空気圧で浮上する平板の動的安定性と
励振メカニズムの考察武田 真和^{*1}, 渡辺 昌宏^{*2}

Dynamic stability and exciting mechanism of a plate supported by air pressure

Masakazu TAKEDA ^{*1} and Masahiro WATANABE ^{*2}^{*1,*2} Aoyama Gakuin Univ. Dept. of Mechanical Engineering
5-10-1 Fuchinobe, Chuo-ku, Sagami-hara-shi, Kanagawa 252-5258, Japan

Received 11 January 2016

Abstract

This paper presents experiments and an analysis on the self-excited vibration of a plate supported by air pressure. The instability conditions are examined using a theoretical analysis considering the effect of air compressibility in a chamber. The system's characteristic equation is derived from the plate motion coupled with equations of the gap flow between the plate and the chamber surface. The vibration characteristics and the unstable conditions of the self-excited vibration are examined through experiments. The unsteady fluid force acting on the plate (bottom surface) is investigated by measuring the unsteady pressure. The local work done by the unsteady fluid force is also clarified. Lastly, the unstable mechanism of the self-excited vibration is discussed based on the theoretical model and experimental results.

Key words : Self-excited vibration, Plate, Vibration characteristics, Unsteady fluid force, Unstable mechanism

1. はじめに

鋼板やガラスなど（以下、平板と呼ぶ）の搬送には、チャンバに設けた孔やスリットから供給される空気の圧力により平板を浮上させて搬送を行う空気圧浮上搬送装置が利用されている（下川他, 1994a, 1994b; 下川, 神山, 1996）。また、火力発電所や製鉄所などでは、空気圧によりベルトを浮上させて積載物（石炭やコークスなど）を搬送する空気浮上式コンベアが利用されている（石原, 2007）。このような機械は、空気圧を利用して非接触搬送を行うことから、ローラーを用いた従来の搬送装置に比べて、騒音および消費エネルギーが小さい特徴を有している。

一般に、空気圧を利用して軸を支持する静圧空気軸受は、小さな孔から供給される低流量の空気の静圧を利用して軸を支持しており、その浮上変位は非常に小さい。このため、孔が粉塵などで詰らないよう、クリーンな環境下での使用が要求される。一方、上述の空気圧浮上搬送装置においては、鋼板やガラス表面の傷のリスクを低減するために、空気の流量を大きくし浮上変位を大きく設定することが多い。また、空気浮上式コンベアでは、使用環境がクリーンでないことから、目詰まりを避けるために、空気を供給する孔やスリットの断面積を大きく設定する必要がある。しかしながら、このような使用条件下において、空気圧で浮上する平板に激しい自励振動が発生することが報告された（石原, 2007）。この自励振動の発生は、生産性の低下や騒音問題を招くため、自励振動の振動特性と発生条件および励振メカニズムを解明することが必要である。

これまでに、下川ら（下川他, 1994a, 1994b; 下川, 神山, 1996）は、空気圧で浮上する鋼板を対象に、浮上力と鋼板の浮上量を理論解析と実験により調べている。また、Chang ら（Chang and Moretti, 2000）は空気圧で浮上する平板を対象に、平板下側を流れる空気の定常圧力を理論解析と実験により調べている。一方、自励振動に関

しては、大森ら（大森, 小林, 2000, 2001）は、空気浮上式コンベアを対象に動的安定性解析を行い、ベルトの弾性変形と空気のすき間流れが連成することで自励振動が発生することを示している。また、石原ら（石原, 2007; Ishihara, 2008; 石原, 榮藤, 2010; Ishihara and Eto, 2011）は、実機サイズの空気浮上式コンベアに発生する自励振動の振動特性を実験的に調べ、空気の圧力変動がベルトの振動変位に対して位相進みになることが、自励振動発生の原因であることを明らかにした。また、空気圧で浮上する平板の動的安定性を実験と解析により調べ、このような簡単な体系においても平板に上下方向（浮上方向）の自励振動が発生することを示した。さらに、自励振動は平板下側を流れる空気の流れに起因した、すき間流れ励起振動（稲田, 葉山, 1987）であることを示した。

ところが、一般的な空気圧浮上搬送装置やコンベアの構造は、空気を装置全体で均一に供給するために、配管から送られた空気をチャンバに蓄えてから供給する構造となっており、このチャンバ内の空気の圧縮性の影響も系を不安定化する可能性がある。静圧空気軸受では、空気を供給する配管の途中に設けたチャンバは、系を安定化する（森, 森, 1966; 森他, 1966）が、高剛性化のために設けたポケット内空気の圧縮性の影響は系を不安定化し、ニューマティックハンマと呼ばれる自励振動が発生する（Licht et al., 1958; Licht, 1961）。葉山ら（葉山, 平田, 1977）は、容器とフリーピストンからなる体系においては、容器内空気の圧縮性に起因して自励振動が発生することを明らかにした。このことから、上述の空気圧で浮上する平板、および空気圧浮上搬送装置やコンベアのような体系においても、空気供給部に設けたチャンバ内の空気の圧縮性の影響により、系が不安定化する可能性がある。

そこで、本研究では、空気圧で浮上する平板について、チャンバ内の空気の圧縮性を考慮した簡易解析モデルを構築し、解析と実験により系の安定性を調べた。そして、条件によっては、このような体系においてもチャンバ内の空気の圧縮性に起因して、自励振動が発生することを示した。実験では平板（下部表面）に作用する非定常圧力を測定し、空気圧による流体力仕事分布（エネルギー収支）を調べることで、励振メカニズムを考察した。さらに、解析モデルを基に自励振動の励振メカニズムと重要なパラメータを考察した。

