テニスラケットのゴム輪による除振効果
(有限差分法による数値解析)野口 祐智^{*1}, 小畑 修二^{*2}Anti-vibration effects with a gum piece in tennis rackets
(Analysis by the finite difference method)Masanori NOGUCHI^{*1} and Shuji OBATA^{*2}^{*1,*2}School of Science and Engineering, Tokyo Denki University
Ishisaka, Hatoyama-machi, Hiki-gun, Saitama 350-0394, Japan

Received 17 June 2016

Abstract

Anti-vibration effects in tennis rackets with some gum pieces are analyzed by numerical simulations using the finite difference method. The simulated results of the string vibrations show the existence of wave propagations parallel to the two-dimensional rectangle boundaries. These results are confirmed with the experimental data of the sound specter analysis in good agreements. The anti-vibration effects of dampers are measured with changing the gum piece weights using an acceleration sensor and microphones. These fitted weights are investigated for general tennis racket at 55~60 pound tensions. The string sound damping is precisely investigated using these results. The gum piece structures are discussed for searching the efficient anti-vibration effects. It is found that popular gum pieces have fairly good ability of the damping effects.

Key words : Tennis racket vibration, Numerical simulation, Finite difference method, Anti-vibration, Specter analysis

1. 緒 言

近年, 川副ら(川副他, 2010) によってテニスボールの回転とラケットストリングスの張り方との関係が研究され, トップスピンが縦ストリングスのズレと復元力によって生ずることが明らかにされた. フレームやストリング面の振動についての研究も進み(Cross, 2000), またフレーム振動及びストリング面振動について加速度センサを用いて計測し, その周波数分析に基づくダンパの効果の評価も検討されるようになった(Mohr et al., 2008). 数値解析としては, 有限要素法を用いたテニスボールの衝撃と回転の関係を調べるシミュレーションも行なわれている(Weir, 2013). この様にテニスラケットの機能に関する研究は多く行われているが, 研究すべき未知の部分も多く残されている. 本研究では未だに解明されていないストリング面の音響振動とダンパによる除振効果について調べる. まず, 有限差分法を用いたストリング振動のシミュレーションを行い, 次にこれらの結果に合わせた実験を行って適切なダンパの形状と重さについて検討する.

多くのスポーツ器具には, 白蟻病などの振動障害を防止するため, 振動除振装置が施されている. 中でもテニスラケットのストリングスに填めるゴム輪(ダンパ)の効果は一目瞭然で良く知られている. しかし, ボールを打ち返す際に生ずる衝撃, 打撃の最適位置やフレーム振動の研究は進んでいるものの, ストリング面の音響振動とその除振効果についてはあまり詳しく調べられていない. 本研究ではこの除振効果のメカニズムを, 有限差分法を用いた数値解析により詳しく調べる. 有限差分法は, 物理現象を表す微分方程式を差分化して一次連立方程式に書き直し解を得る方法で, 非常に簡便な数値解析法である. 解析手順を論ずることなく解を得る有限要素法

に比べ、現象の理論的把握が遙かに容易である。近年、有限差分法を用いた計算例は多いものの、計算手順の解説が少なく理解が浅くなっているため、本報告では解説を加えて計算手順を簡潔に示すことにした。

テニスラケットの振動止めは、ラケットの軽量高反発化の進化の中でラケット素材が振動を吸収しなくなったことで、装着の必要性が高まっている。防振効果を上げるための工夫も、最近になって穴の形状を変えたゴム輪が発売されるなど、年々進化している。本論文の主な内容として、幾つかのラケットのストリングス張力に対し、振動止効果を高めるゴム輪の最適な構造を検討する。防振ゴムの除振効果は広く知られてはいるが、除振の様子を詳しく調べた論文は少なく、不明な点が多い。本研究でのシミュレーション結果は、格子状になった長方形のストリング面での固有振動が大きく生き残ることを示唆しており、実際のラケットに於けるストリング面の音響計測における 1kHz 付近の固有振動の存在を上手く説明する。

次の第2章では様々な除振効果とテニスラケットの除振の現状について述べる。第3章では有限差分法についての解説とテニスラケットのストリング振動の解析手順を示し、具体的なストリング振動のシミュレーションを行う。これらを次の6つの節に分けて示す。3.1 有限差分法の説明。3.2 ストリングスの振動方程式を定式化。3.3 ラケット、ストリングスの構造、各形状、境界値のまとめ。3.4 一次元のストリング振動のシミュレーション。3.5 数値解析による2次元ストリング面の振動シミュレーションと可視化。3.6 2次元ストリング面の振動速度制御でのダンパ効果。4章ではテニスボールをラケット面に当て、実際の衝撃によるフレームの振動とストリング面の振動を計測する。振動測定として、加速度計とマイクを用いた振動音の測定を行い、除振効果を計測する。これらを次の5つの節に分けて示す。4.1 ラケットの振動計測装置。4.2 フレーム振動計測。4.3 ストリング面振動の音響計測。4.4 ダンパ形状に依存する除振効果。4.5 ダンパの質量変化による除振効果。第5章で結言をまとめる。

