表皮効果を考慮した導体円板とリング型磁石から構成された
垂直運動型磁気ダンパのモデル化山根 甲彰^{*1}, 高山 佳久^{*2}, 雉本 信哉^{*2}, 石川 諭^{*2}Modeling of magnetic damper composed of ring magnet and coaxially and relatively moving
conducting disk considering skin effectKosho YAMANE^{*1}, Yoshihisa TAKAYAMA^{*2}, Shinya KIJIMOTO^{*2} and Satoshi ISHIKAWA^{*2}^{*1}Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Engineering, Kyushu University
744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan^{*2}Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu University
744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan

Received 15 December 2015

Abstract

A magnetic damper composed of a permanent magnet and a conducting plate has the advantage that the magnetic damper can generate a damping force with no physically contact. The conducting plate needs to be thickened in order to obtain a stronger magnetic damping force, since the magnitude of the magnetic flux produced by a permanent magnet is limited. However, it is known that the magnitude of the magnetic damping force is limited, even if the conducting plate of the magnetic damper has a large thickness. It has been considered that skin effect by eddy currents is the cause of this limited magnetic damping force. In addition, it is known that eddy currents have a very slight effect on the natural frequency of a structure with a magnetic damper. In this paper, the coil method considering inductances is proposed as one of the modeling methods for magnetic dampers consisting of a ring magnet and a conducting disk moving relatively in an axial direction. Applying this method, a modal analysis of the free and the forced vibration of a 1-DOF system with a magnetic damper are performed, and the magnetic damping and the magnetic stiffness considering the skin effect, are introduced. Furthermore, the experiments are performed in order to confirm the practicality of the method. The analytical results are found to be in agreement with the experimental results.

Key words : Damper, Magnetic damper, Eddy current damper, Skin effect, Magnetic damping, Magnetic stiffness, Modeling, Coupled vibration, Natural frequency, Modal analysis

1. 緒 言

導電性構造物が強磁場に対して相対運動を行うと、速度起電力によって導体中に渦電流が流れ電磁力が発生する。この電磁力は一般に振動を抑える方向に発生するため、磁気減衰と呼ばれる。磁気ダンパはこの磁気減衰を利用した減衰装置であり、相対運動する導体板と磁石によって構成される。磁気ダンパは振動する機械構造物に非接触で減衰力を与えることができるため、磨耗や劣化がないという大きな特長を持つ。しかし、オイルダンパなどと比べて減衰が小さいという欠点があるため、高減衰性能をもつ磁気ダンパを設計するためのモデル化手法の開発が重要な課題となっている。著者らはこれまでに様々な磁気ダンパに対するモデル化や高性能化を行ってきた(木村他, 2012) (Takayama and Kondou, 2013) (高山他, 2010a)。本論文では特に、リング型磁石が導体円板に対して同軸方向に運動する磁気ダンパ(以後、垂直運動型磁気ダンパと呼ぶ)のモデル化について取り扱う。垂直運動型磁気ダンパについては、Sodano, Baeらによるモデル化の研究がある(Sodano et al., 2006) (Bae et al., 2009)。

導体に交流の磁場を印加する場合、交流磁場およびそれに伴って発生する誘導電流は導体内部に行くほど振幅

No.15-00659 [DOI:10.1299/transjsme.15-00659], J-STAGE Advance Publication date : 15 March, 2016

^{*1} 学生員, 九州大学大学院工学府 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)

^{*2} 正員, 九州大学大学院工学研究院

E-mail of corresponding author: k.yamane@sky.mech.kyushu-u.ac.jp

が減少し位相が遅れるという特徴がある。この現象は誘導電流による表皮効果として知られており、交流周波数が高いほど影響が顕著に現れる（砂川，1999）。この誘導電流が構造物に与える影響については、超電導磁石などの超高磁場環境下での導電性薄板構造物の変形による磁場と電場の連成現象の研究（Takagi and Tani, 1994）（Yoshida et al., 1995）があり、超高磁場環境下にある導電性薄板構造物に渦電流が流れると電磁力が発生して薄板が変形し、その変形のために薄板を流れる渦電流の分布が変化するという電磁場と構造物の変形による連成現象が起きる。このような電磁構造連成場では、磁気減衰現象の他に導電性構造物の固有振動数が増加する、すなわち磁気剛性が発生する現象が知られている（吉田，1997）（Tanaka et al., 2000）。通常の磁気ダンパの場合、超電導磁石ほど磁場強度が大きくないためこの磁気剛性はこれまで考慮されていなかった。しかし実際には、導体板中に導体の剛性を変化させるような渦電流が流れることによって磁気剛性が発生し固有振動数が変化していると考えられる。磁気剛性の影響を考慮するには、電磁場と構造を強連成して解析する必要がある。堀江らは電磁構造連成系の強連成式をモード解析する手法を提案している（堀江，仁保，1997）。堀江らの解析手法では電磁場と薄板構造物の連成サブマトリクスが等しく連成後のマトリクスは対称となるため、モード解析が容易であるという特長がある。しかし、堀江らは薄板構造物を対象としているため、一般に導電性構造物に現れる表皮効果の影響を考慮していない。一方、磁気ダンパの場合、導体板に減衰が大きくなる限界の厚さがあることが知られているが、この限界の厚さがある原因は表皮効果の影響であると考えられる。もし磁気ダンパの設計段階で導体板の限界板厚を知ることができれば、磁気ダンパの設計に大いに役立つと思われる。しかし、表皮効果の影響を考慮した磁気ダンパのモデル化の研究は著者らの知る限りほとんど行われていない。著者らは、表皮効果が磁気ダンパの磁気減衰に与える影響を考慮したモデル化手法の検討を行った（高山他，2010b）。著者らはまた、導体円板とリング型磁石から構成された軸対称垂直運動型磁気ダンパの磁気減衰に対するモデル化手法としてコイルモデル法を提案している（山根他，2014）。本論文では、コイルのインダクタンスをコイルモデル法に導入することで、表皮効果や磁気剛性の影響を考慮可能なモデル化手法を新たに提案する。特に、磁気ダンパに対する磁気剛性の影響についての研究は、著者らの知る限りこれまでない。さらに、堀江らと同様に強連成解析手法を利用して磁気ダンパと1自由度構造物の連成解析を行い、自由振動特性や強制振動による周波数応答特性に対する表皮効果の影響について考察する。また、実際に導体円板とリング型磁石から構成された垂直運動型磁気ダンパを製作して自由振動実験および強制振動実験を行い、提案モデルの妥当性を確認する。

2. 解 析

2・1 コイルモデル法による導体円板のモデル化

本節では、導体円板とリング型磁石から構成される垂直運動型磁気ダンパに対するモデル化手法として、インダクタンスを考慮したコイルモデル法を提案する。磁気ダンパは導体板中の渦電流によって生じる電磁力を減衰力として利用するが、コイルモデル法では導体円板をコイルでモデル化し、渦電流をコイルに流れる電流に置き換えられると仮定する。また、導体板に発生する交流の渦電流は、表皮効果（砂川，1999）の影響により、交流周波数が高いほど電流が減少し位相が遅れる。提案モデルでは、インダクタンスを考慮することで電流に生じる表皮効果の影響を考慮する。