2. 主な記号

A	: 絞り部の面積 $A=2Bh$	Q	: スリットを通過する空気流量
A_e	: 等価面積	Q_g	: すき間内の単位幅当たりの空気流量
B	: スリットの長さ	Q_s	: チャンバに供給される空気流量
C_d	: 流量係数	Re	: レイノルズ数
c	: 減衰係数	s	: ラプラス変数
D	: チャンバの長さ	T	: 振動周期
D_p	: 平板の長さ	t	: 時間
d	: スリットの幅	V	: チャンバ内部の体積
F	: 平板に作用する流体力	ζ	: 減衰比
g	: 重力加速度	λ	: 壁面摩擦係数
h	: 平板の浮上変位	ν	: 空気の動粘性係数
K_e	: 空気の体積弾性係数	ρ	: 空気の密度
k	: バネ定数	τ	: 時定数
$2L$	: チャンバの幅	ω	: 角振動数
L_p	: 平板の幅	ω_n	: 固有角振動数
M	: 平板と積載物の合計質量		
P	: チャンバ内の圧力		
P_a	: 大気圧		
P_{g0}	: すき間入口の圧力		
P_g	: すき間内の圧力		

3. 安定性解析

3・1 安定性解析の主な流れ

本研究では、自励振動の発生条件を導出すること、さらに自励振動の励振メカニズムを考察することを目的に、簡易 2 次元解析モデルに基づく安定性解析を行った。

安定性解析の主な流れは、まず流体系の基礎式と平板の運動方程式を摂動法により線形化し、状態量を定常項と非定常項に分離する。定常流体力と平板の運動のつり合いからなる定常方程式から、定常項である平板の浮上変位とすき間内定常圧力を求める。一方、非定常方程式は、ラプラス変換することで、時間領域からラプラス変数 s 領域に変換する。ここで、非定常方程式は式中に定常項を含むため、上述の定常方程式から求めた定常項（平板の浮上変位とすき間内定常圧力）を代入して式を整理することで、平板の振動に関する特性方程式を求める。特性方程式にラウス・フルビッツ法を適用することで、自励振動が発生する条件を求める。

3・2 解析モデル

図 1 に解析モデルを示す。また、図 2 に平板下側のすき間における空気の流れと座標系を示す。座標系は横方向に x 軸、鉛直方向に z 軸を定める。平板はチャンバ上面中央のスリットから供給された空気の圧力により浮上する。また、上述した空気圧浮上搬送装置やコンベアにおいては、鋼板やベルトは搬送方向の張力および減衰に起因するバネ特性とダンパ特性を有するため、本解析モデルにおいても、バネとダンパを付加する。

解析は簡易化のために、平板は弾性変形せず上下方向に並進振動するとする。また、平板下側のすき間における空気の流れは、横方向（ x 軸方向）に流れ、空気の圧縮性を無視した 1 次元すき間流れとし、流体慣性を無視した準定常状態を仮定する。ただし、チャンバ内部の体積は大きく、チャンバ内の流れにおいては、空気の圧縮性を考慮する。

Fig. 1 Schematic illustrations of the analytical model.

Fig. 2 Schematic illustration of one-dimensional gap flow.

3・3 流体系の基礎式

図2に示すような平板とチャンバ上面間のすき間における空気の流れの基礎式について考える．ここで，チャンバ上面と平板の間のすき間を流れる（奥行方向）単位幅当たりの流量を Q_g とし，スリットから流出する空気の流量 Q とする．また，スリットの長さを B とすると，スリットからすき間へ流れる空気の連続の式は，以下のように表すことができる．

$$Q = 2Q_g B \quad (1)$$

空気の流れは，準定常状態を仮定する．すき間幅は平板の浮上変位であり h で表す．すき間内圧力を P_g ，空気の密度を ρ ，壁面摩擦係数を λ とすると，すき間内の空気の圧力勾配と壁面摩擦のつり合いから，空気の流れの基礎式は以下のように得られる．

$$\frac{dP_g}{dx} = -\rho \frac{\lambda}{4} \frac{Q_g^2}{h^3} \quad (2)$$

また，空気の動粘性係数を ν とすると，狭い壁面間を流れる流体のレイノルズ数は， $Re = Q_g / \nu$ で定義される．ここで，空気の流れは， $Re \leq 1300$ では層流， $Re > 1300$ では乱流となる（下山，山田，1957）．以下の安定性解析および実験における空気流量の範囲では， $Re \leq 1300$ であるため，流れは層流であり，壁面摩擦係数を以下のように与える．

$$\lambda = 48 / Re \quad (3)$$

なお，空気流量が増加すると，流れは層流ではなく乱流となる．以下の安定性解析では，流れは層流と仮定するが，乱流の場合は，式（3）ではなく乱流の式を用いることで，自励振動が発生する条件を求めることができる．

また，すき間入口の圧力を $P_{g0}(t)$ ，大気圧を $P_a (= 0)$ とすると，すき間内の圧力の境界条件は，以下のように表記できる．

$$P_g(d/2, t) = P_{g0}(t), \quad P_g(L, t) = P_a = 0 \quad (4)$$

境界条件を考慮して，式（2）を流れ方向（ x 方向）に $d/2 \sim L$ の範囲で積分すると，すき間入口の圧力 P_{g0} は，以下のように求まる．ただし，ここではスリット幅 d はチャンバの幅 $2L$ に対して十分に小さいとした．

$$P_{g0}(t) = \frac{\rho \lambda Q_g^2}{4h^3} \left(L - \frac{d}{2} \right) \approx \frac{\rho \lambda Q_g^2}{4h^3} L \quad (5)$$

チャンバ内の流れは空気の圧縮性を考慮する．チャンバの内部圧力と体積を P ， V とし，チャンバに流入する空気の流量を Q_s ，流出する流量を Q ，体積弾性係数を K_e とすると，圧縮性を考慮したチャンバ内の空気の流れの連続の式は，以下のように得られる．ここで，連続の式は断熱変化を仮定し，またチャンバ内の流れは，チャンバの体積が大きいため，チャンバ上面と平板の間のすき間を流れる空気の流れに比べて，速度が十分に小さいと仮定する．

$$\frac{V}{K_e} \frac{dP}{dt} = Q_s - Q \quad (6)$$

図3にスリット部の概略図を示す．ここで，スリットの幅 d に対してすき間幅 h が小さいため，主にすき間入口（赤線部付近）で（自成絞りによる）圧力降下が生じる．このことから，すき間入口部における圧力差とスリットを通過する空気の流量 Q の関係式は，以下のように与えられる．

$$Q = C_d A \sqrt{2(P - P_{g0}) / \rho} \quad (7)$$

ここで、式中の A は、すき間入口部（絞り部）の面積を表し、スリットの長さ B とすき間幅 h を用いて、 $A = 2Bh$ で与えられる。また、 C_d は流量係数を表す。

Fig. 3 Schematic illustrations of air flow through the slit.