2. テニスラケット振動と除振の必要性

除振装置は大型建造物から小さな機械に至るまで、様々な振動に対しそれぞれの対策が為されて来た。法隆寺の中央浮柱は世界的にも有名であるが、振動防止対策は古代から生活環境における大きな課題となっている。同じ状況での除振効果の向上は勿論のことであるが、構造形状や材料の進化が速く、材料や構造物が開発される度に新たな除振装置を対応させる必要が有る。テニスラケットの除振装置もその1つで、木製のラケットの時代は振動止めを装着する必要性は無かったが、グラファイトやアルミ等の素材の変化や補強素材の加工技術が進化し、ラケットの軽量高反発化による高音振動の発生が多くなったことで、振動止めが普及する様になった。またラケットの進化に合わせ、テニスプレイヤーのスウィング技術の多様化により腕や手首への負担が強まり、エルボーや腱鞘炎を引き起こし易くなったことも理由に挙げられる。しかし、多くのテニスプレイヤーは、完全な振動除去では無く適正な雑音除去を求めており、テニスボールの打撃感がボールのコントロールに繋がる程良い感触が必要となる。従って振動止めは、ラケット振動の調整装置とも言え、防振機能の進化が要求されている。

振動止め（ダンパ）の素材は、シリコンゴムが主流であるが、スポンジなど様々な素材も存在する。また振動止めの大きさや重さも、ストリングスの張力ごとに、ラケット形状に合わせた調整が求められる。この様に、形状的には大きく①グリップに近い中央縦ストリングス二本につけるワンポイント型、②更に横ストリングス2本を含めて4点を覆うワンポイント型、③ストリングスが複数に掛かる横長型、④フレームシャフト等につける形式等に分けられる。どの方式が有効なのかを比較検討した明確な報告は無く、またボールのコントロールの為に敢えて除振を少なくするプレイヤーも居るので、振動止め効果はその状況ごとに把握し特徴を捉えておく必要が有る。本研究では一般的な円形ゴムの除振効果を中心に調べる。振動モードの時間経過の数値解析結果を可視化し、実験による振動モード解析と比較検討する。

3. ストリング面振動の数値計算と除振効果

3・1 有限差分法の計算原理

一般的な数値解析において、有限差分法が有限要素法よりも有効である場合でも、ほとんどの研究者は計算手順を工夫する必要の無い有限要素法に頼るようになってしまった。ここに、改めてこうした研究者のためにも有限差分法の簡便性と有効性について説明する。微分方程式の解となる任意の一次元関数を $u(x)$ とし、これを x 座

標の k 点に於いて $k-1, k, k+1$ の 3 つの区分点を用いた二次曲線に近似展開する. 総ての区分点でこの二次曲線展開を独立に行う. 任意区分の 3 点を x_{k-1}, x_k, x_{k+1} とすると, $u(x_k)$ を u_k と書いて $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ を用いれば k 点での $u(x)$ が 2 次曲線によって次の様に近似される.

$$u_{k-1} = \alpha_k x_{k-1}^2 + \beta_k x_{k-1} + \gamma_k, \quad u_k = \alpha_k x_k^2 + \beta_k x_k + \gamma_k, \quad u_{k+1} = \alpha_k x_{k+1}^2 + \beta_k x_{k+1} + \gamma_k \quad (1)$$

ここで区分点の $k-1$ から k までの区分幅を $d_{k-1,k}$ と表し, 絶対値を $D_{k-1,k} = \Delta_{k-1,k}$ として

$$d_{k,k+1} = x_{k+1} - x_k, \quad D_{k,k+1} = |d_{k,k+1}| = \Delta_{k,k+1} \quad (2)$$

と表記する. 一般的な Δ 表記はここでの d を表すことも有るので, 本論文では用いない. ここで, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ を $d_{k-1,k}, D_{k-1,k}$ で表し, 未知数 u_{k-1}, u_k, u_{k+1} について $d_{k-1,k}, D_{k-1,k}$ を用いた差分式で表せば 2 階の微分方程式の差分表現が出来上がる. これより関数 $u(x)$ に対する微分演算の差分展開における二階微分と一階微分はそれぞれ

$$\nabla^2 u(x)|_k = 2\alpha_k \quad (3)$$

$$\nabla u(x)|_k = 2\alpha_k x_k + \beta_k \quad (4)$$

と表される. これらの二次曲線の係数 α, β, γ は連立方程式(1)を解いて, 式(2) の表記を用いれば

$$\alpha_k = \frac{u_{k-1}}{D_{k-1,k+1}D_{k-1,k}} + \frac{u_{k+1}}{D_{k-1,k+1}D_{k,k+1}} - \frac{u_k}{D_{k-1,k}D_{k,k+1}} \quad (5)$$

$$\beta_k = \frac{(x_{k+1} + x_{k-1})u_k}{D_{k-1,k}D_{k,k+1}} - \frac{(x_{k+1} + x_k)u_{k-1}}{D_{k-1,k+1}D_{k-1,k}} - \frac{(x_k + x_{k-1})u_{k+1}}{D_{k-1,k+1}D_{k,k+1}} \quad (6)$$

$$\gamma_k = u_k - \alpha_k x_k^2 - \beta_k x_k$$

となる. これらを用いて式(3)(4)の微分演算を差分で表せば, 二次曲線近似差分解法の計算手段となる一次連立方程式が構築される.

$$\nabla^2 u(x_k) \Rightarrow \text{Difu}(k) = 2\left\{ \frac{u_{k+1}}{D_{k-1,k+1}D_{k,k+1}} + \frac{u_{k-1}}{D_{k-1,k+1}D_{k-1,k}} - \frac{u_k}{D_{k-1,k}D_{k,k+1}} \right\} \quad (7)$$

$$\nabla u(x_k) \Rightarrow \text{difu}(k) = \frac{d_{k-1,k}u_{k+1}}{D_{k-1,k+1}D_{k,k+1}} - \frac{d_{k,k+1}u_{k-1}}{D_{k-1,k+1}D_{k-1,k}} + \left(\frac{1}{d_{k-1,k}} - \frac{1}{d_{k,k+1}} \right) u_k \quad (8)$$

この 2 つの微分演算の組み合わせで表される微分方程式は, 未知数 u_k に対して

$$\begin{bmatrix} m_{k,1} & \cdots m_{k,k} & \cdots m_{k,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_k \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (9)$$

なる行列 $m[k,l]$ を形成し一次連立方程式に纏められる. ここでは列ベクトルを $u[l]$ で表し, k 行目の要素に既知数の f_k を設定した. これより左辺から固定値を右辺に移動すれば未知数 u_k の一次連立方程式となり, 解が得られる. 時間発展の微分方程式も同様に展開される.