本研究で対象とするリング型磁石は軸対称磁界を発生させるので、磁束密度は半径方向と軸方向の成分のみをもつ。また、リング型磁石から発生する磁気ベクトルポテンシャルは円周方向成分のみを持つ。そこで、図1のように、リング型磁石の中心を原点O、軸方向を z 軸として円筒座標系 $O-r\theta z$ をとる。そのとき、空間内の任意の点を (r, θ, z) とし、点 (r, θ, z) 上に永久磁石がつくる磁束密度ベクトルおよびその r 軸方向成分、 z 軸方向成分を、簡単のため、それぞれ $\mathbf{B}(r, z)$ 、 $B_r(r, z)$ 、 $B_z(r, z)$ と表す。また、点 (r, θ, z) 上に永久磁石がつくる磁気ベクトルポテンシャルおよびその θ 方向成分を、それぞれ $\mathbf{A}(r, z)$ 、 $A_\theta(r, z)$ と表す。

コイルモデル法では、図2および図3のように導体円板を半径の異なる複数の矩形断面コイルが同心円状および厚さ方向に重ねられたものとしてモデル化する（山根他，2014）。ここに、コイルの総数は n 本とする。 i 番目のコイルを C_i ($i=1, 2, \dots, n$)とし、コイル C_i の静止時におけるコイル矩形断面の中心の位置座標 (r, z) を (r_i, z_i) と表す。ここで、図1のように磁石が静止し、図2および図3に示した z 軸を同心軸とする円形導体コイル C_i ($i=1, 2, \dots, n$)が静止位置 (r_i, z_i) を中心として振幅 $|W_0|$ をもつ微小変位 $w = W_0 e^{i\lambda t}$ (λ は $\text{Re}[\lambda] \leq 0$ を満たす複素

数で、時刻 $t \geq 0$) で軸方向に振動するとする。このとき、コイルとともに振動する任意の位置座標 $(r, z+w)$ における永久磁石起因の磁束密度 $\mathbf{B}$ はテイラー展開によって一次近似され、

$$\mathbf{B}(r, z+w) \cong \mathbf{B}(r, z) + \frac{\partial \mathbf{B}(r, z)}{\partial z} w \quad (1)$$

で変化すると考える。このとき、磁石から発生しコイル C_i を貫く磁束の大きさを $\Phi_{i\text{Mag}}$ とすると、磁束変化量は次式で計算できる。

$$\frac{d\Phi_{i\text{Mag}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iint_{S_i} \mathbf{B}(r, z+w) \cdot \mathbf{a} dS \right) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\iint_{S_i} \mathbf{B}(r, z+w) \cdot \mathbf{a} dS \right) \frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\iint_{S_i} \mathbf{B}(r, z) \cdot \mathbf{a} dS \right) \frac{dw}{dt} \quad (2)$$

ここに、 S_i はコイルを縁とする任意の曲面、 $\mathbf{a}$ は曲面 S_i に図4のように立てた上向きの単位法線ベクトル、 dS は単位法線ベクトル $\mathbf{a}$ を定義する面積素片である。式(2)の面積分に $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ およびストークスの定理を適用する。上に述べたように $\mathbf{A}$ は軸対称場を形成し θ の関数ではないので、 $\mathbf{A} = [0, A_\theta(r, z), 0]^T$ から次式が成立する。

$$\iint_{S_i} \mathbf{B}(r, z) \cdot \mathbf{a} dS = \oint_{C_i} \mathbf{A}(r, z) \cdot d\mathbf{s} = A_\theta(r_i, z_i) 2\pi r_i \quad (3)$$

また、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ より

$$\frac{\partial A_\theta(r_i, z_i)}{\partial z} = -B_r(r_i, z_i) \quad (4)$$

が成り立つ。式(2)に式(3)、(4)を適用すれば

$$\frac{d\Phi_{i\text{Mag}}}{dt} = -2\pi r_i B_r(r_i, z_i) \frac{dw}{dt} \quad (5)$$

Fig.1 Positional relationship of ring magnet and conducting disk.

Fig.2 Cross section of ring magnet and conducting disk divided into n coils.

Fig.3 Top view of conducting disk divided into n coils.

Fig.4 Integral area of coil C_i when using *Stokes' theorem* in Eq. (3). Vector $\mathbf{a}$ is a unit normal vector to a local surface dS .

となる. さて, コイル C_j に電流 I_j が流れることによって発生する磁束のうち, コイル C_i を貫く磁束量 Φ_{ij} は次式で表される.

$$\Phi_{ij} = L_{ij} I_j \quad (6)$$

ここに, $j=i$ のとき, L_{ii} はコイル C_i の自己インダクタンス係数であり, $j \neq i$ のとき, L_{ij} はコイル C_i とコイル C_j の相互インダクタンス係数である. L_{ii} および L_{ij} の具体的な計算方法については付録で述べる. 式(6)で示した Φ_{ij} の時間変化は次式で表される.

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = L_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad (7)$$

よって, コイル C_i を貫く全磁束を Φ_i とすれば, コイル C_i に生じる誘導起電力 V_{emfi} はファラデーの電磁誘導則および式(5), (7)から次式となる.

$$V_{emfi} = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\Phi_{iMag} + \sum_{j=1}^N \Phi_{ij} \right) = 2\pi r_i B_r(r_i, z_i) \frac{dw}{dt} - \sum_{j=1}^N \left(L_{ij} \frac{dI_j}{dt} \right) \quad (8)$$

コイル C_i の抵抗を R_i とすれば, オームの法則から $V_{emfi} = R_i I_i$ が成立するので, $V_{emfi} = R_i I_i$ を式(8)に代入し整理すると次式が成立する.

$$\sum_{j=1}^N \left(L_{ij} \frac{dI_j}{dt} \right) + R_i I_i = 2\pi r_i B_r(r_i, z_i) \frac{dw}{dt} \quad (9)$$

ただし, 抵抗 R_i は, 導電率 σ , コイル断面積 A_i を用いて $R_i = 2\pi r_i / (\sigma A_i)$ と計算できる. 式(9)を $i=1, \dots, n$ について考え, 全ての式を連立させて行列表示すると次式になる.

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{I}} + \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{D}\dot{w} \quad (10)$$

ここに, $\mathbf{L}$ はインダクタンス行列, $\mathbf{R}$ はレジスタンス行列であり次式で表される.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & R_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\pi r_1 B_r(r_1, z_1) \\ \vdots \\ 2\pi r_n B_r(r_n, z_n) \end{bmatrix} \quad (11)$$

相互インダクタンス係数 L_{ij} については付録の計算式より $L_{ij} = L_{ji}$ が成り立つことから $\mathbf{L}$ は対称行列になる.

さて, 導体円板が微小変位したときに導体円板に発生する電流を $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 e^{\lambda t}$ で表すとすれば, 各コイルに流れる電流は次式で計算できる.

$$\mathbf{I} = (\lambda \mathbf{L} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{D} \dot{w} \equiv \mathbf{Q} \dot{w} \quad (12)$$

ここに, 速度 $\dot{w}$ の比例係数ベクトルを $\mathbf{Q} = (\lambda \mathbf{L} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}^T$ とおいた.