3・4 平板の運動方程式

平板の浮上変位、平板質量（平板と積載物の合計質量）、減衰係数、バネ定数をそれぞれ h , M , c , k とし、重力加速度を g とすると、平板の運動方程式は、以下のように得られる。

$$M\ddot{h} + c\dot{h} + kh + Mg = 2B \int_0^L P_g(x, t) dx = A_e \cdot P_{g0}(t) \quad (8)$$

上式において、右辺 ($A_e \cdot P_{g0}(t)$) は平板に作用する流体力であり、式 (2), (4), (5) より得られる。ここで、 A_e は等価面積であり、スリット幅 d がチャンバの幅 $2L$ に対して十分に小さいとすると、以下のように与えられる。

$$A_e = 2B \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \quad (9)$$

3・5 定常方程式と非定常方程式

得られた流体および平板の運動方程式の変数を、摂動法を用いて定常項と非定常項に分離すると、定常方程式は以下のように得られる。ここで、記号 $-$ は定常成分を表す。

$$\bar{Q} = 2\bar{Q}_g B, \quad \bar{P}_{g0} = \rho \frac{\lambda L}{4} \frac{\bar{Q}_g^2}{h^3}, \quad \bar{Q} = Q_s, \quad \bar{Q} = C_d A \sqrt{2(\bar{P} - \bar{P}_{g0})/\rho}, \quad k\bar{h} + Mg = A_e \cdot \bar{P}_{g0} \quad (10)$$

定常項である平板の浮上変位、定常圧力と定常流量は上式より求まる。

また、非定常方程式は、以下のように得られる。ここで、記号 Δ は非定常成分を表し、記号 $\sim$ はラプラス変換した変数であることを表す。

$$\Delta \tilde{Q} = 2\Delta \tilde{Q}_g B, \quad \frac{\Delta \tilde{P}_{g0}}{\bar{P}_{g0}} = -3 \frac{\Delta \tilde{h}}{\bar{h}} + \frac{\Delta \tilde{Q}_g}{\bar{Q}_g}, \quad \frac{V}{K_e} \Delta \tilde{P} \cdot s = -\Delta \tilde{Q} \quad (11)$$

$$\frac{\Delta \tilde{Q}}{\bar{Q}} = \frac{\Delta \tilde{h}}{\bar{h}} + \frac{\Delta \tilde{P} - \Delta \tilde{P}_{g0}}{2(\bar{P} - \bar{P}_{g0})}, \quad (Ms^2 + cs + k)\Delta \tilde{h} = A_e \cdot \Delta \tilde{P}_{g0}$$

3・6 安定判別

非定常方程式 (式 (11)) を整理することで, 平板の振動に関する特性方程式は, 以下のように得られる.

$$Ms^2 + cs + k = \frac{-\varepsilon + (\gamma\tau - \varepsilon\beta)s}{1 + (\beta + \tau)s} \quad (12)$$

式 (12) の右辺は, 平板に作用する流体力を表し, 式中の τ , ε , β , γ は, 以下のように与えられる.

$$\tau = \frac{\bar{P}_{g0}V}{K_e Q_s}, \quad \varepsilon = \frac{3A_e \bar{P}_{g0}}{h}, \quad \beta = \frac{2V(\bar{P} - \bar{P}_{g0})}{K_e Q_s}, \quad \gamma = \frac{2A_e(\bar{P} - \bar{P}_{g0})}{h} \quad (13)$$

ここで, 不安定条件に関して一般性をもたせるために, 式 (12), (13) を無次元化すると, 無次元化した特性方程式は以下のように得られる. 式中の ω_n は系の固有角振動数 ($=\sqrt{k/M}$) を表し, ζ は構造系の減衰比を表す. また, $\wedge$ は無次元数であることを表す.

$$\hat{s}^2 + 2\zeta \hat{s} + 1 = \frac{-\hat{\varepsilon} + (\hat{\gamma}\hat{\tau} - \hat{\varepsilon}\hat{\beta})\hat{s}}{1 + (\hat{\beta} + \hat{\tau})\hat{s}} \quad (14)$$

$$\hat{s} = s/\omega_n, \quad \hat{\tau} = \tau\omega_n, \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon/k, \quad \hat{\beta} = \beta\omega_n, \quad \hat{\gamma} = \gamma/k \quad (15)$$

式 (14) をラプラス変数に関して整理すると, 以下の 3 次の特性方程式が得られる.

$$a_3 \hat{s}^3 + a_2 \hat{s}^2 + a_1 \hat{s} + a_0 = 0 \quad (16)$$

式中の係数 $a_0 \sim a_3$ は以下のように与えられる.

$$a_0 = 1 + \hat{\varepsilon}, \quad a_1 = (1 + \hat{\varepsilon})\hat{\beta} + (1 - \hat{\gamma})\hat{\tau} + 2\zeta, \quad a_2 = 1 + 2\zeta(\hat{\beta} + \hat{\tau}), \quad a_3 = \hat{\beta} + \hat{\tau} \quad (17)$$

式 (16) にラウス・フルビッツ法を適用すると, 自励振動が発生する条件は以下のように得られる.

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0 \quad (18)$$

さらに, 5 章で励振メカニズムを考察するために, ここでは, すき間入口で生じる圧力降下がなく ($\hat{\beta} = 0$, $\hat{\gamma} = 0$), 構造減衰比 ζ が小さいと仮定した条件式を求める. このとき, 式 (17) および式 (18) より, 自励振動が発生する条件は, 以下のように得られる.

$$2\zeta(1 + \hat{\tau}^2) - \hat{\varepsilon}\hat{\tau} < 0 \quad (19)$$

なお, 以下の安定性解析では, 自励振動発生領域を調べるために, すき間入口で生じる圧力降下, および構造減衰比 ζ を考慮した式である式 (17) を用いて, 計算を行った. そして, 質量 M を変化させて自励振動が発生する臨界流量を求めた.