3・2 振動方程式の定式化

(1) 平面振動の微分方程式

まず一般的な保存的ストリング面振動の運動方程式を導出は, 後藤ら(Gotoh et al, 1972)の定式化が解説として詳しい. 一次元ストリングスの張力 T に関わる振動ポテンシャル U は

$$dU = T(\sqrt{dx^2 + dz^2} - dx) = Tdx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dz}{dx} \right)^4 \cdots - 1 \right\} \quad (10)$$

と展開される．振幅が波長の 1/3 程度でも第 3 項は第 2 項の 1/36 程度なので，厳密さを要求しない限り第 3 項は無視して良い．弦振動に於ける張力は伸びに比例し

$$T\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_x = Tdx \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (11)$$

と表される．これより運動方程式は十字区分点で

$$\rho(dx+dy) \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial t^2} = T_x dx \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial x^2} + T_y dy \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial y^2}. \quad (12)$$

と表される．この式で十字区分点と一次元区分点に分け，非保存系のダンパの制動項を加えると，パラメータ $\alpha(x_i, y_i)$ の振動速度に逆らう力を減衰項として加えれば次の様な微分方程式を得る．

$$T_x dx \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial x^2} + T_y dy \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial y^2} = (dx+dy) \left\{ \rho \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial t^2} + \alpha(x,y) \frac{\partial z(x,y,t)}{\partial t} \right\}; \quad x \times y \text{ point}, \quad (13)$$

$$T_x \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial t^2} + \alpha(x) \frac{\partial z(x,y,t)}{\partial t}; \quad x \text{ string}, \quad (14.a)$$

$$T_y \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial t^2} + \alpha(y) \frac{\partial z(x,y,t)}{\partial t}; \quad y \text{ string}. \quad (14.b)$$

これらに対し dx, dy を区分点間の距離（区分幅）に置いて差分方程式に書き直せば，有限差分法の基礎方程式が得られる．本研究では $\rho = 1.6 \text{ g/m}$ のストリングスを用い，ストリングス張力は $1 \text{ pound} = 4.448 \text{ N}$ として $T_x = T_y = 55 \text{ pound}$ (Racket A) と $T_x = 55, T_y = 40 \text{ pound}$ (Racket B) の 2 通りの状態を調べる．

(2) 平面振動の差分方程式

時間発展の時間刻みは一定で良く Δt とする．この場合，刻み番号を q とし，時間を刻み時間で $t_q = q\Delta t$ の様に表す．この時間発展では過去 t_{q-1} と現在 t_q を既知数とし，未来 t_{q+1} を未知数に置き微分項を

$$\frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial t^2} \rightarrow \frac{z(x,y,t_{q+1}) + z(x,y,t_{q-1}) - 2z(x,y,t_q)}{\Delta t^2}, \quad \frac{\partial z(x,y,t)}{\partial t} \rightarrow \frac{z(x,y,t_{q+1}) - z(x,y,t_{q-1})}{2\Delta t} \quad (15)$$

と表す．空間区分点 p に於ける x 座標の並びを i, p, j ，絶対値の刻み幅を D_{ip}, D_{pj}, D_{ij} で， y 座標の並びを k, p, l ，絶対値の刻み幅を D_{kp}, D_{pl}, D_{kl} で表す．区分点 p と時刻 t_q の変数表示を $z(x_p, y_p, t_q) = z_{p,q}$ と表すことにすると，式(13)の微分方程式は

$$\begin{aligned} T_x D_{ij} \left(\frac{z_{i,q+1}}{D_{ij} D_{ip}} + \frac{z_{j,q+1}}{D_{ij} D_{pj}} - \frac{z_{p,q+1}}{D_{ip} D_{pj}} \right) + T_y D_{kl} \left(\frac{z_{k,q+1}}{D_{kl} D_{kp}} + \frac{z_{l,q+1}}{D_{kl} D_{pl}} - \frac{z_{p,q+1}}{D_{kp} D_{pl}} \right) \\ = \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{kl}) \left\{ \rho \frac{z_{p,q+1} + z_{p,q-1} - 2z_{p,q}}{\Delta t^2} + \alpha_p \frac{z_{p,q+1} - z_{p,q-1}}{2\Delta t} \right\}; \quad x \times y \text{ point}, \\ \rightarrow T_y = D_{kl} = 0; \quad x \text{ string}, \quad \rightarrow T_x = D_{ij} = 0; \quad y \text{ string}. \end{aligned} \quad (16)$$

の様に表される．振動の伝搬速度は $v = \sqrt{T/\rho}$ となる．差分方程式の係数を

$$A_x = T_x \Delta t^2, \quad A_y = T_y \Delta t^2, \quad A_t = \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{kl}) \rho \quad (17)$$