得られた電流より電磁力を計算する. 導体円板が微小振動したとき, 式(12)で示した電流 $\mathbf{I}$ によってコイルに発生する z 方向の電磁力の総和を f_c とする. ただし, f_c の正の向きは変位 w の正の向きと同じに定める. なお, r 方向に発生する電磁力はコイルを 1 周すれば打ち消しあってゼロとなるため無視できる. 電磁力 f_c は, フレミングの左手の法則および式(1)を使うと次式で表される.

$$f_c = -\sum_{i=1}^n I_i B_r(r_i, z_i + w) 2\pi r_i = -\sum_{i=1}^n \left(Q_i B_r(r_i, z_i) 2\pi r_i \dot{w} + Q_i \frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} \bigg|_{(r, z)=(r_i, z_i)} 2\pi r_i \lambda w^2 \right) \quad (13)$$

ここに、変位 w は微小であることから式(13)の右辺第二項を微小項として無視すれば電磁力 f_c は次のようになる。

$$f_c = -\left[\sum_{i=1}^n Q_i B_r(r_i, z_i) 2\pi r_i \right] \dot{w} = -\mathbf{D}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{w}} = -\mathbf{D}^T \mathbf{I} \quad (14)$$

式(14)により、インダクタンスを考慮したコイルモデル法による表皮効果を考慮した電磁力が算出できる。

2・2 コイル-構造連成方程式

本節では、磁気ダンパを取り付けた 1 自由度構造物の自由振動解および強制振動解を算出するために、コイルと構造物の連成式を導出する。図 1 で示した磁気ダンパを図 5 のように質量 m_s 、減衰係数 c_s 、ばね定数 k_s を持つ 1 自由度構造物に取り付ける場合を想定する。構造物に取り付けた導体円板の質量は m_s に含まれるとし、磁気ダンパの発生する電磁力を f_c 、質点を微小振動させる強制外力を f_s とすると、運動方程式は次のようになる。

$$m_s \ddot{w} + c_s \dot{w} + k_s w - f_c = f_s \quad (15)$$

強制外力 $f_s = 0$ としてこの系が自由振動をしているときを考える。式(15)に(14)を代入すると次式のような自由振動の運動方程式が得られる。

$$m_s \ddot{w} + c_s \dot{w} + k_s w + \mathbf{D}^T \mathbf{I} = 0 \quad (16)$$

式(10)および(16)から分かるように、コイルと構造物の方程式がそれぞれ $n \times 1$ の縦ベクトル $\mathbf{D}$ およびその転置ベクトル $\mathbf{D}^T$ を介して連成している。このようなコイルと構造物の式を強連成して解くことを考える。電磁場と構造物の強連成に関する研究として、堀江らは強磁場中における導電性薄板の振動解析を行うために 2 次元渦電流場とシェル構造物の有限要素式を強連成する手法を提案している（堀江，仁保，1997）。2 次元渦電流場とシェル構造物を連成させる場合、強連成式のマトリクスは対称となる。本論文では堀江らの手法を参考にコイルと構造物の連成を行う。堀江らと同様に補助方程式として

$$k_s \dot{w} - k_s \dot{w} = 0 \quad (17)$$

を考え、変数ベクトルを

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w & \dot{w} & \mathbf{I}^T \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

Fig. 5 A single-degree-of-freedom (SDOF) system composed of a point of mass, a spring, a dashpot and a magnetic damper. The point of mass vibrates when an external force acting on.

Fig. 6 The magnetic damper in Fig. 5 is replaced with a spring and a dashpot.

とにおいて補助方程式(17), コイルの方程式(10), 運動方程式(16)を連成すれば, 次のコイル-構造連成方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} -k_s & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \ddot{w} \\ \dot{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_s & 0 \\ k_s & c_s & \mathbf{D}^T \\ 0 & \mathbf{D} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

簡単のため, 式(19)を次のようにおく.

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (20)$$

ここで, $\mathbf{G}$ および $\mathbf{H}$ は $(n+2) \times (n+2)$ の対称正方マトリクスである. このように, コイルの方程式と構造物の方程式の連成項が $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^T$ で表されているため, 堀江らの手法と同様にマトリクスが対称の連成解析が可能となる.

2・3 自由振動解析

本節では, 図5の1自由度構造物に対して, コイル-構造連成方程式の固有値解析により自由振動解を導出することを検討する.

式(20)に対して $-\lambda \mathbf{G}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{H}\boldsymbol{\phi}$ の一般固有値解析を行う場合, $n+2$ 個の固有値とそれらに対応する固有ベクトルが得られる. ここで, 得られる固有値は, 1組の共役な複素固有値と, n 個の実固有値となる. 複素固有値とその固有モードは渦電流による減衰が考慮された構造物の振動を表し, 実固有値とそのモードは渦電流の減衰を表す(堀江, 仁保, 1997). ここで, 本論文では, 固有値の次数は, 共役複素数の固有値ペアを1次および2次とし, n 個の負の実数固有値の絶対値の小さいものから3次, 4次, $\dots$, $(n+2)$ 次と数えることとする. 実際に得られる共役な固有値ペアを $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm i\beta$ とおき, 3次以上の固有値は振動的ではないので無視すれば, 結局, 自由振動解は次式で表される.

$$w = C_+ e^{(-\alpha+i\beta)t} + C_- e^{(-\alpha-i\beta)t} \quad (21)$$

ここに, C_+, C_- は積分定数である. さて, 不減衰固有角振動数 ω_n , 減衰固有角振動数 ω_d および減衰比 ζ により表される1自由度減衰自由振動の自由振動解

$$w = C_+ e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)t} + C_- e^{(-\zeta\omega_n - i\omega_d)t}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (22)$$

と比較すれば, ω_n , ω_d および ζ は

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \omega_d = \beta, \quad \zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (23)$$

と表される. 式(23)により, 磁気ダンパを取り付けた1自由度構造物に対する自由振動特性の解析が可能となる.

2・4 強制振動解析

本節では, 図5の1自由度構造物に対して強制外力 $f_s = f_{s0} e^{i\omega t}$ が加わる場合の強制振動解および磁気ダンパの減衰係数, バネ定数をコイル-構造連成方程式のモード解析によって求めることを検討する.

電磁構造連成系の強連成方程式をモード解析する方法(連成モード合成法)は堀江らによって提案されている(堀江, 仁保, 1997). ここでは, 堀江らと同様に連成方程式のモード解析を行う. コイル-構造連成方程式(20)に強制外力 f_s を加えると次式となる.