3・7 計算パラメータ

解析に用いた主なパラメータを表 1 に示す. 構造減衰比 ζ は, 平板の打撃試験より実験的に求めた値である. また, 流量係数 C_d は, すき間入口部 (絞り部) の前後で圧力を測定し, その圧力差から実験的に求めた値である.

Table 1 Parameters used in the calculation.

Spring constant k	[N/m]	$4.97 \times 10^4 \sim 40.2 \times 10^4$
Chamber volume V	[m ³]	5.6×10^{-3}
Slit length B	[mm]	360
Chamber width $2L$	[mm]	156
Fluid density ρ	[kg/m ³]	1.2
Kinematic viscosity ν	[m ² /s]	1.5×10^{-5}
Damping ratio ζ		0.07
Flow coefficient C_d		0.85
Gravity acceleration g	[m/s ²]	9.81

4. 実験装置および測定方法

図 4 と図 5 に実験装置の概略図と写真を示す. また, 図 6 にチャンバの写真を, 図 7 に平板表面の写真を示す. 実験の主なパラメータを表 2 に示す. 実験では, ブロワから送られた空気はチャンバに蓄えられた後, チャンバ上部の中央に設けたスリット (図 6 参照) から流出する. そして, このスリットから流出する (すき間に供給される) 空気の圧力により平板が浮上する. 平板はコイルバネとリニアベアリングにより上下方向に動くように支持されている. チャンバに供給される空気の流量 Q_s は, 配管に設置した流量計 (図 4 の①, 日本フローセル社製 NFHT-R-O-O, NFHT-R-O-U) で測定した. 平板の上に載せた重り (図 4 の②) の大きさを調整することで, 質量 M (平板と積載物の合計質量) を変化させた. また, コイルバネを交換することで, バネ定数 k を変化させた. 平板の浮上変位および自励振動の振動変位は, 渦電流式ギャップセンサ (図 4 の③, パナソニック電工 SUNX 社製 GP-A12ML) を用いて測定した.

また, 本研究では, 自励振動発生時における平板の振動変位と, すき間内およびチャンバ内の空気の圧力変動を同時測定することで, 平板に作用する流体力による局所的仕事を調べ, 励振メカニズムを考察した. 実験では, 圧力センサ (図 4 の④, 日本電産コパル社製 PA-400-101G-10) により, 平板表面 (図 7 参照) に設けた孔を通して, すき間内の空気の圧力変動を測定した. 平板表面における圧力は, 多点の位置で測定した. ここで, 測定点は, 図 7 の横方向 (x 方向) に, スリット付近の領域で 3mm 間隔, チャンバ上面の領域で 6mm 間隔, チャンバ上面から外れた領域では 9mm 間隔とした. 奥行方向 (y 方向) には 30mm 間隔とした.

振動変位および圧力変動は, 後述する図 11 より, ほぼ正弦波で振動することから, 位相平均法を用いて, 平板表面上多点の圧力変動を計測した. 図 8 に, 位相平均法を用いた測定システムの概略図を示す. この位相平均法による測定では, ギャップセンサと圧力センサにより, 平板の振動変位と平板表面上の圧力変動を同時測定する. ここで, チューブを用いて, 圧力センサと接続する孔を変更しながら, 平板表面上の各点で, 振動変位と圧力変動を同時測定する. このとき, 平板の振動変位を基準 (参照信号) として, 1 周期を 16 分割した各位相において, 圧力の値を平均化することで, 平板表面上の圧力変動を求めた.

また, チャンバ側面に設けた孔を通して, チャンバ内部の空気の圧力変動も測定した.

ここで, 測定した圧力変動は大気圧を基準として測定したことから, すき間内の圧力変動は平板に作用する単位面積当たりの流体力を表す. このため, 流体力による 1 周期当たりの局所的仕事 E_{local} (流体力の仕事分布) は, 圧力変動の振幅 $\bar{P}_i$, 振動変位の振幅 $\bar{X}$, および (振動変位に対する圧力変動の) 位相差 ϕ を用いて, 以下のように求まる. ここで, 添字 i は平板表面上の圧力測定点の番号であり, 以下の式から求まる E_{local} は, 平板表面上の流体力による局所的仕事の分布を表す.

$$E_{local} = \oint P_i \dot{X} dt = \bar{P}_i \cdot \bar{X} \cdot \pi \sin \phi \quad [\text{J/m}^2] \quad (20)$$

上式で定義した流体力による局所的仕事が正の領域を調べることで、自励振動を励起している圧力変動が、すき間内のどこで発生しているのか（励振エネルギーが流入する場所）を明らかにすることができる。

Fig. 4 Schematic illustration of the experimental apparatus.

Fig. 5 Photograph of the experimental apparatus.

Fig. 6 Photograph of the chamber.

Fig. 7 Photograph of the plate.

Fig. 8 Measuring system using a phase average method.

Table 2 Parameters of the experiments.

Inflow rate Q_s	[m ³ /min]	0.03~0.60
Spring constant k	[N/m]	$4.97 \times 10^4 \sim 40.2 \times 10^4$
Plate mass M	[kg]	3.0~20.7
Chamber volume V	[m ³]	5.6×10^{-3}
Slit width d	[mm]	6
Slit length B	[mm]	360
Chamber width $2L$	[mm]	156
Chamber length D	[mm]	426
Plate width L_p	[mm]	400
Plate length D_p	[mm]	600

5. 実験および解析結果

5・1 浮上特性

図9に、実験と解析により得られた平板の浮上変位を示す。図より、空気流量が増加すると、平板の浮上変位は増加することがわかる。また、平板質量が大きいほど、浮上変位は小さい。

実験値と解析値は、空気流量が大きい領域で定性的に一致しているが、空気流量が小さい領域では定量的な誤差が生じている。特に、空気流量が小さく平板質量が大きい場合に、実験値は解析値に対して小さく、大きな差がある。これは、平板質量が大きくなると、平板に載せた重り（平板端部2箇所、図4の②）による板の曲げ変形（湾曲）が大きくなり、すき間内の流れが（奥行き方向の流れも加わった）二次元的な分布になったことが理由であると考えられる。特に、流量が小さく浮上変位が小さい場合に、板の曲げ変形の影響は相対的に大きくなる。解析では、すき間内の流れを、奥行き方向の流れを無視した一次元流れと仮定して定式化しており、この違いが誤差の原因であると考えられる。

Fig. 9 Floating gap of the plate with increasing flow rate for $k = 28.5 \times 10^4$ N/m.

