based on the material derivative method and apply it to the proposed shape optimization method for determining the optimal shape and position of the inlaid components. Design examples of 2-dimensional inlaid structures are presented in this study to verify the effectiveness and feasibility of the proposed optimization method, and the results show that stiffness of inlaid structures can be significantly enhanced according to the shape design optimization, especially for a inlaid structure with a higher differential Young's modulus of the instinct materials.

Key words : Compliance, Shape optimization, Inlaid structure, Interface shape, Shape gradient function

1. 緒 言

象嵌構造は母材に母材とは異なる材料を埋め込んだ一種の複合構造体である。その優れた意匠性から工芸品等に多く利用されているが、工業的にも幅広く利用されている。例えば、振動特性の向上のため、制振材を母材に嵌め込んだ構造も象嵌構造とみなすことができる。象嵌構造は同一材料では達成できない力学特性を生じさせることができる他、高価な機能材料を局所的に利用し、コストを抑えながら効率的な特性向上を達成することにも寄与する。デザイン性や力学特性の向上のために用いられる象嵌構造であるが、材料境界面でのヤング率の違いが応力集中や応力不連続を招き、変形や構造全体の剛性にも影響を与える。図1は円形の埋込材料付き平板において、埋込材料のヤング率が母材のヤング率の (a) 10 倍, (b) 0.2 倍の場合と, (c) 孔が空いている場合の3パターンについて、引張荷重 (x 軸方向 : y 軸方向 = 1 : 2) を与えたときのミーゼス応力分布が母材と埋込材料とのヤング率の比によって相違することを示している。このことは埋込材料もしくは介在物の存在が、材料境界面の形状や配置を積極的に変えるにより、応力分布や剛性のコントロールが可能であることを意味し、同一材料では得

られない構造特性が得られることが期待される (Wu et al., 2016). そこで本論文では, 象嵌構造を対象に, コンプライアンスを評価関数に剛性最大化を目的とし, 埋込材料の配置位置を含む材料境界の形状設計の解法を提示することを目的とする.

Fig.1 Stress distributions of thin plate with circular dissimilar material. Tensile load is applied to the horizontal and vertical directions, in which the horizontal load is twice as the vertical load.

材料境界面を扱う研究としては境界面の亀裂近傍での応力場解析や応力特異点に関して, 数多くの研究が行われており, 例えば, Choules らは複合材料積層板の衝撃荷重下において亀裂成長を解析し, モード I 破壊における粘着領域モデルを開発している (Choules et al., 2005). 立野らは異種材料接合部の応力特異点に関して接合体強度との関係を明らかにしている (立野他, 1996). 一方, 複数の材料からなる構造体の最適化に関する研究としては, Huang らは三層構造の界面の三次元最適形状を, Levenberg-Marquardt 法を用いて求めている (Huang and Wuchiu, 2011). 畔上らは 2 種類の材料の境界面形状を変化させることである部分境界の変位を指定した変位に近づける形状同定問題の解法を提案している (畔上, 小山, 2005). Rodrigues らはレベルセット法を用いて剛性最大化を目的とした 2 種類の材料配置分布の解法を提案している (Rodrigues et al., 1999). 山本らはトポロジー最適化によりモード損失係数を最大化する制振材の最適配置問題の解法を提案している (山本他, 2014). Allaire らはレベルセット法を用いたトポロジー最適化により種々の目的関数での板・シェル構造体の最適形状を求めている (Allaire et al., 2004). また, 下田らは異種材料で構成される複合構造体の熱変位規定問題に対する解法を提案している (下田他, 2015). このようにこれまでの研究では 3 次元構造の界面形状最適化に関する研究は多くみられるが, 2 次元構造内の埋込材料との材料界面形状や位置を詳細に求める形状最適化に関する研究は行われていないようである.

そこで本論文では面内力や面外力を受ける 2 次元象嵌構造を対象に, 母材と埋込材料との界面形状を設計変数とし, 剛性が最大となる象嵌形状と位置を求めるための形状最適化手法を開発することを目的とする. 界面形状は板の面内方向に変動するものとし, コンプライアンスを目的関数とし, 埋込材料の面積を制約条件として与えるものとする. 形状最適化手法として H^1 勾配法 (力法とも呼ばれる) (畔上, 1994), (下田他, 1994) を用い, 形状のパラメータ化が不要で滑らかで詳細な界面形状の決定が可能な解法を構築する. 設計問題を分布系形状最適化問題として定式化し, 物質導関数法を適用し, 形状勾配関数を導出する. 導出された形状勾配関数を界面の面内方向に与えることで最適形状変動量を求め, 2 次元象嵌構造の材料界面の最適形状と位置を決定する.

以下の章において, まず板構造体の支配方程式と領域変動について記す. 次に, 形状最適化問題の定式化を行い, 界面形状を面内変動させるための形状勾配関数を, 物質導関数法の適用によって導出する. 続いて, H^1 勾配法の概要を示した後, 数値計算例を示す.