とおき，式(16)を未知数の左辺と既知数の右辺に分ければ，十字区分点及び一次元区分点で

$$A_x \left(\frac{z_{i,q+1}}{D_{ip}} + \frac{z_{j,q+1}}{D_{pj}} - \frac{z_{p,q+1} D_{ij}}{D_{ip} D_{pj}} \right) + A_y \left(\frac{z_{k,q+1}}{D_{kp}} + \frac{z_{l,q+1}}{D_{pl}} - \frac{z_{p,q+1} D_{kl}}{D_{kp} D_{pl}} \right) - A_t \left(1 + \frac{\alpha_p}{2\rho} \Delta t \right) z_{p,q+1}$$

$$= A_i \left\{ \left(1 - \frac{\alpha_p}{2\rho} \Delta t \right) z_{p,q-1} - 2z_{p,q} \right\} \rightarrow A_y = D_{kl} = 0; x \text{ string}, \quad \rightarrow A_x = D_{ij} = 0; y \text{ string}. \quad (18)$$

なる時間発展の一次連立方程式を得る．プログラミングは定式化の通りに行えば良い．

3・3 区分点，境界条件，初期条件と除振項の設定

(1) 区分点と境界条件の設定

ラケットの構造を模式的に図1に示す．ここで x 軸の刻み番号を $0 \leq u \leq N_x + 1$, y 軸の刻み番号を $0 \leq v \leq N_y + 1$ として，行列要素に用いる区分点番号を $n_p(u, v)$ で表すことにする．図1に示す様にテニスラケットに於けるストリングス線の区分点数は最大 $N_x=19$ と $N_y=16$ となる．

Fig.1 Structure of a tennis racket with a damper. X -coordinate is set as the lateral grip central line. Y -coordinate is set as the central transverse line of the racket surface.

ストリングスの交点となる区分点は，グリップ側を正值にとれば近似的に左右で非対称な楕円の中に含まれる．フレームの中央部を座標の原点にとると，ストリングス表面の横幅を示す x 軸座標は x_0 がヘッド側， x_{20} がグリップ側となり，高さを示す y 軸座標は y_0, y_{17} となる． x 座標の刻み値を x_u , y 座標の刻み値を y_v として，ストリングス面の刻み座標を Table 1 様に定める．これより区分点番号 $p(u, v)$ と座標 $x(p), y(p)$ を次の手順で決定する． x 軸の座標を u で y 軸の座標を v でトレースして，フレームの楕円の内側に入る区分点のみを有効な区分点番号として加算し番号 n_p を決定する．これより $x(p), y(p)$ が定まり同時に $u(p), v(p)$ も定まり，区分点が $1 \leq n_p(u, v) \leq 300$ の番号で定まる．この番号から外れた場合は総て $p(u, v) = -1$ に設定する． p のトレースで差分に用いる区分点座標は x 軸の左右 $u \pm 1$ と y 軸の上下 $v \pm 1$ の座標のみであるから，この隣接区分点番号が -1 であれば境界のフレームを表すことになり，その区分点座標は Table 2 を用いて決定する．

Table 1 Coordinates of the cross points [mm]

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
x_u	-123	-104	-89	-76	-64	-51	-38	-25	-13	
u	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_u	0	13	25	38	51	64	76	89	104	126
v	1	2	3	4	5	6	7	8		
y_v	-98	-81	-68	-55	-42.5	-30	-17.5	-5		
v	9	10	11	12	13	14	15	16		
y_v	5	17.5	30	42.5	55	68	81	98		

Table 2 Coordinates of the string edges [mm]

v	1	2	3	4	5	6	7	8		
x_{Lv}	-116	-135	-144	-150	-156	-159	-161	-162		
v	1	2	3	4	5	6	7	8		
x_{Rv}	116	137	150	160	167	172	174	175		
u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
y_{Uu}	90	105	113	118	127	129	131	131.5	131.8	
u	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_{Uu}	132	131.8	131	127	125	121	117	111	102	88

*L(left),R(right),U(up)

十字区分点の間は一次元のストリングスとして捉え、この間を5等分して一次元振動の自由度を与える。フレームに接続する幅の大きい一次元区分点は15等分とした。

(2) 振動エネルギー

振動のエネルギーは、位置エネルギーを式(10)で与えれば、運動エネルギーとの和を取って

$$E = \frac{1}{2} \sum_p^{N_x} \left\{ \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + T_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_p^{N_y} \left\{ \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + T_y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (19)$$

となる。区分幅を両隣り隣接区分点間の半分に取り line 区分点と cross 区分点に分けて差分式で表せば

$$E = \sum_p^{N_x} \left\{ \frac{1}{4} \rho \left(\frac{z_{p,q} - z_{p,q-1}}{\Delta t} \right)^2 (D_{ij} + D_{kl}) + \frac{1}{2} T_x (\sqrt{D_{ij}^2 + (z_{j,q} - z_{i,q})^2} - D_{ij}) + \frac{1}{2} T_y (\sqrt{D_{kl}^2 + (z_{l,q} - z_{k,q})^2} - D_{kl}) \right\} \\ + \sum_p^{N_x} \left\{ \frac{1}{4} \rho \left(\frac{z_{p,q} - z_{p,q-1}}{\Delta t} \right)^2 D_{ij} + \frac{1}{2} T_x (\sqrt{D_{ij}^2 + (z_{j,q} - z_{i,q})^2} - D_{ij}) \right\} \\ + \sum_p^{N_y} \left\{ \frac{1}{4} \rho \left(\frac{z_{p,q} - z_{p,q-1}}{\Delta t} \right)^2 D_{kl} + \frac{1}{2} T_y (\sqrt{D_{kl}^2 + (z_{l,q} - z_{k,q})^2} - D_{kl}) \right\} \quad (20)$$

となる。フレーム自身の打撃に対する振動や固有振動は多くの論文で論じられているので、本論文ではフレーム振動には深く関わらず、ストリング面振動とその除振効果について数値解析し音響測定の実験結果と比較する。質量の十分重いフレームはストリング面振動に対して振動の節を構成する。