5・2 振動特性

図10に、実験で得られた、空気流量に対する平板の振動変位のRMS値の変化、およびその振動数の変化を示す。ここでは、代表的な結果として、平板質量 $M = 11.1$ kg、バネ定数が $k = 4.97 \times 10^4$ N/m（図10(a)）と $k = 28.5 \times 10^4$ N/m（図10(b)）の場合を示す。図より、流量が増加すると、ある臨界流量を境に平板の振動が大きくなり、自励振動が発生することがわかる。ここで、臨界流量は明瞭に判別できる。また、臨界流量より大きな流量では、流量の増加に伴って、自励振動の振幅は少しずつ増加するが、その振動数はほぼ一定である。バネ定数が小さい場合（図10(a)）と大きい場合（図10(b)）を比較すると、バネ定数が大きい場合の方が、臨界流量は大きく、自励振動の振動数は高い。

図 11 に、自励振動発生時の平板の振動変位と、チャンバ内の圧力変動の時刻歴波形を示す。これらの波形は、フィルタを通していない時刻歴波形である。ここでは、代表例として、平板質量 $M = 11.1\text{kg}$ ，バネ定数 $k = 4.97 \times 10^4 \text{ N/m}$ の場合における結果を示す。さらに、比較のために、平板の浮上変位を $\bar{h} = 0.30\text{mm}$ に固定して計測したチャンバ内の圧力変動を、図 11(b) に黒の破線で示す。図より、自励振動発生時、平板の振動変位とチャンバ内の圧力変動は、ほぼ正弦波で振動していることがわかる。一方、平板を固定して計測した圧力変動は、自励振動発生時の圧力変動に対して十分に小さいことから、ブロウ (図 4 参照) の圧力脈動は小さいことがわかる。

Fig. 10 RMS displacement and corresponding frequency with increasing flow rate for $M = 11.1 \text{ kg}$.

Fig. 11 Time histories of plate displacement and chamber internal pressure for $k = 4.97 \times 10^4 \text{ N/m}$, $M = 11.1 \text{ kg}$, $Q_s = 0.60 \text{ m}^3/\text{min}$.

5・3 自励振動発生領域

図 12 に平板質量 M と空気流量 Q_s を変化させた場合の自励振動発生領域を示す。図中の曲線は解析計算により得られた臨界条件を示し、曲線の右側の領域は自励振動が発生する不安定領域を、左側の領域は安定領域を示している。また、図中の×と●は実験結果を示しており、×は安定状態、●は自励振動が発生したことを示している。図より、空気流量が増加すると、平板に自励振動が発生することがわかる。また、平板質量が大きくなると自励振動発生領域が広くなり、低流量で自励振動が発生することがわかる。一方、バネ定数が小さくなると、自励振動発生領域が広くなり、平板質量が小さい領域で自励振動が発生する。

これらの結果では、計算値と実験値には定量的な差異がある。これは、解析計算において、すき間の流れを 1 次元かつ準定常状態と仮定したことが主な原因であると思われる。一般に、平行流路のすき間の流れにおいては、すき間壁面の振動により流路軸方向に流れが誘起されてスクイーズ効果が生じる。そして、このスクイーズ効果に起因して、すき間壁面には正の付加減衰力が生じる（稲田、葉山, 1987）。しかしながら、本解析では、準定常状態を仮定し、スクイーズ効果に起因した正の付加減衰力を無視したため、実験と比較して自励振動発生領域が広くなったと考えられる。また、計算値と実験値の差は、空気流量が小さい領域での定常浮上変位が定量的に合わないこと（図 9 参照）にも起因している。このため、定量的かつ精緻な自励振動発生領域を示すためには、すき間流れを奥行き方向の流れも考慮した 2 次元すき間流れとして取り扱い、安定性解析を行う必要があると思われる。

Fig. 12 Critical flow rate Q_{s-cr} as a function of plate mass M for various spring constant k .

5・4 すき間内の非定常圧力分布

実験で測定した平板下部に作用する非定常圧力の時間変化を図 13 に示す。図は 1 周期 T を 8 分割して表示している。圧力変動の大きさは、平板表面上に色と変位で表示しており、その振幅は 1 周期における最大値で正規化して（最大値を 1 で）表示している。また、平板表面上にはチャンバ領域（ $x/L = \pm 1$, $y/B = \pm 0.59$ ）を実線で表示している。図より、圧力変動が大きい領域と小さい領域があることがわかる。特に、スリット直上付近の

圧力が大きく変動していることがわかる。一方、スリットから離れるほど圧力変動が小さくなり、チャンバ領域から外れた場所では圧力変動は無いことがわかる。

Fig. 13 Normalized unsteady pressure distribution in the gap (between the plate and the chamber surface) with the plate motion for $k = 4.97 \times 10^4$ N/m, $M = 5.65$ kg, $Q_s = 1.2Q_{s-cr}$.

5・5 流体力による仕事とエネルギー収支

実験で得られた流体力の仕事分布 E_{local} を図 14 に示す。流体力による仕事は最大値で正規化して（最大値を 1 で）表示している。ここで、赤色は流体力による仕事が正の領域を、青色はその仕事が負の領域を表している。図より、スリット付近では流体力による仕事が正であり、エネルギーが流入していることがわかる。一方、スリットから離れるほど流体力による仕事が減少し、スリットとチャンバの端部の間では仕事が負の領域があり、エネルギーが散逸している。また、チャンバ領域から外れた場所では流体力による仕事は無い。つまり、スリット付近の流体力が平板に正の仕事をしており、この圧力変動が自励振動を励起していることがわかる。