2. 2 次元象嵌構造体の支配方程式と領域変動

2・1 象嵌構造の支配方程式

2次元象嵌構造を図2(a)のような有界な領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を占める任意の曲率を有する線形弾性構造と仮定し、中心面の領域を A 、その境界を Γ 、板厚を h とする。ただし $(\cdot)^{(A)}$ 、 $(\cdot)^{(B)}$ のような上付き添字によって、母材 A と埋込材料 B を区別する。

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in A \subset \mathbb{R}^2, x_3 \in (-h/2, h/2)\} \quad (1)$$

この象嵌構造の応力とひずみは板曲げ理論として Reissner-Mindlin 理論を用いて膜力成分との重ね合わせで評価されるものと仮定する。ただし、膜力と曲げ力の連成は考慮しないこととする。図2(a)に示す板の中心面の位置を与える局所座標系 $(x_1, x_2, 0)$ から全体座標系 (X_1, X_2, X_3) への写像 $\varphi: (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ は区分的に滑らかであるとする。図2(b)のように局所座標系で表した変位 $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1,2,3}$ は、面内変位 $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ と面外変位 u_3 に分けられ、次式のように表される。なお、添字表記法として総和規約を使用する。

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_{0\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}_0 = \{u_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ 、 w 、 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ はそれぞれ板中心面の面内変位、面外変位と回転角を表す。

(a) Geometry of a plate in global coordinate. Ω , A and Γ denote the bounded domain, the mid plane of domain, and the boundary of A , respectively. h is the thickness.

(b) Local coordinate and DOF of a plate element. $\mathbf{u}_0 = \{u_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$, w and $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ denote the in-plane displacement vector, out-plane displacement, and vector of angle of rotation, respectively.

Fig.2 The inlaid structure consisting of plane elements

象嵌構造の状態変数 $(\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}) \in U$ に関する平衡方程式（弱形式）は3次元弾性体の平衡方程式の弱形式に式(2)、(3)の関係を代入し、平面応力状態を仮定し、板厚方向の積分を行うことにより式(4)のように表される。

$$a^{(A)}((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) + a^{(B)}((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) - h^{(A)}((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) - h^{(B)}((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = l(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}), \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \in U \quad (4)$$

ただし、 $(\cdot)$ は変分を表しており、材料 m の内力に関する双一次形式 $a(\cdot, \cdot)^{(m)}$ 、界面の境界力 $h(\cdot, \cdot)^{(m)}$ と外力に関する一次形式 $l(\cdot)$ は次式で表される。また、 $U = \{(\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}) \in (H^1(A))^5\}$ は変位の拘束条件を満たす1階の5次元ソボレフ空間を表す。

$$a^{(m)}((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = \int_{A^{(m)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(m)} \kappa_{\gamma\delta}^{(m)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{(m)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(m)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(m)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{(m)} + k c_{\alpha\beta}^{S(m)} \gamma_\beta^{(m)} \bar{\gamma}_\alpha^{(m)}) dA \quad (5)$$

$$h^{(m)}((\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = \int_{\Gamma^{(m)}} \{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(m)} \kappa_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(m)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(m)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} \bar{u}_{0\alpha}^{(m)} + k c_{\alpha\beta}^{S(m)} \gamma_{\beta}^{(m)} n_{\alpha}^{(m)} \bar{w}^{(m)}\} d\Gamma \quad (6)$$

$$l(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) = \int_A F \bar{\mathbf{w}} dA + \int_{\Gamma_g} (N_{\alpha} \bar{u}_{0\alpha} - M_{\alpha} \bar{\theta}_{\alpha} + Q \bar{w}) d\Gamma \quad (7)$$

ここで, $c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B, c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M, c_{\alpha\beta}^S$ はそれぞれ曲げ, せん断, 膜力に関する剛性テンソル, k はせん断補正係数を表す. また, $\kappa_{\alpha\beta}, \varepsilon_{0\alpha\beta}, \gamma_{\alpha}$ はそれぞれ曲率, 垂直ひずみ, 横せん断ひずみを表し, それぞれ式 (8) から式 (10) で定義される (Hughes, 1987). F は板・シェル表面に作用する単位面積当りのせん断荷重を表す. $N_{\alpha}, M_{\alpha}, Q$ はそれぞれ単位長さ当りの面内力, 曲げモーメント, せん断力を表し, 境界 Γ_g に作用するものとする. 上付き添字の $m (= A, B)$ によって母材を A , 埋込材料を B で表す. テンソルの添字表記においては空間座標に関する偏微分表記法 $\partial(\cdot)/\partial x_i = (\cdot)_{,i}$ を使用するものとする.

$$\kappa_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,\beta}^{(m)} + \theta_{\beta,\alpha}^{(m)}) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{0\alpha\beta}^{(m)} = \frac{1}{2} (u_{0\alpha,\beta}^{(m)} + u_{0\beta,\alpha}^{(m)}) \quad (9)$$

$$\gamma_{\alpha}^{(m)} = w_{,\alpha}^{(m)} - \theta_{\alpha}^{(m)} \quad (10)$$

研究対象として, 埋込材料が抜けて孔がある場合, 式 (4) の中に $a^{(B)}$, $h^{(A)}$ 及び $h^{(B)}$ の項を削除し, 単一材料の支配方程式になり, 簡略化することができる.