(3) 打撃点の設定, 初期条件, 時間刻み

解析を行う打撃点は座標中心から右へ40mmずれた場所とし、特定の振動を避けた一般的な例を計算する。初期条件はテニスボールがストリング面から離れる瞬間を捉え位置と速度を両方とも設定する手順が正しいが、簡単のため速度を0とし、ストリング面の球形に凹んだ状態を初期値とする。川副ら(2010)による報告に、超高速ビデオ画像による打撃の瞬間を捉えた映像が有る。ボールは、扁平になりながら凹んだストリング面に飲み込まれ、ほぼ片側半分の表面をストリング面と接触させた後、表面から離れる。この衝突状況では、衝突開始からボールが離れるまでの時間は3.8msで、ストリング面が自由な振動を始めるのはその0.1ms程度前となる。衝突中のストリング面の振動には、接触部の周囲で円形に広がる波面の存在が想定される。こうした状況でも、衝突が終わる瞬間のストリング面に残された接触歪からの解放は振動全体を支配するのに十分なエネルギーを持つ。

初期衝撃としてボール半径の倍の半径(65mm)で5mmの円形窪みをストリング面の中心座標から40mmグリップ側にずらして与える。これにより非対称な衝撃波動がストリング面に生成され一般的な振動の発生が構築される。シミュレーションで用いる時間刻みは $\Delta t = 10^{-7}$ sとした。振動面の時間発展は高周波の振動スペクトルを含むので、0.2msの時間幅でも十分な細かさが必要で、 $N = 2 \times 10^4$ ステップの時間トレースを行う。重りとバネによる振動の運動方程式はバネの力がポテンシャルエネルギーの傾きとして直接導出されるが、ストリングス波動の場合は式(10)のポテンシャルエネルギーからストリングスに働く上下の力を直接導くことはできない。ストリングス張力は常に一定で、波動の進行方向に伸縮が伝播する。

(4) 除振項の設定

区分点 i の除振項として、ゴム輪の作用する位置を図 1 (b) の様に x 軸 $u=19$, y 軸 $v=8 \sim 9$ の場所に設定し、各弦のそれぞれ 12 点に振動速度に比例する制動項 $\alpha(i)$ を設ける。除振の制動係数は次節の一次元の結果を用いる。

3・4 一次元での速度制動に於ける除振効果のシミュレーション

(1) 除振項の簡単な見積もり

振動速度に制動を掛ける除振効果を定式化し、ダンパ係数を大ざっぱに見積もると、波のコブを $\sin$ 波の半分として捉え、波高値 z_0 , コブ波の長さを $l \sim 0.01$ とすれば、コブは

$$z(x, y, t) \sim z_0 \sin\left\{\frac{\pi}{l}(vt - x)\right\} \quad (21)$$

の様に表される。何も無い場所での波の伝搬速度は、ストリングス張力 $T=55$ ポンド、ストリングス密度 $\rho=1.6$ g/m とすると、 $v_0=3.9 \times 10^2$ m/s となる。ダンパ部でこの速度が $1/\eta$ 倍となり $v_d=v_0/\eta$ となったとして見積もると

$$\begin{aligned} T_x \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} &= \alpha(x) \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \\ \Rightarrow -\left\{T_x \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \rho \left(\frac{\pi v_d}{l}\right)^2\right\} \sin\left\{\frac{\pi}{l}(v_d t - x)\right\} &= \alpha(x) \frac{\pi}{l} v_d \cos\left\{\frac{\pi}{l}(v_d t - x)\right\} \\ \frac{\alpha}{\rho} \sim \frac{\pi}{l} \left(\frac{v_0^2}{v_d} - v_d\right) < \tan\left\{\frac{\pi}{l}(v_d t - x)\right\} > &= \frac{\pi}{l} v_0 A \sim \frac{3.14}{0.01} \times 3.9 \times 10^2 A \sim 1.2 \times 10^5 A \rightarrow 8.4 \times 10^4 \end{aligned} \quad (22)$$

となる。波形変形の有効値として $A \sim 0.7$ を与えれば、ダンパ係数としておよそ $\alpha/\rho=8.4 \times 10^4$ の値を得る。

(2) 一次元に於ける除振項のシミュレーション

実際の二次元での除振効果は分かり難いので、簡単な一次元でのシミュレーションを行い、制動項の数値を求めることにした。有限差分法として、長さ $L=300$ mm のストリングスに対し 240 等分した区分点を設定する。ダンパが障壁の状態を形成する為、ダンパ位置で波の反射と透過が生まれ、波のエネルギーの吸収はそれらの総合的な結果として決定される。一次元の弦に衝撃が加えられ、図 2 の様に $\sin$ 波的なコブがストリングス上で伝搬し、端で反射するとした場合、何も無い状態でのコブ波動は衝撃位置で自由度の有る方向に伝搬し、固定された端で反射し、反転したコブ波動として同じ形を保って伝搬を続ける。 $t=0.04$ ms ではコブ波が 2 つに分かれ左右への伝搬が始まる。 $t=0.2$ ms では波形を保ったまま伝搬が続き、 $t=0.4$ ms ではストリングス端で反射し、振幅向きが逆転して逆向きに伝搬する様子が分かる。

Fig. 2 Wave propagations on one dimensional string with no damper. A bump wave is created beside the string surface centre, which shows a basic pattern in various wave propagation structures.