図 15 に y 軸断面 ($y/B = 0$) におけるチャンバ上面の領域 ($x/L = \pm 1$) での、圧力変動の振動変位に対する位相差を示す。ここで、圧力変動が振動変位に対して位相進みである場合は正の位相差を、位相遅れである場合は負の位相差を示す。図より、スリット付近で、圧力変動が振動変位に対して位相進みとなっていることがわかる。特に、スリット直上の圧力変動の位相進みが、正の仕事の発生に大きく寄与している。一方、スリットから離れると位相差は負（位相遅れ）となる。つまり、この領域における圧力変動は、エネルギー散逸として作用する。

図 16 に y 軸断面 ($y/B = 0$) での非定常圧力を示す。非定常圧力は 1 周期 T を 8 分割して表示している。図より、スリット直上の圧力変動の振幅が大きいことがわかる。このことから、図 15 で示したスリット直上の圧力変動の位相進みに加えて、スリット直上の圧力変動の振幅が、正の仕事の発生に大きく寄与していることがわかる。

図 17 と図 18 に圧力変動と平板の振動変位の時刻歴波形、およびリサージュ曲線を示す。圧力変動は、チャンバ内の圧力と、平板表面に設けた孔を通して測定した平板下部のすき間圧力（スリット直上、 $x/L = -0.31$ 、 $x/L = -0.65$ の 3 点）を同時計測した結果を示す。ここでは、自励振動の卓越振動数における、振動変位と圧力変動の位相関係を明確にするために、ローパスフィルタを用いて、高い振動数の成分（ノイズ）を取り除いた。ここで、ローパスフィルタの処理によって信号に位相遅れが生じるが、全ての信号（振動変位と圧力変動の信号）に同じカットオフ周波数のローパスフィルタを通すことで、位相遅れの影響は無くなる。また、振幅は最大値で正規化しているために、振幅の減衰による影響は無くなる。図 18 (a) より、チャンバ内の圧力変動と平板の振動変位のリサージュ曲線が時計回りであることから、チャンバ内部で、すでに圧力変動が平板の振動変位に対して位相進みであることがわかる。図 18 (b) と (c) から、スリット直上の圧力変動とチャンバ内の圧力変動は同位相であり、その振幅はほぼ等しい。

このことから、図 15 で示したスリット付近の圧力変動の位相進みは、チャンバ内の圧力変動の位相進みに起因して発生していることがわかる。つまり、チャンバ内の圧力変動が振動変位に対して位相進みとなることが、自励振動の原因である。

一方、スリットから離れた領域の圧力変動と平板の振動変位のリサーチ曲線（図 18 (d), (e)）は、ほぼ直線、また反時計回りであることから、流体力による仕事は零、また負であり、スリットから離れた領域の流体力は自励振動の発生に関与していないことがわかる。

Fig. 14 Normalized local work E_{local} by the fluid force in the case of $k = 4.97 \times 10^4$ N/m, $M = 5.65$ kg, $Q_s = 1.2Q_{s-cr}$

Fig. 15 Phase difference of fluid pressure ΔP_g against displacement Δh in the case of $k = 4.97 \times 10^4$ N/m, $M = 5.65$ kg, $Q_s = 1.2Q_{s-cr}$, $y/B = 0$.

Fig. 16 Normalized unsteady pressure in the gap (between the plate and the chamber surface) in the case of $k = 4.97 \times 10^4$ N/m, $M = 5.65$ kg, $Q_s = 1.2Q_{s-cr}$, $y/B = 0$.

Fig. 17 Time histories of fluid pressure ΔP and displacement Δh for $k = 4.97 \times 10^4 \text{ N/m}$, $M = 5.65 \text{ kg}$, $Q_s = 1.2Q_{s-cr}$, $y/B = 0$.

Fig. 18 Lissajous curves of fluid pressure ΔP and displacement Δh for $k = 4.97 \times 10^4 \text{ N/m}$, $M = 5.65 \text{ kg}$, $Q_s = 1.2Q_{s-cr}$, $y/B = 0$.

5・6 励振メカニズムの考察

安定性解析により得られた平板の振動に関する特性方程式である式 (12) を基に、励振メカニズムを考察する。ここで、励振メカニズムにおいては、流体力による仕事の正負が重要であり、平板の振動変位に対する流体力の位相が重要な要因となる。このため、平板の振動変位を調和振動として、平板の振動変位に対する流体力の位相差を調べる。図 14 の実験結果より、流体力は主にスリット直上で正の仕事をするため、すき間入口で生じる圧力降下 (図 3 参照) は、励振力にならないと考えられる。このため、すき間入口で生じる圧力降下がない ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) と仮定することで、式 (12) を簡略化する。このとき、式 (12) の右辺に示した流体力は、以下のようになる。つまり、振動変位に対する流体力のラプラス変数領域での伝達関数は、1 次遅れ系の伝達関数となる。

$$\tilde{F}(s) = -\frac{\varepsilon}{1 + \tau s} \Delta \tilde{h}(s) \quad (21)$$

式中 τ は、時定数を表し、以下のように与えられる。

$$\tau = \frac{\bar{P}V}{K_e Q_s} \quad (22)$$

上式より、時定数 τ は、流体力の位相特性を支配する重要なパラメータであり、チャンバ内部の体積（ V ）とチャンバ内の空気の体積弾性係数（ K_e ）、空気流量（ Q_s ）は、系の安定性に重要なパラメータであることがわかる。

ここで、式（21）に、調和振動する微小変位 $\Delta h(t) = \bar{h} \sin \omega t$ をラプラス変換した式を代入する。得られた式を逆ラプラス変換し、過渡応答を無視することで、流体力は以下のように求まる。

$$\Delta F(t) = \frac{\varepsilon \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \Delta \dot{h}(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \omega^2 \tau^2} \Delta h(t) \quad (23)$$

流体力 $\Delta F(t)$ と平板の振動変位 $\Delta h(t)$ の位相関係は、図 19 に示すようになる。ここで、チャンバ内の空気が圧縮しないと仮定すると、体積弾性係数は $K_e = \infty$ となることから、 $\tau = 0$ となる。このとき、右辺第一項が零となり、第二項が支配的となることで、流体力 $\Delta F(t)$ は振動変位 $\Delta h(t)$ に対して逆位相となる。つまり、チャンバ内の作動流体の圧縮性の影響が小さい場合は、流体力が励振力とならず、単にバネ効果（エアクッション効果）として作用することがわかる（図 19 (a)）。