2・2 形状変動

図3のように領域 $\Omega^{(A)}$ と境界 $\Gamma^{(A)}$ で表された母材 A と, 領域 $\Omega^{(B)}$ と境界 $\Gamma^{(B)}$ で表された埋込材料 B との材料境界 $\Gamma^{(B)}$ が設計速度場 $\mathbf{V}$ により境界 $\Gamma_s^{(B)}$ になるものと仮定する. このとき $\Gamma^{(B)}$ から $\Gamma_s^{(B)}$ への境界形状変動は区分的に滑らかな写像 $T_s: \mathbf{X} \in \Gamma^{(B)} \mapsto \mathbf{X}_s(\mathbf{X}) \in \Gamma_s^{(B)}$, $0 \leq s \leq \varepsilon$ によって表されるとする. ε は正の整数を表し, s 回目の変動近傍での微小変動はテイラー展開後の2次以上の項を無視して, 次のように表される.

$$T_{s+\Delta s}(\mathbf{X}) = T_s(\mathbf{X}) + \Delta s \mathbf{V} \quad (11)$$

ここで, 設計速度場 $\mathbf{V}(\mathbf{X}_s) = \partial T_s(\mathbf{X}) / \partial s$ は写像 $T_s(\mathbf{X})$ のオイラー導関数として与えられる.

Fig. 3 Subdomains and boundaries of material A are defined as $\Omega^{(A)}$ and $\Gamma^{(A)}$. The interface between $\Omega^{(A)}$ and $\Omega^{(B)}$ is defined as $\Gamma^{(B)}$. $\Gamma^{(B)}$ is moved to $\Gamma_s^{(B)}$ by the in-plane variation $\mathbf{V}$.

3. 形状最適化問題と形状勾配関数

3・1 最適化問題の設定

式 (4) と埋込材料 B の面積を制約条件とし, コンプライアンスの最小化を目的とする境界 $\Gamma^{(B)}$ の設計速度場 $\mathbf{V}$ を求める分布系の形状最適化問題は次のように表される.

$$\text{Given} \quad \Gamma^{(B)}, \hat{M} \quad (12)$$

$$\text{Find} \quad \Gamma_s^{(B)} \text{ (or } V) \quad (13)$$

$$\text{that minimize} \quad l(u_0, w, \theta) \quad (14)$$

$$\text{subject to} \quad \text{Eq.(4)}, \quad (15)$$

$$\text{and} \quad M^{(B)} (= \int_{A^{(B)}} dA) \leq \hat{M}^{(B)} \quad (16)$$

ここで、 $M^{(B)}$ 、 $\hat{M}^{(B)}$ はそれぞれ埋込材料 B の面積とその制約値を表す。

3・2 形状勾配関数の導出

この問題に対するラグランジュ汎関数 L は $(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})$ を状態方程式に対するラグランジュ乗数関数、 $A_{M^{(B)}}$ を面積に対するラグランジュ乗数として、次のように表される。

$$\begin{aligned} L((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}), A_{M^{(B)}}) = & l(u_0, w, \theta) + l(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}) - a^{(A)}((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) \\ & + h^{(A)}((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) - a^{(B)}((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) \\ & + h^{(B)}((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) + A_{M^{(B)}}(M^{(B)} - \hat{M}^{(B)}) \end{aligned} \quad (17)$$

図4のように母材 A と埋込材料 B との境界における、外向き法線ベクトルをそれぞれ $\mathbf{n}^{(A)}$ 、 $\mathbf{n}^{(B)}$ とする。また、 $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^{(A)})\mathbf{n}^{(A)} = -(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^{(B)})\mathbf{n}^{(B)}$ の関係を仮定すると、 L の界面の領域変動に対する物質導関数 $\dot{L}$ は次式となる。なお、外力の作用する境界や表面は変動しないことを仮定する。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & - \int_{A^{(A)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{r(A)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{r(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{r(A)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{r(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{r(A)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{r(A)}) dA \\ & - \int_{\Gamma^{(A)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{(A)}) V_n d\Gamma \\ & - \int_{A^{(B)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{r(B)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{r(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{r(B)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{r(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{r(B)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{r(B)}) dA \\ & - \int_{\Gamma^{(B)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{(B)}) V_n d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma^{(B)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{r(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha}^{r(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{r(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha}^{r(A)} \\ & + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{r(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}^{r(A)}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma^{(B)}} \{ (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha, \eta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha, \eta}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}^{(A)} \\ & + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}_{, \eta}^{(A)}) n_{\eta}^{(A)} + (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}^{(A)}) H^{(A)} \} V_n d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma^{(B)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{r(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha}^{r(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{r(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha}^{r(B)} \\ & + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{r(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}^{r(B)}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma^{(B)}} \{ (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha, \eta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha, \eta}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}^{(B)} \\ & + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}_{, \eta}^{(B)}) n_{\eta}^{(B)} + (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}^{(B)}) H^{(B)} \} V_n d\Gamma \\ & + \dot{A}_{M^{(B)}}(M^{(B)} - \hat{M}^{(B)}) + A_{M^{(B)}} \int_{\Gamma^{(B)}} V_n d\Gamma \\ = & l(u'_0, w', \theta') + l(\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}') - a^{(A)}((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) - a^{(A)}((u_0, w, \theta), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) \\ & - a^{(B)}((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) - a^{(B)}((u_0, w, \theta), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) + \dot{A}_{M^{(B)}}(M^{(B)} - \hat{M}^{(B)}) + \langle \mathbf{Gn}, \mathbf{V} \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、 $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の関係を定義し、 $H^{(A)}$ 、 $H^{(B)}$ はそれぞれ境界 $\Gamma^{(A)}$ 、 $\Gamma^{(B)}$ の曲率を表す。また、 $\langle \mathbf{Gn}, \mathbf{V} \rangle$ は次のように表される。