図3の矢印位置にダンパを幅として設け、10点の区分点に於ける速度制動を行う。波束はダンパ位置で反射波と透過波に分かれ波形が変わる。ここでは式(13)(14)で示した速度に比例するダンピング係数 α/ρ を(a) 5×10^3 , (b) 5×10^4 , (c) 5×10^5 の様に選んだ。ダンピング係数 α は微分方程式(10)に於いて、それぞれ微分項の値が同じ大きさと成る時に影響が大きくなる。図3に波面がダンパに到達する $t=0.2\text{ms}$ と、その後の $t=0.4\text{ms}$ の波面の様子を示す。ダンパにおける反射と透過の波は(a)ではほぼ透過波として通過し、フレームで反射し波が反転している。(b)ではコブが2つに分離して伝搬する。ここではほぼ半分ずつ反射と透過が起こり、波高が小さくなっていることが分かる。(c)では波がダンパで若干波高を小さくして反射されている。

Fig. 3 Wave propagations on one dimensional string with a damper. The damper area has 10 damping point. Reflection and transmission waves generated at the same time t s of 12.5 mm width at an arrow mark. The fitted damping factor becomes the case (b), where the reflected and transmitted waves are generated at the same time.

図3の一次元シミュレーションでダンパ係数を詳しく調べ、19 mJの初期エネルギーに対し0.4 ms後のエネルギー値をプロットすると図4のようになる。

Fig. 4 Damped energy value at $t=0.4$ [ms] after string deformation with 19 [mJ]. The detailed factors are checked and the minimum system energy is obtained at $\alpha/\rho=8 \times 10^4$.

この図で最小値となるエネルギー値は初期値のほぼ半分となる 8.5mJ に達している. ここに, 振動速度を制動させるダンパ効果には減衰係数に最適条件が存在し, 本例では $\alpha/p=8 \times 10^4$ となることが分かった.

3・5 2次元ストリング面振動のシミュレーション

(1) プログラミング

数値解析用のプログラミングを行うソフトウェア言語として Fortran, C などが上げられるが, 本研究では表示機能の有る Mathematica を用いることにした.

(2) ダンパ無し of ストリング振動のシミュレーション ($T_x=T_y=55$ pound : Racket A)

ここに一次元の場合と同様にボールによる衝撃に相当する歪エネルギーをストリング面に与えた. この衝撃波の初期生成状態はテニスボールによる衝撃波動とは全く異なるが, 波動の伝搬の様子を知る上では分かり易い.

① 初期衝撃の状態を 3次元 m 単位で図 5～図 8 に示す. ストリング面に蓄えられた歪エネルギーは $E=1.47$ J となった.

Fig. 5 Initial states of the string surface at times $t=0, 0.1$ and 0.2 ms. This hitting shock condition is different from the tennis ball hitting, but the wave propagations become directly visible.

② 波面が広がり, グリップ側のフレームに到達する状態を図 6 に示す. (b) では波面がフレームと平行にならず, 長方形のストリングス格子平面(string rectangle)で格子状に位相が揃う様子が分かる.

Fig. 6 Extending $\square$ waves toward the frame and reflecting $\square$ waves. The wave propagations reflect at both the string rectangle edges and the frame.

③ 両側からの反射とグリップ側からの波面が重なりヘッド方向に 3 角形を成す波面が生まれる.

Fig. 7 Reflecting $\square$ waves toward the centre of the head part at times $t=0.6, 0.7$ and 0.8 ms. The wave energy concentrates to the anti-spot of the hitting spot.

④その後ヘッド側からの反射面が合流し、複雑に絡み合う．図8の様に2次元ストリングス面での波の重なり合いは基本的に長方形の枠の中で波面が揃うようになり，定在波動的な振動モードは長方形の辺の長さを半波長とする波で構成される．これは，(a)フレームに終端する1次元のストリングスの長さが揃いで振動モードが揃わないこと．(b)1次元ストリングス領域と2次元ストリングス領域の境で位相のずれる反射壁を形成すること．以上の2つが絡み合って固有振動が形成されると考えて良い．従って，長方形ストリングス面の端で発生する音響的な疑似定在波は1次元の Fig.3 (c)の様なストリングス途中の反射が定在波を形成するものと考えられる．

Fig. 8 Semi-standing 凸凹 wave in the string rectangle at times $t=1.7, 1.8$ and 1.9 ms. Overlapped waves gradually create standing wave modes in periodic boundaries.

(3) x 軸と y 軸のストリングス張力が異なる場合の振動シミュレーション ($T_x=55, T_y=40$ pound : Racket B)

縦横の張力が異なると，図9と図10に示す様に振動の伝搬速度が縦横で異なり，波動伝搬の形が変わることが確かめられる．しかし2次元平面上で音圧を生み出す振動ピークが疑似固有振動数を形成し，周期的な振動だけが1つのモードの疑似固有振動として観測される．初期段階の衝撃波の様子を以下に示す．

① $t=0.5$ ms の波面は張力の同じ場合と比較して，横方向の伝搬が少し遅れていることが分かる．波面の模様は変形しているがパターンは変わらない．衝撃エネルギーは $E=1.25$ J となった．このケースでは同じ張力の場合よりも疑似固有振動数は低くなる．

Fig. 9 Extending 凹 waves toward the frame at times $t=0.3, 0.4$ and 0.5 ms. The shock waves change the propagating structures with different string tensions ($T_x=55, T_y=40$ pound).

②円形波面が反射波で3角形の波面に形が変わる． $t=0.8$ ms の3角形は図7と比較して少し変形している．

Fig. 10 Reflecting 凸 waves toward the head centre part at times $t=0.6, 0.7$ and 0.8 ms. The shockwaves propagate in a same pattern, where the basic sound is produced by peak vibrations.