一方、チャンバ内の空気の圧縮性を考慮すると、 $\tau \neq 0$ となる。ここで、 τ を $0 \sim \infty$ の範囲で変化させると、右辺第一項は、零から始まり極大値をとった後、再び零に収束する。つまり、 $\tau \neq 0$ の場合、右辺第一項は有限である。このとき、右辺第一項の影響で、流体力 $\Delta F(t)$ は振動変位 $\Delta h(t)$ に対して位相進みとなるため、負減衰力を有するようになり（図 19 (b)）、リサージュ曲線は時計回りに回りながら成長する（図 19 (c)）。つまり、流体力は平板の振動に対して正の仕事をし、励振力となる。

以上のことから、チャンバ内の空気の圧縮性に起因して、流体力は平板の振動変位に対して位相進みとなることがわかる。このことは、図 18 の実験結果からも理解できる。つまり、チャンバ内の空気の圧縮性に起因して、流体力が平板の振動変位に対して位相進みとなることが、自励振動発生の励振メカニズムである。

Fig. 19 Lissajous curve of fluid force ΔF and displacement Δh .

さらに、本章で示した自励振動発生の励振メカニズムと、3章で得られた自励振動の発生条件との関連を示す。式(23)に示した流体力が平板に作用したときの運動方程式は、以下のように得られる。

$$M\Delta \ddot{h}(t) + c\Delta \dot{h}(t) + k\Delta h(t) = \Delta F(t) \quad (24)$$

ここで、式（23）の右辺第一項の係数を流体付加減衰 c_a 、右辺第二項の係数を流体付加剛性（付加バネ定数） k_a として定義して、以下のように置く。

$$c_a = \frac{\varepsilon \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad k_a = \frac{\varepsilon}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (25)$$

このとき、平板の運動方程式は、式（23）、（24）、（25）を用いて、以下のように表すことができる。

$$M\Delta\ddot{h}(t) + (c - c_a)\Delta\dot{h}(t) + (k + k_a)\Delta h(t) = 0 \quad (26)$$

さらに、構造減衰比 ζ が小さく、すき間入口で生じる圧力降下がない ($\beta=0$, $\gamma=0$) と仮定した場合の、自励振動が発生する条件を求める。ここで、自励振動が発生する条件は、式(26)において、 $c - c_a < 0$ の場合となる。したがって、自励振動が発生する条件は、以下のように得られる。

$$c - \frac{\varepsilon\tau}{1 + \omega^2\tau^2} < 0 \quad (27)$$

ここで、調和振動する微小変位 $\Delta h(t) = \bar{h} \sin \omega t$ の角振動数を $\omega = \omega_n (= \sqrt{k/M})$ とする。このとき、式(15)を用いて、式(27)を無次元化すると、以下の条件式が得られる。

$$2\zeta(1 + \hat{\tau}^2) - \hat{\varepsilon}\hat{\tau} < 0 \quad (28)$$

上式は、安定性解析で示した不安定条件式(式(19))と一致する。ここで、上式の $\hat{\tau}$ は、無次元化した時定数を表し、以下のように与えられる。

$$\hat{\tau} = \frac{\bar{P}V\omega_n}{K_e Q_s} \quad (29)$$

ここで、チャンバ内の空気が圧縮しないと仮定すると、体積弾性係数は $K_e = \infty$ となることから、 $\hat{\tau} = 0$ となる。このとき、式(28)の左辺は ($\zeta > 0$ であるため) 正となり、自励振動は発生しないことがわかる。

一方、チャンバ内の空気の圧縮性を考慮すると、 $\hat{\tau} \neq 0$ となる。このとき、 ζ は小さいことから、式(28)の左辺第二項 $\hat{\varepsilon}\hat{\tau}$ が支配的になることによって、左辺が負となり、自励振動が発生する。

このことから、式(28)および安定性解析で示した式(19)は、チャンバ内の空気の圧縮性に起因して、自励振動が発生することを示した条件式であることがわかる。つまり、安定性解析で示した式(18)は、本質的に、チャンバ内の空気の圧縮性に起因して、自励振動が発生することを示した条件式である。また、式(18)は、平板の振動に関する特性方程式(式(14))から得られる不安定条件式である。このため、式(14)は、チャンバ内の空気の圧縮性に起因して、自励振動が発生することを示す支配方程式であることがわかる。

6. まとめ

空気圧で浮上する平板に発生する自励振動について、チャンバ内の空気の圧縮性を考慮した簡易解析モデルを構築し、解析と実験により系の安定性と自励振動の発生条件を調べた。また、実験では平板(下部表面)に作用する非定常圧力を測定し、空気圧による流体力仕事分布(エネルギー収支)を調べることで、励振メカニズムを考察した。さらに、解析モデルを基に自励振動の励振メカニズムおよび重要なパラメータを考察した。そして、先行研究により示唆された、すき間流れに起因する自励振動の発生機構だけでなく、チャンバ内の空気の圧縮性に起因して自励振動が発生することを示した。得られた主な結果を以下に示す。

- (1) 空気流量が増加すると、平板に自励振動が発生する。また、平板質量が大きくなると自励振動発生領域は広くなり、低流量で自励振動が発生する。
- (2) バネ定数が小さくなると自励振動発生領域は広くなり、平板質量が小さい領域で自励振動が発生する。
- (3) スリット付近で、圧力変動が振動変位に対して位相進みであり、この圧力変動が自励振動を励起する。また、スリット付近の圧力変動の位相進みは、チャンバ内の圧力変動の位相進みに起因して発生する。
- (4) 空気の圧縮性に起因して、チャンバ内の圧力変動は平板の振動変位に対して位相進みになる。つまり、チャンバ内の空気の圧縮性に起因して自励振動が発生する。