Fig. 4 Outward unit normal vector $\mathbf{n}$ on the interface of $\Gamma^{(AB)}$.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{G}\mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle = & - \int_{\Gamma^{(A)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{(A)}) V_n d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma^{(B)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} \bar{\gamma}_{\alpha}^{(B)}) V_n d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma^{(B)}} \{ (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha,\eta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta,\eta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha}^{(A)} \\
 & + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha,\eta}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta,\eta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}_{,\eta}^{(A)}) n_{\eta}^{(A)} \\
 & + (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}^{(A)}) H^{(A)} \} V_n d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma^{(B)}} \{ (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha,\eta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta,\eta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha}^{(B)} \\
 & + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha,\eta}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta,\eta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}_{,\eta}^{(B)}) n_{\eta}^{(B)} \\
 & + (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}^{(B)}) H^{(B)} \} V_n d\Gamma + A_{M^{(B)}} \int_{\Gamma^{(B)}} V_n d\Gamma
 \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、境界上の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と境界の曲率 H 、及び界面での力のつりあいに関して以下の関係を考慮する。

$$\mathbf{n}^{(A)} = -\mathbf{n}^{(B)} \quad (20)$$

$$H^{(A)} = -H^{(B)} \quad (21)$$

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(A)} = -c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{\theta}_{\alpha}^{(B)} \quad (22)$$

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} \bar{u}_{0\alpha}^{(A)} = -c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} n_{\beta}^{(B)} \bar{u}_{0\alpha}^{(B)} \quad (23)$$

$$kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} \bar{w}^{(A)} = -kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} n_{\alpha}^{(B)} \bar{w}^{(B)} \quad (24)$$

また、ラグランジュ汎関数 L の状態変数、随伴変数、面積制約に関する支配方程式の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & a^{(A)}((\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) + a^{(B)}((\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) \\
 & - h^{(A)}((\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) - h^{(B)}((\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = l(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}), (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \in U, \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \in U
 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 & a^{(A)}((\mathbf{u}'_0, \mathbf{w}', \boldsymbol{\theta}'), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) + a^{(B)}((\mathbf{u}'_0, \mathbf{w}', \boldsymbol{\theta}'), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) \\
 & - h^{(A)}((\mathbf{u}'_0, \mathbf{w}', \boldsymbol{\theta}'), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) - h^{(B)}((\mathbf{u}'_0, \mathbf{w}', \boldsymbol{\theta}'), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = l(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}), (\mathbf{u}'_0, \mathbf{w}', \boldsymbol{\theta}') \in U, \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \in U
 \end{aligned} \quad (26)$$

$$A_{M^{(B)}}(\hat{M} - M) = 0, A_{M^{(B)}} > 0, M^{(B)} - \hat{M}^{(B)} \leq 0 \quad (27)$$

式(25)は式(4)と一致した状態変数の支配方程式であり、式(26)は随伴変数の支配方程式である。この問題は式(25)と式(26)が一致する自己随伴問題である。また、式(27)はそれぞれ体積制約に関する方程式である。ここで、全ての KKT 条件が満たされているとすると、式(19)は以下のように簡単に表すことができる。

$$\dot{L} = \langle \mathbf{Gn}, \mathbf{V} \rangle \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Gn}, \mathbf{V} \rangle = \int_{\Gamma^{(B)}} [& -\{ (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} \kappa_{\alpha\beta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} \varepsilon_{0\alpha\beta}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} \gamma_{\alpha}^{(A)}) \\ & - (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} \kappa_{\alpha\beta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} \varepsilon_{0\alpha\beta}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} \gamma_{\alpha}^{(B)}) \} \\ & + \{ c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} (\kappa_{\alpha\eta}^{(A)} - \kappa_{\alpha\eta}^{(B)}) + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} (\varepsilon_{0\alpha\eta}^{(A)} - \varepsilon_{0\alpha\eta}^{(B)}) + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} (\gamma_{\eta}^{(A)} - \gamma_{\eta}^{(B)}) \} n_{\eta}^{(A)} + A_{M^{(B)}}] V_n d\Gamma \end{aligned} \quad (29)$$

この問題の形状勾配密度関数 G は最終的に次式のように表される.

$$\begin{aligned} G = [& -\{ (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} \kappa_{\alpha\beta}^{(A)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} \varepsilon_{0\alpha\beta}^{(A)} + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} \gamma_{\alpha}^{(A)}) - (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(B)} \kappa_{\gamma\delta}^{(B)} \kappa_{\alpha\beta}^{(B)} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(B)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(B)} \varepsilon_{0\alpha\beta}^{(B)} + kc_{\alpha\beta}^{S(B)} \gamma_{\beta}^{(B)} \gamma_{\alpha}^{(B)}) \} \\ & + \{ c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B(A)} \kappa_{\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} (\kappa_{\alpha\eta}^{(A)} - \kappa_{\alpha\eta}^{(B)}) + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{M(A)} \varepsilon_{0\gamma\delta}^{(A)} n_{\beta}^{(A)} (\varepsilon_{0\alpha\eta}^{(A)} - \varepsilon_{0\alpha\eta}^{(B)}) + kc_{\alpha\beta}^{S(A)} \gamma_{\beta}^{(A)} n_{\alpha}^{(A)} (\gamma_{\eta}^{(A)} - \gamma_{\eta}^{(B)}) \} n_{\eta}^{(A)} + A_{M^{(B)}}] \end{aligned} \quad (30)$$

式 (30) をシェル面の面内変動に対する H^1 勾配法に適用することで象嵌形状と位置の最適形状が求められる.