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (24)$$

ここで、 $f = \begin{bmatrix} 0 & f_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ である。式(24)に対して固有値解析 $-\lambda G\phi = H\phi$ を行えば、固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}$ および固有モード $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_{n+2}\}$ を得る。固有モードは G に対して $\phi_i^T G \phi_j = 1$ となるよう正規化を行う。式(10)に対して $w = \Phi \xi$ と変数変換し、左から Φ^T を乗じると、

$$\Phi^T G \Phi \dot{\xi} + \Phi^T H \Phi \xi = \Phi^T f \quad (25)$$

となる。ただし、 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$ である。固有モードの直交性 ($i \neq j$ のとき $\phi_i^T G \phi_j = 0$, $\phi_i^T H \phi_j = 0$) より、式(25)は次のような $n+2$ 個の非連成な方程式となる。

$$E_{(n+2) \times (n+2)} \dot{\xi} - \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}] \xi = \Phi^T f \quad (26)$$

ここで、 $E_{(n+2) \times (n+2)}$ は単位行列である。式(26)より各モード $\xi_1, \dots, \xi_n$ の強制振動解を求めた後、各モードを合成すれば

$$w = \begin{bmatrix} w & \dot{w} & I^T \end{bmatrix}^T = \sum_{k=1}^{n+2} \left[\frac{\phi_k \phi_k^T f}{i\Omega - \lambda_k} \right] e^{i\Omega t} \quad (27)$$

式(27)より、任意周波数の強制外力による強制振動解 w が得られる。

さて、図 6 のように磁気ダンパを減衰およびばねに置き換え、式(27)のモード合成結果より減衰係数 c_c およびばね定数 k_c を算出する。減衰係数 c_c およびばね定数 k_c と電磁力 f_c の間に

$$f_c = -c_c \dot{w} - k_c w \quad (28)$$

が成立すると仮定する。式(27)の電流を用いて式(14)より電磁力 f_c を計算し、式(27)の変位 w および式(26)の関係をいれれば、任意の周波数における c_c および k_c は次式で表される。

$$c_c = \text{Im} \left[\frac{D^T I}{\Omega w} \right], \quad k_c = \text{Re} \left[\frac{D^T I}{w} \right] \quad (29)$$

よって、式(27), (29)より磁気ダンパを取り付けた 1 自由度構造物の強制振動解および磁気ダンパの減衰係数、ばね定数が算出できる。

3. 実験

3・1 自由振動

本節では、2.3 節で述べた自由振動解析の妥当性および表皮効果が自由振動特性に及ぼす影響を確認するために、行った実験の概要を説明する。

3・1・1 実験方法

図 7 に実験装置の全体図を示す。はり（材質：SUS304）の両端を支柱（材質：黄銅）に固定し、はりの中心にリング型磁石を固定した。はりの中央の位置の真横には加速度ピックアップが接着してある。はりに取り付けたリング型磁石と同心軸になるように、導体円板（材質：銅）を設置して垂直運動型磁気ダンパを構成した。磁石、はり、導体円板の詳しい諸元を表 1～3 に示す。ただし表 2 において、はりのヤング率 E および減衰係数 c_b については実験によって定めた。これらの値の決定方法については 3.1.2 節で述べる。

まず、導体円板のない状態、すなわち磁気力の働かない状態で打撃し、はりの減衰波形の FFT 結果および振幅の極大値の減少率より機械構造のみから決まる減衰比（以後、構造減衰比と呼ぶ）および固有振動数を計算した。

(Takayama and Kondou, 2013). 次に、表皮効果の影響を確認するために、磁石と導体円板の距離を 2 mm または 4 mm と一定にし、導体の厚さを $t = 2, 3, 4, 6, 8, 12$ mm の 6 種類に交換してそれぞれ減衰波形を測定し、磁気ダンパ取り付け時の減衰比（以後、総合減衰比と呼ぶ）および固有振動数を計算した。

3・1・2 はりの運動方程式

図 8 のように、断面積 $A_b (= h_b b_b)$ 、密度 ρ 、曲げ剛性 EI_b 、長さ l_b のはりの両端が完全固定されているとする。図のように、左端に静止座標系 $O-xy$ をとり、はりの中央 $x = l/2$ の位置に質量 m_M のリング型磁石が取り付けられているとする。はりの横振動の運動方程式は次式になる。

$$\rho A_b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c_b \frac{\partial y}{\partial t} + EI_b \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) = (f_c + f_s) \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (30)$$

ここに、 c_b および $\delta(x)$ は、それぞれ、機械構造のみから決まる減衰係数およびディラックのデルタ関数である。1 次モードのみが発生すると仮定してモード解析を行うと、はりの中央の変位を w とした場合の運動方程式は次式で表される。

$$(\rho A_b X_1 + m_M \Psi_1^2) \frac{d^2 w}{dt^2} + (c_b X_1) \frac{dw}{dt} + (EI_b (\lambda_1 / l)^4 X_1) w = (f_c + f_s) \Psi_1^2 \quad (31)$$

ここに、

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4.730, & \alpha_1 = \frac{\cos \lambda_1 - \cosh \lambda_1}{\sinh \lambda_1 + \sin \lambda_1} \\ Y_1(x) = \sin \frac{\lambda_1}{l} x + \alpha_1 \cos \frac{\lambda_1}{l} x - \sinh \frac{\lambda_1}{l} x - \alpha_1 \cosh \frac{\lambda_1}{l} x \\ X_1 = \int_0^l Y_1^2 dx, & \Psi_1 = Y_1\left(\frac{l}{2}\right) \end{cases} \quad (32)$$

よって、はりを 1 自由度運動方程式とみなすには

$$m_s = \frac{\rho A_b X_1 + m_c \Psi_1^2}{\Psi_1^2}, \quad c_s = \frac{c_b X_1}{\Psi_1^2}, \quad k_s = \frac{EI_b (\lambda_1 / l)^4 X_1}{\Psi_1^2} \quad (33)$$

とすればよい。なお、本節の自由振動実験では、 $f_s = 0$ とする。

導体円板のない状態、すなわち磁気力が働かない場合の 1 次の固有振動数および減衰比の実験値を 9 回測定し、平均をとったところ $f_E = 155.9$ Hz, $\zeta_E = 0.00527$ であった。式(33)より磁気力が働かない場合の固有振動数および減衰比が実験値と同じ値をとるように、はりのヤング率 E および減衰係数 c_b を $E = 158.1$ GPa, $c_b = 45.6$ N·s/m² とした（表 2）。

3・2 強制振動

本節では、2.4 節で述べた強制振動解析の妥当性および表皮効果が強制振動特性に及ぼす影響を確認するために、行った実験の概要を説明する。

3・2・1 実験方法

3.1 節で使用した磁気ダンパを有する両端固定はりの中央に図 9 のように加振機を取り付けた。加振機は WaveMaker05（旭製作所製）を用いた。導体板を取り外した状態および表 3 の導体円板のうち導体厚さ $t = 2, 4, 6$ mm のものを取り付けた状態ではりを 50~250 Hz の範囲で正弦波加振し、加振機可動部に貼り付けた加速度ピックアップからはりの加速度応答を得た。ここに、磁石と導体との距離 d は 2 mm とした。次に、加振機

に何も取り付けない状態で $50 \sim 250$ Hz の範囲で稼働させ、可動部の加速度 $\ddot{w}$ を得ることで加振力 f_s を算出した。以上の実験から得た加速度応答および加振力より、はりに対するコンプライアンスのゲイン $|G(\Omega)|$ を得た。ここで、 $G(\Omega) = w/f_s$ である。

Fig. 7 Experimental setup of free vibration test.