3・6 ゴム輪を装着した2次元ストリング面振動のシミュレーション

この節では衝撃波に対するダンパの除振の様子をシミュレーションで示し、最適な制動係数を求める。

(1) ダンパの有るストリング面振動のシミュレーション($T_x=T_y=55$ pound : Racket A)

ダンパ効果はフレームでの反射が起こる頃から有効となるので $t=0.3$ ms からの様子を詳しく示すことにする。速度に比例する減衰係数は式(22)と一次元のシミュレーション結果を考慮し $\alpha/p=5 \times 10^4$ Ns/m とした。

① ダンパ効果の利き始めを図 11 に示す。ダンパの付いたグリップ側の中央の縦ストリングス 2 本が僅かしか動かない様子が分かる。格子状 2 次元平面の境界で反射が起き、ダンパで波面が吸収される様子が分かる。

Fig. 11 The shockwave structure with a damper at times $t=0.30, 0.36$ and 0.42 ms. The wave becomes flat at the right edge centre by damping.

② 0.48~0.6 ms 後の減衰状態を図 12 に示す。ダンパ効果でコブ波面のフレームからの反射が消えていることが分かる。エネルギーの減衰が一回のダンピングで $E_1/E_0=0.966$ になる場合、 $(E_1/E_0)^n=1/e$ になる回数は $n=29.1$ で、±の2つの波面の存在を考慮し、振動周期(1kHz)の半分の時間 $t=0.5$ ms を掛けると時定数は $\tau=14.6$ ms となる。この時定数は次章の実験結果とほぼ一致する。

Fig. 12 Wave structures with a damper at times $t=0.48, 0.54$ and 0.6 ms. The right edge wave is damped with the total energy rate 0.966 in one reflection.

(2) 2次元ストリング面振動に対するダンパ係数の最適値

2次元系のシミュレーションは時間が掛るので、荒目で格子平面の分割を5とし時間刻みを $\Delta t=10^{-7}$ に設定した。この空間刻みと時間刻みはシミュレーションでダンパ効果を求めるに必要な最低限の値で、時間刻み幅が倍になるとシミュレーション結果の精度は失われてしまう。図 13 に $n=6000$ でのダンピング係数に対する除振効果を、ダンパ無とのエネルギー値の差 ΔE として示す。最適係数は $\alpha/p=5.5 \times 10^4$ と推定される。

Fig. 13 Damping energy in the racket A at $n=6000$. The best factor value should be $\alpha/p=6.0 \times 10^4$. The energy differences are checked by the same time results because of the calculation precision. Whole-time precision is not good in these wave propagation simulations.

4. ストリング面振動と除振効果の計測

4・1 ラケットの振動計測装置

ここで前章のラケットの振動分析と合わせて、フレームとストリング面から発生する振動を実際に測定する。フレームはPRINCE 製 Graphite pro-SERISE110 を用い、ストリングスは TOA-STRINGS 製の ASTERISTA130 (密度: $\rho = 1.6 \text{ g/m}$) を用いた。実験は、ラケットのストリング面を地面と水平にし、図 14 のように台の端に固定した。また、発生した音波が干渉しないように台の高さを 0.7m とし、台とグリップの間には共振を防ぐためゴムを敷いた。図 15 は、上部から見た写真を示す。

Fig. 14 Experimental apparatus configurations. Tennis ball is accelerated by free dropping at 500mm height from the racket surface.

Fig.15 Overview of the experiment apparatus. The grip of the tennis racket is anchored by cramps. A microphone is set on the floor and an acceleration sensor is fixed on the neck of the racket.

フレームの振動を測定するため、加速度センサ (図 16-a: 秋月電子通商, AE-MICAMP) [$\sim 2\text{kHz}$ (-3dB)] をフレームの首部に固定し、ストリング面の振動を測定するためマイクロフォン (図 16-b: 秋月電子通商, AE-KXSC7-2050) [$50\text{Hz} \sim 16\text{kHz}$ (-3dB)] をストリング面から 50mm 下の打撃点下部に固定した。各センサから出力されたアナログ電圧信号を A/D 変換ボード (Interface 製: CSI-320312) でデジタル化し、サンプリング周波数を 10kHz で 0.8 秒間記録した。両方のセンサの回路には、商用電源の影響を取り除くため 50Hz のローパスフィルタが構成されている。

(a) 3-axis acceleration sensor

(b) Microphone with amplifier

Fig.16 Sensor module. The acceleration sensor (AE-MICAMP) counts shocks of $1\text{Hz} \sim 2\text{kHz}$. The microphone (AE-KXSC7-2050) counts sound vibration from 50Hz to 2kHz . The microphone signals are compensated to be flat sensing.

4・2 フレームの振動計測

図 14 に示したようにストリング面上部 0.5m の位置からボール（公式球）を自由落下させ、ストリング面に衝撃を与えた。その際、衝撃を 1 回としボールが接触する直前からのセンサ出力を測定した。フレームに対するストリング面の張力の影響を確認するために、ラケット A（X 軸=Y 軸=55 pound）と張力が異なるラケット B（X 軸=55 pound, Y 軸=40 pound）の 2 つのフレーム振動を測定した。図 17 に各センサの出力電圧を示す。

Fig.17 A measured by the acceleration sensor and the microphone. The microphone catches string surface vibration signals. The acceleration sensor catches racket frame vibrations. The compared results of the racket A and B are not so different in signal structures. The vibrations centers are set to X, Y: $V_0=1V$, Z: $V_0=1.25V$, mic: $V_0=2.5V$

図 17 では、ボールが接触した瞬間から X, Y, Z の 3 軸とも振動が始まっていることが分かる。加速度センサで測定したフレームの衝撃振動は 10Hz～20Hz であった。フレームの固有振動の状態を調べるために、加速度センサの Z 軸出力のスペクトル分析を波形解析ソフト SPCANA で行った。図 17 のデータを 10ms ごとに 0～250ms の間でスペクトル分析を行い、フレームの振動の様子を調べた。これらの結果を図 18 に示す。

Fig.18 The analysis of racket frame vibration by acceleration sensor. The acceleration sensor measures well impact vibrations, but weakly measures string surface vibrations.