4. 形状最適化手法

変動量の決定には下田によって示された板・シェル構造体のノンパラメトリック面内形状最適化手法 (下田, 2011) を用いる. この手法では板・シェル用 H^1 勾配法に基づいて形状変動を行う. H^1 勾配法は負の形状勾配関数に比例した擬似荷重を領域変動の駆動力として与え, 微小移動を繰り返すことで目的汎関数を最小値に向かって収束させる方法である. 2次元象嵌構造へ適用する場合の概念図を図5に示すが, 擬似荷重 $-\mathbf{Gn}$ は埋込材料の界面に対して与える. 以下に設計速度場 $\mathbf{V}$ の支配方程式 (速度場解析とよぶ) を示す. このとき, 母材と埋込材料の材料定数は母材に統一している. また, 母材が曲率を有している場合, その曲率を保持するため, 曲面垂直方向への変位を拘束するすべり拘束を与えることにより (下田, 2013), 本研究で開発した最適化手法をシェル象嵌構造に適用することは可能になる.

Fig.5 Schematic of the free-form optimization method for 2D structures (H^1 gradient method for shells) under the in-plane shape variation.

$$a((\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = -\langle \mathbf{Gn}, (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \rangle, (\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}) \in C_{\Theta}, \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \in C_{\Theta} \quad (31)$$

ここで $a((\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}))$ は以下のように定義される.

$$a((\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = \int_{A^{(A)} \cup A^{(B)}} (c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \kappa_{\gamma\delta} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M \varepsilon_{0\gamma\delta} \bar{\varepsilon}_{0\alpha\beta} + kc_{\alpha\beta}^S \gamma_{\beta} \bar{\gamma}_{\alpha}) dA \quad (32)$$

ここで $\mathbf{V}$ は面内速度場を表している. また, C_{Θ} は形状変動の拘束を満たす許容関数空間を表す. 式 (31) から得られた速度場を用いて領域を逐次更新することにより, 目的汎関数が減少し, 滑らかな界面を有する収束形状が得られる.

本解法の全体の流れを図6に示す. まず剛性解析を行い, 形状勾配関数を求める. 続いて, 速度場解析により設計速度場 $\mathbf{V}$ を求め, 得られた速度場を元の形状の座標に重ね合わせるにより, 形状を更新する. その際, 面積制約に違反していれば, 満たすように形状を更新する. このプロセスを収束形状が得られるまで, または回数を指定して繰り返す.

Fig. 6 Flowchart of the optimization system. After running the stiffness analysis, the shape gradient function is calculated, and then the velocity analysis for shape change is executed. Next, shape is updated by using the displacement fields of velocity analysis. If the area constraint is not satisfied, shape updating is repeated until satisfying the constraint in the inner loop. This process is repeated until converging.

Fig. 7 Initial shape of a rectangular inlaid structure composed of materials A and B . (a) shows the boundary conditions for stiffness analysis, in which the rectangular plate is fixed at the bottom and subjected to stretch loadings at the remain three sides. (b) shows the boundary conditions for velocity analysis, in which all of the four sides are fixed.

(a) Optimized shape of case ① ($E_A:E_B = 1:10$). (b) Iteration history
 Fig.8 Optimized result of case ① ($E_A:E_B = 1:10$). (a) shows the optimized interface shape of case ①. (b) shows the iteration history, in which the ratio of compliance is reduced by 8.93% normalized to the initial shape.

(a) Optimized shape of case ② ($E_A:E_B = 1:20$). (b) Optimized shape of case ③ ($E_A:E_B = 10:1$).
 (c) Optimized shape of case ④ ($E_A:E_B = 20:1$). (d) Optimized shape of case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$)
 Fig.9 Optimized interface shapes of (a) case ② ($E_A:E_B = 1:20$), (b) case ③ ($E_A:E_B = 10:1$), (c) case ④ ($E_A:E_B = 20:1$), and (d) case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$). The ratios of compliance are reduced by ② 13.83%, ③ 9.42%, ④ 16.14%, and ⑤ 23.99%, respectively, normalized to the initial shape.