Table 1 Physical properties of the ring magnet.

Kind of magnet		Neodymium
Dimensions	Inside diameter d_M [m]	50×10^{-3}
	Outside diameter D_M [m]	80×10^{-3}
	Height h_M [m]	18×10^{-3}
Residual magnetic flux density B_{res} [T]		1.26
Mass of magnet and fixture m_M [kg]		0.472

Table 2 Physical properties of the beam.

Material		SUS304
Dimensions	Length l_b [m]	420×10^{-3}
	Height h_b [m]	20×10^{-3}
	Width b_b [m]	10×10^{-3}
Young modulus E [GPa]		158.1
Moment of inertia of area I_b [m ⁴]		1.67×10^{-9}
Damping coefficient c_b [N · s/m ²]		45.6
Density ρ [kg/m ³]		7930
Experimental natural frequency f_E [Hz]		155.9

Table 3 Physical properties of the conducting disk.

Kind of conductor		Copper
Dimensions	Inside diameter d_C [m]	8×10^{-3}
	Outside diameter D_C [m]	100×10^{-3}
	Thickness t [m]	2, 3, 4, 6, 8, 12 $\times 10^{-3}$
Electric conductivity σ [S/m]		5.80×10^7

Fig. 8 Definition of coordinate for calculations of bending vibration of the beam.

Fig. 9 Experimental setup of forced vibration test.

Fig. 10 Definition of coordinate for calculations of bending vibration of the beam with a modal exciter.

3・2・2 加振機を取り付けたはりの運動方程式

加振機による加振力 f_s の算出方法について示す. 図 8 のはりに対して図 9 のように加振機を取り付けたとき, 加振機を図 10 のようにモデル化する. m_p はピストンの質量, m_v は加振機可動部の質量, k_v は加振機可動部をホールドするばねのばね定数を示す. このとき, 角振動数 Ω における加振力 f_s は, 次式となる.

$$f_s = (m_v + k_v / \Omega^2) \ddot{w}_v \quad (34)$$

加振機に何も取り付けない場合の加振機可動部の加速度 $\ddot{w}_v$ を計測することにより, 加振力 f_s を算出する. ピストンの質量は $m_p = 0.019 \text{ kg}$, 加振機のパラメータは加振機仕様より $m_v = 0.167 \text{ kg}$, $k_v = 68600 \text{ N/m}$ を用いる. また, 運動方程式の各パラメータは次式のようになる.

$$m_s = \frac{\rho A_b X_1 + (m_M + m_v + m_p) \Psi_1^2}{\Psi_1^2}, \quad c_s = \frac{c_b X_1}{\Psi_1^2}, \quad k_s = \frac{EI_b (\lambda_1 / l)^4 X_1 + k_v \Psi_1^2}{\Psi_1^2} \quad (35)$$

4. 考 察

4・1 自由振動における実験と解析の比較および考察

本節では, 2.3 節に示した自由振動解析と 3.1 節に示した自由振動実験の結果を比較しモデルの妥当性を確認する. さらに, 表皮効果が自由振動に及ぼす影響について述べる.

図 7 に示した実験装置において, 磁石と導体円板の距離 d を 2 mm, 4 mm で一定にし, 導体板の板厚を変えて解析および実験から算出した減衰比および固有振動数を, それぞれ図 11 および図 12 に示す. 図 11 において, 実験から得られた磁気ダンパを構成していない場合の構造減衰比を記号*で示し, 磁気ダンパを構成した場合の構造減衰比と磁気ダンパの減衰比の和 (総合減衰比) を記号×で示す. また, 式(23)の ζ を使って計算した総合減衰比を記号◆として示す. ただし, 導体をコイルに分割する際, 各コイルの断面形状が 1 辺 0.5 mm の正方形断面となるように分割して計算を行った. 図 11 において, 板厚 12 mm まで減衰比の実験値と解析値は定量的に良く一致しており, 提案モデルの妥当性が確認できる. また, 導体厚さが $t > 3 \text{ mm}$ では減衰比の値が下がっているの

Fig. 11 Comparison of analytical results with experimental results of damping ratio when the distance d between magnet and conductor is 2 mm or 4 mm with the magnetic damper. Because of skin effect, damping ratio becomes the maximum value when thickness of conductor is 3 mm. Analytical results agree well to the experimental results.

Fig. 12 Comparison of analytical results with experimental results of natural frequency when distance d between magnet and conductor is 2 mm or 4 mm with the magnetic damper. Because of skin effect, natural frequency is gradually higher. Analytical results agree to the experimental results.

で、この実験装置の磁気ダンパを構成する導体円板に最適な板厚が存在することがわかる。さらに、 $t > 3 \text{ mm}$ では導体円板が厚くなるほど実験・解析ともに一定値に収束していく傾向がある。これは厚さが増えるにしたがって遠方につくる磁石の磁束密度が小さくなり、得られる減衰力が小さくなっていくためである。実際に $t = 12 \text{ mm}$ を超える場合の減衰比の収束値を提案モデルにより計算すると、磁石と導体円板の距離 d が 2 mm のとき $\zeta = 0.0193$, 4 mm のとき $\zeta = 0.0128$ が得られる。

図 12 において、測定した減衰波形から求めた電磁力が働かない場合の固有振動数を記号＊、磁気ダンパを構成した場合の固有振動数を記号×で示す。また、式(23)の ω_d を使って計算した固有振動数を記号◆で示す。図 12 において、板厚 12 mm まで実験値と解析値を比較すると定量的に一致しており、モデルの妥当性が確認できる。また、図 12 の実験結果を見ると、磁気ダンパを取り付けたことによって固有振動数の上昇が見られ、磁気ダンパによるばね力の影響が確認できる。さらに、固有振動数も減衰比と同様に厚さの増加により一定値に収束していく傾向がある。これは厚さが増えるにしたがって遠方につくる磁石の磁束密度が小さくなり、得られるばね力が小さくなっていくためである。実際に $t = 12 \text{ mm}$ を超える場合の固有振動数の収束値を提案モデルにより計算すると、磁石と導体円板の距離 d が 2 mm のとき $\omega_d / (2\pi) = 158.6 \text{ Hz}$, 4 mm のとき $\omega_d / (2\pi) = 157.5 \text{ Hz}$ が得られる。

以上のような最適な減衰を得る厚さの存在やばね力の出現は表皮効果の影響であり、このような現象が生じる理由は 4.3 節で述べる。なお、図 11 の減衰比に関しては解析値が過大評価、図 12 の固有振動数に関しては解析値が過小評価となっている。解析値に誤差を生じさせる要因としては、透磁率 μ , 導電率 σ , 残留磁束密度 B_{res} が考えられる。このうち、銅の透磁率 μ は真空の透磁率 μ_0 にほぼ等しく、導電率 σ は焼鈍標準軟銅 (IACS) の値を用いているため、本論文の解析結果に誤差を生じさせているとは考え難い。一方、残留磁束密度 B_{res} を本論文では 1.26 T としているが、使用した磁石の性能は市販品につき $1.25 \sim 1.29 \text{ T}$ の中でばらつくことが分かっており、これが減衰比・固有振動数に誤差を生じさせている要因として考えられる。しかし、 B_{res} の増加・減少は減衰比、固有振動数両方の増加・減少に対応し、 B_{res} の誤差のみでは減衰比が過大評価かつ固有振動数が過小評価となっている要因が説明できないため、これらの定性的な傾向の原因は現状では不明である。