文 献

- Chang, Y. B. and Moretti, P. M., Aerodynamic characteristics of pressure-pad air bars, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.67, No.1 (2000), pp.177-182.
- 葉山真治, 平田東一, 3 階の微分方程式により表わされる自励振動, *日本機械学会講演論文集*, No. 770-10 (1977), pp.77-79.
- 稲田文夫, 葉山真治, すきま流励起振動に関する研究 (第 1 報, 一次元テーパすきまの壁面に作用する流体力の評価), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 53, No. 488 (1987), pp.933-938.
- 石原国彦, 空気浮上式コンベアにおいて発生する異常振動について (現象の理解), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 73, No. 729 (2007), pp.7-12.
- Ishihara, K., On abnormal vibration generated in flow dynamic conveyer, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 2, No. 2 (2008), pp.550-560.
- 石原国彦, 榮藤大輔, 浮上式コンベア (FDC) の異常振動発生メカニズムに関する研究, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 76, No. 761 (2010), pp.20-27.
- Ishihara, K. and Eto, D., Study on generation mechanism of abnormal vibration of flow dynamic conveyer, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 5, No. 4 (2011), pp.589-602.
- Licht, L., Fuller, D. D. and Sternlicht, B., Self-excited vibrations of an air-lubricated thrust bearing, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol.80, No.2 (1958), pp.411-414.
- Licht, L., Air-hammer instability in pressurized-journal gas bearings, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol.83, No.2 (1961), pp.235-242.
- 森美郎, 森淳暢, 静圧気体軸受の安定要素に関する研究 (第 1 報, 軸受ポケットに設置した安定要素), *日本機械学会論文集*, Vol. 32, No. 244 (1966), pp.1877-1882.
- 森美郎, 森淳暢, 金子礼三, 吉田恵吾, 静圧気体軸受の安定要素に関する研究 (第 2 報, 給気孔に接続した安定要素), *日本機械学会論文集*, Vol. 32, No. 244 (1966), pp.1883-1887.
- 大森直陸, 小林正生, 空気浮上した柔軟ベルトの安定性に関する研究, *日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2000 CD-ROM 講演論文集*, No.342 (2000).
- 大森直陸, 小林正生, 空気浮上した柔軟ベルトの安定性に関する研究 (第 2 報 荷を積載した場合), *日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2001 CD-ROM 講演論文集*, No.609 (2001).
- 下川靖夫, 大久保雅章, 林浩司, 神山新一, 流体クッションによる薄鋼板の非接触支持に関する基礎研究, *日本機械学会論文集 B 編*, Vol. 60, No. 572 (1994a), pp.78-83.
- 下川靖夫, 大久保雅章, 神山新一, 流体クッションによる薄鋼板の非接触支持に関する研究 (サイドプレートによる浮上力および復元力の向上), *日本機械学会論文集 B 編*, Vol. 60, No. 575 (1994b), pp.189-194.
- 下川靖夫, 神山新一, 流体クッションによる薄鋼板の非接触支持に関する研究 (浮上搬送用サイドプレートの最適化による消費流量軽減策), *日本機械学会論文集 B 編*, Vol. 62, No. 600 (1996), pp.174-179.
- 下山美徳, 山田豊, ラビリンスパッキンに関する研究 (第 1 報), *日本機械学会論文集*, Vol. 23, No. 125 (1957), pp.44-49.

References

- Chang, Y. B. and Moretti, P. M., Aerodynamic characteristics of pressure-pad air bars, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.67, No.1(2000), pp.177-182.
- Hayama, S. and Hirata, T., Proceedings of the Japan Society of Mechanical Engineers, No. 770-10 (1977), pp.77-79 (in Japanese).
- Inada, F. and Hayama, S., A study on leakage-flow-induced vibrations (1st report, Fluid-dynamic forces acting on the walls of a one-dimensional, narrow, tapered passage), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 53, No. 488 (1987), pp.933-938 (in Japanese).
- Ishihara, K., On abnormal vibration generated in flow dynamic conveyer (Understanding of phenomenon), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 73, No. 729 (2007), pp.7-12 (in Japanese).
- Ishihara, K., On Abnormal vibration generated in flow dynamic conveyer, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 2, No. 2 (2008), pp.550-560.
- Ishihara, K. and Eto, D., Study on generation mechanism of abnormal vibration of flow dynamic conveyer, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 76, No. 761 (2010), pp.20-27 (in Japanese).

- Ishihara, K. and Eto, D., Study on generation mechanism of abnormal vibration of flow dynamic conveyer, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 5, No. 4 (2011), pp.589-602.
- Licht, L., Fuller, D. D. and Sternlicht, B., Self-excited vibrations of an air-lubricated thrust bearing, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol.80, No.2 (1958), pp.411-414.
- Licht, L., Air-hammer instability in pressurized-journal gas bearings, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol.83, No.2 (1961), pp.235-242.
- Mori, H. and Mori, A., Stabilizing element for externally pressurized gas-bearing (1st report, Stabilizing element attached to bearing recess), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 32, No. 244 (1966), pp.1877-1882 (in Japanese).
- Mori, H., Mori, A., Kaneko, R. and Yoshida, K., Stabilizing element for externally pressurized gas-bearing (2nd report, Stabilizing element inserted into the gas-supply line), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 32, No. 244 (1966), pp.1883-1887 (in Japanese).
- Oomori, N. and Kobayashi, M., Stability analysis of flexible belt floating on air flow, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Dynamics and Design Conference 2000*, No.342 (2000) (in Japanese).
- Oomori, N. and Kobayashi, M., Stability analysis of flexible belt floating on air flow (2nd report), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Dynamics and Design Conference 2001*, No.609 (2001) (in Japanese).
- Shimokawa, Y., Okubo, M., Hayashi, K. and Kamiyama, S., Basic study of non-contacting support of thin plate by fluid cushion force, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 60, No. 572 (1994a), pp.78-83 (in Japanese).
- Shimokawa, Y., Okubo, M. and Kamiyama, S., Basic study of non-contacting support of thin plate by fluid cushion force (Effect of side plates on supporting characteristics), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 60, No. 575 (1994b), pp.189-194 (in Japanese).
- Shimokawa, Y. and Kamiyama, S., Non contacting support of strip by fluid cushion force (Reducing flow rate for floating strip by optimizing shape of side plates), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 62, No. 600 (1996), pp.174-179 (in Japanese).
- Shimoyama, Y. and Yamada, Y., Experiments on the labyrinth packing (1st report), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 23, No. 125 (1957), pp.44-49 (in Japanese).