5. 数値計算例

本手法の有効性と実用性を検証するため、引張荷重を受ける長方形象嵌構造及び曲げ荷重を受ける円形象嵌構造の界面形状と位置最適化問題へ適用した。以下に最適化結果と考察を示す。

5・1 引張荷重を受ける2次元象嵌構造

まずは、解析で用いた縦 60、横 100 の材料 A の薄板に埋込材料 B が埋め込まれたモデルと剛性解析時における引張荷重と拘束条件を図 7 (a)に示す。意匠デザインを意識した埋込材料モデルとなっている。板の下辺を完全拘束し、残りの辺に等しい大きさの外向き荷重を与えた。図 7 (b)は速度場解析時の拘束条件を示しており、板周囲を完全拘束した。埋込材料 B のトータルの初期面積を保持する制約条件を与えてコンプライアンス最小化を行った。なお、母材 A と埋込材料 B のヤング率の比 ($E_A:E_B$) は① 1:10 とした。図 8(a)と(b)にそれぞれ最適形状と収束履歴を示す。繰り返し計算の結果、面積制約を満たしながら、コンプライアンスは約 8.93%減少した。界面形

状は大きく変動させ、最適な形状が得られた。精度を確認するため、最適形状をリメッシュして、再計算を行った結果、リメッシュなしの場合と比較して誤差は3.5%であった。更に、このリメッシュ形状を用いて最適化を実行した結果、目的関数はほとんど減少せず、リメッシュなしの形状の妥当性が確認できた。ところで、本最適化手法は勾配法に基づく手法であり、凸性の保証のない（区分的には凸）設計空間で解探索を行うため、得られる最適形状が初期形状に依存することは否めない（Shimoda et al., 2016）。

続いて、母材 A と埋込材料 B のヤング率の比 ($E_A:E_B$) を② 1:20, ③ 10:1, ④ 20:1, ⑤ 100:1 として同様の計算を行った。図 9(a)-(d)に問題②–⑤のそれぞれの最適形状を示す。面積制約を満たしながら、コンプライアンスの減少率は異なるがいずれも減少した (② 13.83%, ③ 9.42%, ④ 16.14%, ⑤ 23.99%)。また、ヤング率比によって得られる形状が大きく異なっている。特に、母材 A と埋込材料 B のヤング率の差が大きい場合、両者のヤング率の差は界面での感度分布に影響し、大きな形状変化を生じさせ、その結果、コンプライアンスの減少率は大きくなることわかる。

(a) Optimized position of case ① ($E_A:E_B = 1:10$).

(b) Iteration history

Fig.10 Optimized result of case ① ($E_A:E_B = 1:10$). (a) shows the optimized position of material B of case ①. (b) shows the iteration history, in which the ratio of compliance is reduced by 1.82% normalized to the initial shape.

(a) Optimized position of case ② ($E_A:E_B = 1:20$).

(b) Optimized position of case ③ ($E_A:E_B = 10:1$).

(c) Optimized position of case ④ ($E_A:E_B = 20:1$).

(d) Optimized position of case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$)

Fig.11 Optimized positions of material B of (a) case ② ($E_A:E_B = 1:20$), (b) case ③ ($E_A:E_B = 10:1$), (c) case ④ ($E_A:E_B = 20:1$), and (d) case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$). The ratios of compliance are reduced by ② 1.95%, ③ 5.31%, ④ 8.57%, and ⑤ 12.74%, respectively, normalized to the initial shape.

これまでの計算では、埋込材料 B の形状と位置が同時に最適化されたが、速度解析時に埋込材料 B を剛体と仮定した形状拘束を与えることにより、埋込材料の形状を維持したまま、位置のみ変動させることも可能である。前述の問題 ①において、速度場解析の際に、埋込材料 B の形状を維持する拘束条件を加えた結果を図 10 に示す。(a)と(b)はそれぞれ最適化形状と収束履歴を示す。繰り返し計算の結果、面積制約を満たしながら、コンプライアンスは約 1.82%減少した。コンプライアンスの減少率は小さいが、狙い通り埋込材料の形状を保持したまま、位置のみ変動していることが確認できる。次に、問題② $E_A:E_B=1:20$, ③ $E_A:E_B=10:1$, ④ $E_A:E_B=20:1$, ⑤ $E_A:E_B=100:1$ に対して同様の位置最適化を行った。問題②–⑤のそれぞれの最適形状を図 11(a)-(d)に示す。コンプライアンスの減少率はそれぞれ② 1.95%, ③ 5.31%, ④ 8.57%, ⑤ 12.74%減少した。 $E_A > E_B$ の場合、埋込材料 B は上方に変動しているが、 $E_A < E_B$ の場合、埋込材料 B は下方に変動している。また、母材 A と埋込材料 B のヤング率の差が大きい場合、コンプライアンスの減少率は大きくなるがここでも確認される。

5・2 曲げ荷重を受ける 2 次元象嵌構造

図 12 に解析で用いた半径 100 の円状母材 A の中に 2 つの帯状の埋込材料 B を有した象嵌構造を示す。図 12(a) は剛性解析における曲げ荷重・拘束条件を示しており、曲げ荷重 (X_3 方向) を円板の中心に与え、円板周囲に単純支持の境界条件を設定した。図 12(b) は速度解析における拘束条件を示しており、周囲に単純支持の境界条件とした。母材 A と埋込材料 B のヤング率の比 ($E_A:E_B$) は 1:10 (問題①) として、埋込材料の初期面積を保持する制約条件を与え、コンプライアンス最小化を行った。図 13(a)と(b)にそれぞれ最適化形状と収束履歴を示す。繰り返し計算の結果、面積制約を満たしながら、コンプライアンスは約 8.05%減少した。最適化形状において埋込材料 B の形状が細長くなり、得られた最適化形状は妥当であると考えられる。