4・2 強制振動における実験と解析の比較および考察

本節では、2.4 節に示した強制振動解析と 3.2 節に示した強制振動実験の結果を比較しモデルの妥当性を確認する。さらに、表皮効果が強制振動に及ぼす影響について述べる。

図 13 にはりを加振機で振動させて得られたコンプライアンスのゲイン $|G(\Omega)|$ の実験値、図 14 に解析値を示す。図 13, 14 左図は $50 \sim 250 \text{ Hz}$ における応答、図 13, 14 右図は左図の $140 \sim 160 \text{ Hz}$ の部分を拡大したものである。図 13, 14 において、黒点および黒線は導体円板がなく電磁力が働かない、すなわち構造減衰および構造の復元力のみが働く状態での周波数応答を示す。また、磁石と導体円板の距離を 2 mm と固定し、導体厚さ t を $2, 4, 6 \text{ mm}$ とした時の周波数応答をそれぞれ青、赤、緑の点または実線で表す。

図 13, 14 とともに、導体厚さ $2, 6 \text{ mm}$ よりも 4 mm のほうがピークが低下していることから、自由振動と同様に表皮効果の影響によって磁気ダンパを取り付ける構造物の加振周波数に応じた最適な導体厚が存在することが分かる。さらに、導体の厚さが厚くなるほどピーク周波数が高周波数側にずれることも分かる。これは、磁気ダンパによって発生するばね力が原因だと考えられる。これらの減衰・ばねの詳細な考察は 4.3 節で述べる。なお、図 13 に示した実験と図 14 に示した解析のコンプライアンスのピークを比較すると、実験の方が磁気ダンパを構成しない場合で約 2 倍、磁気ダンパを構成した場合で約 5 倍大きくなっている。さらに、ピークだけでなく全体にわたって図 14 に示した解析結果に比べて図 13 の実験結果の方がコンプライアンスが大きくなっている。これは、加振機やピストンを集中質量やばねとして考慮したはりのモデル化に問題があると考えられる。

4・3 磁気ダンパの減衰係数・ばね定数と表皮効果の関係に関する考察

本節では、磁気ダンパの減衰係数およびばね定数の周波数特性を示し、さらに表皮効果との関係について考察する。

図 15 に、導体厚さ t が $2, 4, 6 \text{ mm}$ の磁気ダンパに対して、式(29)で計算した減衰係数 c_c の周波数特性を示す。いずれの導体厚さでも周波数が上昇するにつれて減衰が低下することがわかる。さらに、 100 Hz から 200 Hz までの間に各厚さでの減衰係数 c_c の大きさが逆転している。すなわち、加振周波数によって減衰係数が最大となる

導体厚さが異なることが分かる。4.1 節で示した自由振動の減衰比や 4.2 節で示した周波数応答において最適な導体厚さが存在したのは、このような減衰係数の周波数特性が原因である。

図 16 に、導体厚さ t が 2, 4, 6 mm の磁気ダンパに対して、式(29)で計算したばね定数 k_c の周波数特性を示す。

Fig. 13 The left figure is experimental compliance magnitude $|G(\Omega)|$ of the beam in the range of frequencies of 50–250 Hz. The right figure is the magnified figure in the range of frequencies of 140–160 Hz. Because of skin effect, the peak is lowest when thickness of conductor t is 4 mm. The peaks shift to the high-frequency side if the conductor becomes thicker.

Fig. 14 The left figure is analytical compliance magnitude $|G(\Omega)|$ of the beam in the range of frequencies of 50–250 Hz. The right figure is the magnified figure in the range of frequencies of 140–160 Hz. Because of skin effect, the peak is lowest when thickness of conductor t is 4 mm. The peaks shift to the high-frequency side if the conductor becomes thicker.

Fig. 15 Analytical frequency characteristics of damping coefficient of the magnetic damper in the range of frequency 0–500 Hz. Damping coefficients are positive values and decrease if the frequency becomes higher.

Fig. 16 Analytical frequency characteristics of spring constant of the magnetic damper in the range of frequency 0–500 Hz. Spring constants are positive values and increase if the frequency becomes higher.

この図より、加振周波数が低い場合、磁気剛性の影響が小さいが、加振周波数が上昇するにつれてばね定数 k_c が大きくなっていき、磁気剛性の影響が大きくなる事が分かる。また、300Hz 付近で導体厚さ t が 4 mm と 6 mm でのばね定数の大きさが逆転していることから、減衰係数と同様に周波数によってばね定数が最大となる導体厚さが異なることも分かる。4.1 節で示した自由振動の固有振動数および 4.2 節で示した強制振動の共振周波数が導体厚さ 2, 4, 6 mm の順で増加しているのは、図 16 より動作周波数 156 Hz 付近におけるばね定数の大きさが導体厚さ 2, 4, 6 mm の順で増加していることが原因である。

ここで、減衰係数およびばね定数が図 15, 16 のような周波数特性を持つ理由を、表皮効果を考慮するために導入したインダクタンスの特性より考察する。一般にインダクタンスは交流電圧に対して電流の位相を遅れさせるとともに、インピーダンスの増加により電流振幅を減少させる特性がある。この特性は交流周波数が高いほど顕著となる。よって、導体厚さを一定として周波数を高くすると、電流振幅の減少によって減衰係数が低下し、電流の位相遅れの増加によりばね定数が増加すると考えられる。よって、各厚さでの減衰係数、ばね定数の周波数特性が図 15, 16 のようになると考えられる。さらに、コイルモデルにおいて周波数を一定とし導体を厚くした場合、コイルの本数の増加により各コイルが受けるインダクタンスの影響が増加するため、電流の位相遅れおよび振幅減少が顕著となる。したがって、ある導体厚さまでは厚さが増加するほどコイルの本数が増え減衰力が増加するが、各コイルに流れる電流の振幅減少の影響がコイル本数の増加の影響を上回ると減衰力が低下するため、図 11 のように導体厚さに対して減衰係数の極大値が存在すると考えられる。また、導体厚さが増加すると電流の位相遅れ成分によってばね力が増加するが、ある厚さ以上では電流振幅の減少の影響が顕著となり、ばね定数も極大値を持つと考えられる。よって、減衰係数およびばね定数が図 15, 16 のように動作周波数に応じた最大値を持つ。

4・4 最大の減衰係数を得る導体厚さの決定方針

4.3 節において各周波数において最大の減衰係数を得る導体厚さがあることを述べた。よって、実際に使用する場合は周波数 Ω で動作した場合の最適導体厚さを知る必要がある。本節では最適厚さの決定方針について述べる。