次に、母材 A と埋込材料 B のヤング率の比 ($E_A:E_B$) を② 1:20, ③ 10:1, ④ 20:1, ⑤ 100:1 のように入れ替え、同様の計算を行った。図 14(a)-(d)にそれぞれ問題②–⑤の最適形状を示す。繰り返し計算の結果、面積制約を満たしながら、コンプライアンスは② 23.41%, ③ 7.81%, ④ 9.97%, ⑤ 13.69%減少した。最適化形状では埋込材料 B が横方向に伸びる形状になっており、 $E_A < E_B$ の場合、高いヤング率を持つ 2 つの埋込材料 B は円板の弱い中央部分に寄っていて補強をしているが、 $E_A > E_B$ の場合、低いヤング率をもつ 2 つの埋込材料 B は円板の拘束がある外周側に変動していることがわかる。

Fig.12 Initial shape of a circular inlaid structure composed of materials A and B . (a) shows the boundary conditions for stiffness analysis, in which the circular plate is simply supported at the edge and subjected to an X_3 -direction load at the center. (b) shows the boundary conditions for velocity analysis, in which the circular plate is simply supported at the edge.

(a) Optimized shape of case ① ($E_A:E_B = 1:10$).

(b) Iteration history

Fig.13 Optimized result of case ① ($E_A:E_B = 1:10$). (a) shows the optimized interface shape of case ①. (b) shows the iteration history, in which the ratio of compliance is reduced by 8.05% normalized to the initial shape.

(a) Optimized shape of case ② ($E_A:E_B = 1:20$).

(b) Optimized shape of case ③ ($E_A:E_B = 10:1$).

(c) Optimized shape of case ④ ($E_A:E_B = 20:1$).

(d) Optimized shape of case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$)

Fig.14 Optimized interface shapes of (a) case ② ($E_A:E_B = 1:20$), (b) case ③ ($E_A:E_B = 10:1$), (c) case ④ ($E_A:E_B = 20:1$), and (d) case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$). The ratios of compliance are reduced by ② 23.41%, ③ 7.81%, ④ 9.97%, and ⑤ 13.69%, respectively, normalized to the initial shape.

更に、5.1 節と同様に、速度場解析の際に、埋込材料 B の形状を維持する拘束条件を与えたことにより、埋込材料 B の位置最適化を行った。問題 ① ($E_A:E_B = 1:10$) において、位置最適化結果を図 15 に示す ((a)は最適化形状, (b)は収束履歴)。繰り返し計算の結果、面積制約を満たしながら、コンプライアンスは約 26.28%減少した。コンプライアンスの減少率は小さいが、狙い通り埋込材料の形状を保持したまま、位置のみ変動していることが確認できる。続いて、問題② $E_A:E_B = 1:20$, ③ $E_A:E_B = 10:1$, ④ $E_A:E_B = 20:1$, ⑤ $E_A:E_B = 100:1$ に対して同様の位

置最適化を行った．問題②－⑤のそれぞれの最適形状を図 16(a)-(d)に示す．コンプライアンスの減少率はそれぞれ② 1.95%，③ 5.31%，④ 8.57%，⑤ 12.74%減少した．界面形状最適化の傾向と同様， $E_A < E_B$ の場合，2つの埋込材料 B は円板の中央に寄っているが， $E_A > E_B$ の場合，2つの埋込材料 B は円板の外周側に変動している．特に，問題③ $E_A:E_B = 10:1$ ，④ $E_A:E_B = 20:1$ ，⑤ $E_A:E_B = 100:1$ の最適形状で，埋込材料 B は全部円板の外側に達して，ほぼ同じ最適形状が得られた．

(a) Optimized position of case ① ($E_A:E_B = 1:10$).

(b) Iteration history

Fig.15 Optimized result of case ① ($E_A:E_B = 1:10$). (a) shows the optimized position of material B of case ①. (b) shows the iteration history, in which the ratio of compliance is reduced by 26.28% normalized to the initial shape.

(a) Optimized position of case ② ($E_A:E_B = 1:20$).

(b) Optimized position of case ③ ($E_A:E_B = 10:1$).

(c) Optimized position of case ④ ($E_A:E_B = 20:1$).

(d) Optimized position of case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$)

Fig.16 Optimized positions of material B of (a) case ② ($E_A:E_B = 1:20$), (b) case ③ ($E_A:E_B = 10:1$), (c) case ④ ($E_A:E_B = 20:1$), and (d) case ⑤ ($E_A:E_B = 100:1$). The ratios of compliance are reduced by ② 36.77%，③ 12.06%，④ 13.28%，and ⑤ 15.37%，respectively, normalized to the initial shape.

6. 結 言

本論文では母材に異なる材料を埋め込んだ2次元象嵌構造を対象に、埋込材料の面積を制約し、コンプライアンスの最小化を目的として、界面形状と埋込材料の位置最適化のための手法を提示した。界面形状の設計問題を分布系の形状最適化問題として定式化し、形状勾配関数を導出した。なお、形状変動には板・シェル用H¹勾配法を利用した。5章で示した計算例では、良好な収束と最適形状が得られ、提示した手法の有効性が確認された。本手法は、面内での変動を前提にしているため、面外変動のような劇的な剛性の向上はみられないが、設計プロセス後半における詳細設計に対して、効果を見出すことができると考えられる。また、周期的な配置を行うことにより象嵌構造の持つ本来のデザイン性に力学特性を考慮した象嵌設計も可能であると考えられる。