周波数 Ω で磁場変動が生じている場合の表皮効果の影響の大きさを表すパラメータとして、表皮厚さがある。表皮厚さとは、半無限導体に一樣な交流磁場が印加された場合、導体内に生じる誘導電流の振幅が $1/e$ に減衰し、位相が 1 rad 遅れる厚さを表す (砂川, 1999)。表皮厚さは真空の透磁率 μ_0 、導電率 σ を用いて次式で表される。

$$\delta(\Omega) = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\Omega}} \quad (36)$$

δ を超える導体厚に位置する電流は位相が 1 rad 遅れることから、図 2 のコイル断面において導体底面から $\delta\pi/2$ 以上上に位置するコイルに流れる電流のほとんどは負の減衰として作用するため、導体厚さが $\delta\pi/2$ を超えると減衰係数は低下していく。これより板厚を $\delta\pi/2$ にしたときに減衰係数が最大になると考えられるが、実際には 4.3 節で述べたように、板厚増加に伴うインピーダンスの増加により電流振幅が小さくなる事が影響し、 $\delta\pi/2$ よりも小さな板厚において最大の減衰係数が得られる。定量的に最適な値を求めるには、板厚を $\delta\pi/2$ より若干小さい範囲に対して本論文の提案手法を用いて計算し、最適な減衰係数を求めればよい。実際に 150 Hz における $\delta\pi/2$ を式(36)より計算すれば 8.5 mm であり、3.2 節の実験条件のもとで本論文の提案手法を用いて計算した最大減衰係数を得る導体厚さは 3.3 mm となる。

5. 結 言

導体円板とリング型磁石から構成された軸対称の垂直運動型磁気ダンパに対して、表皮効果や磁気剛性の影響を調べるために、コイルのインダクタンスを考慮したコイルモデル法を提案した。提案モデルにより、磁気ダンパを構成する導体板の表皮厚さの影響が評価できるので、最適な厚さを持つ導体板から構成された磁気ダンパの設計が可能になる。さらに、磁気ダンパと 1 自由度構造物の強連成式を用いて自由振動解析および強制振動解析

を行い、板厚が大きくなると渦電流の表皮効果の影響が現れるため、各周波数に対して最大の減衰係数が得られる最適な導体厚さがあることを示した。この最適導体厚さは表皮厚さよりも小さくなるため、磁気ダンパの設計を行う際は表皮厚さ以下の範囲で提案モデルを用いて最適厚さを調べる方法が有効である。実際に、磁気ダンパを製作して自由振動実験および強制振動実験を行ったところ、解析結果と実験結果は定量的に良く一致した。

付 録

(1) 磁束密度の計算方法

図 17 のように、外半径 a_o 、内半径 a_i 、厚さ L のリング型磁石に対して、磁石の中心を原点とした軸対称の円筒座標系 $O-rz$ をとる。磁石は z 方向成分のみを持つ磁化ベクトル $\mathbf{M}$ で一様に磁化されており、 z 方向成分の大きさは $M_z = B_{res}/\mu_0$ である。ここで B_{res} は磁石の残留磁束密度、 μ_0 は真空の透磁率を表す。

一様に磁化された永久磁石がつくる磁場は、その磁石の周りを流れる表面電流がつくる磁場と等価であることが知られている（飯田，2013）。そこで、リング型磁石の外周と内周を流れる互いに向きの反対な面電流がつくる磁束密度を計算すれば、永久磁石がつくる磁場が求められる。ここで、面電流密度は $J = M_z$ である。本論文の理論では r 方向磁束密度のみを用いるため、座標 (r, z) に 2 つの面電流がつくる磁束密度の r 方向成分を計算すると次式となる（Callaghan and Maslen, 1960）。

$$B_r(r, z) = \frac{B_{res}}{\pi} \left[\sqrt{\frac{a}{r}} \left[\frac{2-k^2}{2k} K(k) - \frac{E(k)}{k} \right] \right]_{l=-\frac{L}{2}}^{l=\frac{L}{2}} \bigg|_{a=a_i}^{a=a_o} \quad (37)$$

ここに、

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad k^2 = \frac{4ar}{(z-l)^2 + (a+r)^2} \quad (38)$$

である。ここで、 $K(k)$ 、 $E(k)$ は第 1 種、第 2 種の完全楕円積分であり、 k は完全楕円積分の母数である。

(2) 相互インダクタンス係数の計算方法

図 18 のように半径 r_i 、 r_j の 2 本の円形コイル C_i 、 C_j が中心距離 z を隔てて同軸上に配置されている。これらのコイルどうしの相互インダクタンス係数は、第 1 種、第 2 種の完全楕円積分を用いて次式で計算できる（後藤，山崎，1970a）。

$$L_{ij} \equiv L_{ij}(r_i, r_j, z) = \mu_0 \sqrt{r_i r_j} \left[\frac{2-k_{ij}^2}{k_{ij}} K(k_{ij}) - \frac{2E(k_{ij})}{k_{ij}} \right] \quad (39)$$

ここに、

Fig. 17 A ring magnet for calculation of magnetic flux.

Fig. 18 Two coils for calculation of mutual inductance.

Fig. 19 A coil for calculation of self inductance.

$$k_{ij}^2 = \frac{4r_i r_j}{(r_i + r_j)^2 + z^2} \quad (40)$$

である。

(3) 自己インダクタンス係数の計算方法

自己インダクタンス係数はコイルの断面形状を考慮して計算する。しかし、矩形断面を持つコイルの自己インダクタンスを解析的に求めるのは一般に困難であり、Lyle の近似式や Weinstein-Stefan の近似式などこれまでに多くの近似式が提案されている（柁川，海保，1995）。これらの近似式より自己インダクタンス係数を求めることもできるが、式が煩雑であるため、本論文ではコイル矩形断面を円形断面とみなして簡易的に計算する。円形断面は断面の中心位置および断面積が矩形断面と等しくなるようにとる。ここで、自己インダクタンス係数はコイル円環内部の空気領域を貫く磁束のみを考慮した外部インダクタンス係数 L_{ie} と導体内部を貫く磁束のみを考慮した内部インダクタンス係数 L_{ic} の和で表される。図 19 に、外部インダクタンス係数 L_{ie} を計算するときに必要なコイル半径 r_i およびコイルの内半径 r_j を示す。ここに、 r_i はコイルの軸中心から断面重心までの距離、 r_j は空気領域の半径を表す。外部インダクタンス係数 L_{ie} は、半径 r_i のコイルが半径 r_j の空気領域を貫く磁束によるインダクタンスを意味し、相互インダクタンスの式(39)で計算できる。内部インダクタンス係数 L_{ic} については、簡単に計算できる円形断面導体に対する内部インダクタンスの式を使うことにし、次式で計算する（後藤，山崎，1970b）。