謝 辞

本研究は、難環境作業スマート機械技術研究センターの活動として、文部科学省の私立大学戦略的研究基盤形成支援事業の補助金にて実施を致しました。記して厚く感謝の意を表します。

文 献

- Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A. M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol.194, No.1 (2004), pp.363-393.
- 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574 (1994), pp. 1479-1486.
- 畔上秀幸, 小山悟史, 規定した変位を生む異種材料境界面の形状設計, 日本機械学会第 18 回計算力学講演論文集, Vol.5 (2005), pp.331-332.
- Choules, B. D., Moshier, M.A. and Hinrichsen, R. L., High strain rate failure of composite interfaces, 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (2005), pp.1-14.
- Huang, C. H. and Wuchiu C. T., Optimum shape design for a three layer interfacial surfaces, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol.25, No.3 (2011), pp.476-480.
- Hughes, T. J. R., The finite element method - linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall (1987).
- Rodrigues, H., Soto, C. A. and Taylor, J. E., A design model to predict optimal two-material composite structures, *Structural Optimization*, Vol.17 (1999), pp.186-198.
- 下田昌利, 板・シェル構造体の自由境界の形状設計のための形状最適化手法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.77, No.782 (2011), pp.1571-1582.
- 下田昌利, シェル構造体のフリーフォルム形状最適化手法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.79, No.797 (2013), pp.60-73.
- 下田昌利, 大谷光, 史金星, 異種材料で構成される 3 次元熱弾性構造体の界面形状同定, 日本機械学会論文集, Vol.81, No.825 (2015), DOI: 10.1299/transjsme.15-00017.
- Shimoda, M., Shimoide, K. and Shi, J. X., Structural-acoustic optimum design of shell structures in open/closed space based on a free-form optimization method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.366 (2016), pp.81-97.
- 下田昌利, 吳志強, 畔上秀幸, 桜井俊明, 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解法 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.60, No.578 (1994), pp.2418-2425.
- 立野昌義, 福澤康, 永澤茂, 高橋 治道, 佐久田 博司, 接合温度一定条件における TiB₂-Ni 接合体の界面形状選択に関する検討, 溶接学会論文集, Vol.14, No.1 (1996), pp.137-143.
- Wu, P., Zhou, D. and Liu W., 2-D elasticity solutions of two-layer composite beams with an arbitrarily shaped interface, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.40 (2016), pp.1477-1493.
- 山本崇史, 山田崇恭, 泉井一浩, 西脇 眞二, トポロジー最適化による薄板上の非拘束制振材の配置最適化, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.809 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0016.

References

- Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A. M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol.194, No.1 (2004), pp.363-393.
- Azegami, H., Solution to domain optimization problem, *Transactions of the JSME, Series A*, Vol.60, No.574 (1994), pp.1479-1486 (in Japanese).
- Azegami, H. and Koyama, S., Shape design of joint boundary between different materials conforming to prescribed deformation, *Transactions of 18th meeting of Computational Mechanics the JSME*, Vol.5 (2005), pp.331-332 (in Japanese).
- Choules, B. D., Moshier, M. A. and Hinrichsen, R. L., High strain rate failure of composite interfaces, 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (2005), pp.1-14.
- Huang, C. H. and Wuchiou C. T., Optimum shape design for a three layer interfacial surfaces, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol.25, No.3 (2011), pp.476-480.
- Hughes, T. J. R., *The finite element method - linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall (1987).
- Rodrigues, H., Soto, C. A. and Taylor, J. E., A design model to predict optimal two-material composite structures, *Structural Optimization*, Vol.17 (1999), pp.186-198.
- Shimoda, M., Numerical optimization method for designing free-boundary shape of plate and shell structures, *Transactions of the JSME, Series A*, Vol.77, No.782 (2011), pp.1571-1582 (in Japanese).
- Shimoda, M., Free-form optimization method for shell structures, *Transactions of the JSME, Series A*, Vol.79, No.797 (2013), pp.60-73 (in Japanese).
- Shimoda, M., Otani, H. and Shi, J. X., Interface shape identification of three-dimensional thermo-elastic composite structures consisting of dissimilar materials, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol.81, No.825 (2015), DOI:10.1299/transjsme.15-00017.
- Shimoda, M., Shimoide, K. and Shi, J. X., Structural-acoustic optimum design of shell structures in open/closed space based on a free-form optimization method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.366 (2016), pp.81-97.
- Shimoda, M., Wu, Z. C., Azegami, H. and Sakurai, T., Numerical method for domain optimization problems using a general purpose FEM code (Traction Method Approach), *Transactions of the JSME, Series A*, Vol.60, No. 578 (1994), pp.2418-2425 (in Japanese).
- Tateno, M., Fukuzawa, Y., Nagazawa, S., Takahashi, H. and Sakuta, H., Investigation of interface shape design for bonded TiB_2 -Ni joint at constant bonding temperature, *Transactions of the Japan Welding Society*, Vol.14, No.1 (1996), pp.137-143 (in Japanese).
- Wu, P., Zhou, D. and Liu W., 2-D elasticity solutions of two-layer composite beams with an arbitrarily shaped interface, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.40 (2016), pp.1477-1493.
- Yamamoto, T., Yamada, T., Mizui, K. and Nishiwaki, S., Optimal layout of unconstrained damping material on a thin panel by using topology optimization, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol.80, No.809 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0016.