$$L_{ic} = \frac{\mu_0(2\pi r_i)}{8\pi} = \frac{\mu_0 r_i}{4} \quad (41)$$

自己インダクタンス係数 L_i は、これらの和 $L_i = L_{ic} + L_{ie}$ から計算する。

文 献

- Bae, J. S., Hwang, J. H., Park, J. S. and Kwang, D. G., Modeling and experiments on eddy current damping caused by a permanent magnet in a conductive tube, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.23 (2009), pp.3024–3035.
- Callaghan, E. E. and Maslen, S. H., The magnetic field of a finite solenoid, *NASA Technical Note D-465* (1960).
- 後藤憲一，山崎修一郎，詳解 電磁気学演習，共立出版 (1970a)，p.284.
- 後藤憲一，山崎修一郎，詳解 電磁気学演習，共立出版 (1970b)，p.285.
- 堀江知義，仁保知也，磁気減衰振動問題における連成モード合成法，*日本機械学会論文集 C 編*，Vol.63, No.609 (1997)，pp.49–55.
- 飯田修一監訳，＜復刻版＞ パークレー物理学コース 電磁気，丸善出版 (2013)，pp.550–554.
- 柁川一弘，海保勝之，矩形断面円筒形コイル用自己インダクタンス計算式の適用範囲について，*低温工学*，Vol.30, No.7 (1995)，pp.324–332.
- 木村貴裕，高山佳久，近藤孝広，雉本信哉，組み合わせ磁石を用いた磁気ダンパの研究（基本ハルバツハ配列磁石を用いた磁気ダンパ），*日本機械学会論文集 C*，Vol.078, No.789 (2012)，pp.387–396.
- Sodano, H. A., Bae, J. S., Inman, D. J. and Belvin, W. K., Improved Concept and Model of Eddy Current damper, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.128 (2006)，pp.294–302.
- 砂川重信，理論電磁気学 第3版，紀伊国屋書店 (1999)，pp.179–184.
- Takagi, T. and Tani, J., Dynamic Behavior Analysis of a Plate in Magnetic Field by Full Coupling and MMD Methods, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.30, No.5 (1994)，pp.3296–3299.
- Takayama, Y. and Kondou, T., Magnetic damper consisting of a combined hollow cylinder magnet and conducting disks, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.135 (2013)，051007.
- 高山佳久，近藤孝広，松本和貴，雉本信哉，磁気ダンパにおける磁束の表皮効果の影響，*日本機械学会 Dynamics & Design Conference 2010 CD-ROM 論文集* (2010b)，講演番号 521.
- 高山佳久，末岡淳男，近藤孝広，中村研介，円形コイルと円柱磁石で構成された磁気ダンパ，*日本機械学会論文集 C 編*，Vol.76, No.771 (2010a)，pp.209–215.
- Tanaka, Y., Horie, T. and Niho, T., Simplified analysis method for vibration of fusion of reactor components with magnetic

damping, Fusion Engineering and Design, Vol.51–52 (2000), pp.263–271.

山根甲彰, 高山佳久, 近藤孝広, 雉本信哉, 石川諭, 木庭洋介, 円形導体板とリング磁石から構成された垂直運動型磁気ダンパのモデル化, 日本機械学会 Dynamics & Design Conference 2014 USB 論文集 (2014), 講演番号 420.

吉田義勝, <講座>装置における過渡電磁解析 IV 5.渦電流・構造物連成解析, プラズマ・核融合学会誌, Vol.73, No.1 (1997), pp.83–90.

Yoshida, Y., Miya, K. and Demachi, K., Study of magnetic damping effect on dynamic deflection of fusion reactor first wall, Fusion Engineering and Design, Vol.27 (1995), pp.473–480.

References

- Bae, J. S., Hwang, J. H., Park, J. S. and Kwang, D. G., Modeling and experiments on eddy current damping caused by a permanent magnet in a conductive tube, Journal of Mechanical Science and Technology, Vol.23 (2009), pp.3024–3035.
- Callaghan, E. E. and Maslen, S. H., The magnetic field of a finite solenoid, NASA Technical Note D-465 (1960)
- Goto, K. and Yamazaki, S., Electromagnetism Exercise (1970a), Kyoritsu Shuppan Co., Ltd., p.284 (in Japanese).
- Goto, K. and Yamazaki, S., Electromagnetism Exercise (1970b), Kyoritsu Shuppan Co., Ltd., p.285 (in Japanese).
- Horie, T. and Niho, T., Analysis of magnetic damping problem by the coupled mode superposition method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.63, No.609 (1997), pp.49–55 (in Japanese).
- Iida, S., Berkeley Physics Course Electricity and Magnetism 2nd edition (2013), Maruzen Publishing Co., Ltd., pp.550–554 (in Japanese).
- Kajikawa, K. and Kaiho, K., Usable ranges of some expressions for calculation of the self-inductance of a circular coil of rectangular cross section, TEION KOGAKU (Journal of Cryogenics and Superconductivity Society of Japan), Vol.30, No.7 (1995), pp.324–332 (in Japanese).
- Kimura, Y., Takayama, Y., Kondou, T. and Kijimoto, S., Study on magnetic damper composed of combined magnets (Magnetic damper composed of basic halbach magnet arrays), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.78, No.789 (2012), pp.387–396 (in Japanese).
- Sodano, H. A., Bae, J. S., Inman, D. J. and Belvin, W. K., Improved concept and model of eddy current damper, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.128, (2006a), pp.294–302.
- Sunagawa, S., Theoretical Electromagnetics 3rd edition (1999), Kinokuniya Co., Ltd., pp.179–184 (in Japanese).
- Takagi, T. and Tani, J., Dynamic behavior analysis of a plate in magnetic field by full coupling and MMD methods, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.30, No.5 (1994), pp.3296–3299.
- Takayama, Y. and Kondou, T., Magnetic damper consisting of a combined hollow cylinder magnet and conducting disks, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.135, 051007 (2013).
- Takayama, Y., Kondou, T., Matsumoto, K. and Kijimoto, S., Influence of magnetic skin effect on magnetic damper, CD-ROM Proceedings of Dynamics and Design Conference 2010 (2010b), 521 (in Japanese).
- Takayama, Y., Sueoka, A., Kondou, T. and Nakamura, K., Magnetic damper consisting of circular coil and columnar magnet, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.76, No.771 (2010a), pp.209–215 (in Japanese).
- Tanaka, Y., Horie, T. and Niho, T., Simplified analysis method for vibration of fusion of reactor components with magnetic damping, Fusion Engineering and Design, Vol.51–52 (2000), pp.263–271.
- Yamane, K., Takayama, Y., Kondou, T., Kijimoto, S., Ishikawa, S. and Koba, Y., Modeling of magnetic damper composed of a conducting disk and a ring magnet moving perpendicularly to the disk, USB Proceeding of Dynamics & Design Conference 2014 (2014), 420 (in Japanese).
- Yoshida, Y., Magnetomechanical coupled analysis of fusion-reactor components, Journal of Plasma and Fusion Research, Vol.73, No.1 (1997), pp.83–90 (in Japanese).
- Yoshida, Y., Miya, K. and Demachi, K., Study of magnetic damping effect on dynamic deflection of fusion reactor first wall, Fusion Engineering and Design, Vol.27 (1995), pp.473–480.