図 18 で 0.05kHz 付近のピーク振動は長く続く。また、低周波のピーク振動のラケット A は 0.25kHz で 50ms まで減衰が続き、ラケット B は 0.2kHz で 150ms まで減衰が続き。この加速度センサでの計測結果は、音響振動を正確に捉えられない。加速度センサはセット場所が節になると、その振動モードは検知できない。

4・3 ストリング面振動の音響計測

ストリング面の振動は、第 3 章で示したように格子形状の 2 次元ストリング面内で反射を引き起こす。4.2 に示した Z 軸方向の加速度センサ出力からこれらを読み取ることが難しいので、ストリング面が起こす音響を

マイクロフォンで測定し、その電圧値をフレーム同様にスペクトル分析する。テニスラケットのストリング面振動については、Hawaii 大学などの報告が有るものの周波数スペクトル分析と除振された周波数については良く知られていない。本章では、マイクロフォンを用いてこのストリング面振動の音響計測を行い、周波数分析を行う。これらの振動周波数の時間変化を図 19 に示す。(a)はラケット A (X 軸=Y 軸=55 pound) のストリング面で、(b)はラケット B (X 軸=55 pound, Y 軸=40 pound) のストリング面の結果であり、x-y の不揃いなストリング面でも振動モードが大きく 2 つに分かれず、周波数がシフトする結果となった。

Fig.19 The sound spectrum analysis of string surfaces with different tensions by the microphone. All sound signals just after the shock have complex broadened spectra. The signal of the racket A has the peaks at 1.1 kHz and 1.65 kHz, and the B has the peaks at 0.85 kHz, 1.4 kHz, and 1.7(0.85×2)kHz.

2つのラケットとも 100ms 程度で単一周波数に収束していることが分かる。音波のピークは、ラケット A では 1.1 kHz 付近にあり、ラケット B では 0.85kHz 付近にある。いずれのラケットも X 軸方向と Y 軸方向で異なる固有振動が存在すると考えられるが、長く残る固有振動モードは低い周波数モードだけとなる。

4・4 ダンパ形状に依存する除振効果

プレイヤーは、打撃の良し悪しを腕にかかる負担、打撃音そして振動によって判断している。ストリング面やフレームの振動は、プレイヤーの腕の感覚に不快感を残すことが多く、快適な打撃を実現するため、これらを取り除くための除振ゴム (Damper) が市販されている。この除振ゴムの効果をスペクトル分析から調べる。ここでは、図 20 に示す形状の違う 2 種類の除振ゴムの性能を比較・検討する。

Fig.20 Experimented damper of commercial tools. The dampers A and B are a circular type and a square type, which are popular types.

2種類のダンパによるストリング面の減衰過程における周波数分析の時間変化を図 21 に示す。図 19-a と比較するとストリング面で生じた 1kHz 付近の振動が短時間で減衰していることが分かる。低周波領域の振動も 25ms 程度で減衰していることが分かる。さらに、これらの結果を分かりやすくするため、濃淡図にしたものを図 22 に示す。このように、ラケット にダンパを取り付けることでストリング面に生じた 1 kHz 付近の音波が短時間に減衰していることが分かる。これは、メーカーが形状の最適化を図った結果と思われる。

Fig.21 The sound spectrum analysis of the string surface A with the dampers. Tail signals of damped sounds are smaller enough than the bare result.

Fig.22 The gray-scaled images of the Fig. 21 converted to intensity color maps.

4・5 ダンパの質量変化による除振効果

本節では、除振ゴムの形状がどのようにストリング面の振動に影響をもたらすかをラケット A で調べた。ストリング振動に対する効果を詳しく調べるため、3.6 で示したように最適ダンパ係数 (Damping factor: $\alpha=6 \times 10^{-4}$) がシミュレーションの結果から得られている。こうしたダンパ係数に最適値が存在することから、実際の除振ゴムのダンピング効果においても形状や質量に依存する最適条件が存在する。除振ゴムの変形がどのようにストリング面の振動に影響をもたらすかをラケット A で調べた。円形の除振ゴムをノーマルタイプ (図 23-(a): Normal) とし、変形したゴムとして半分にしたもの (図 23-(b): Half) と 5 円玉を付加したもの (図 23-(c): Normal with coin) を用いる。各除振ゴムを装着した際のスペクトル分析の結果を図 24 に示す。

Fig.23 Different structure dampers used for the comparison. The sound spectra with these dampers are checked by the microphone.

Fig.24 The sound spectra analysis of the different structure dampers. The low spectra area is cut off for comparing the vibration damping. The signal by the half size damper decays very slowly. The normal damper has the best ability of the damping.

図 24-(a) は図 21-(b) の 0.5kHz~1.5kHz をピックアップした図である。それに対して、図 24-(b) は形状を半分にしたことで十分な減衰効果が得られず、ストリング面で発生した 1kHz 付近の振動モードが中々消えていないことが分かる。また、図 24-(c) のように、コインを付けることによって除振効果が若干妨げられている。このように、ダンパの除振効果は形状や質量に関係している。ダンパ A では除振効果が働き、分布に 0.2 kHz 周期でのなだらかな変調が見られた。また、5 円玉付ダンパは、1.1 kHz 付近までの変調モードが強く残り、除振効果を弱めてしまう。このように第 3 章のシミュレーションの結果と同様にダンパの最適化が必要であることが示唆された。測定結果では除振効果として市販ゴム輪に目立った欠点は無い様に思われる。

ストリング面振動の除振が上手く行われてもフレームの振動を止めることにはならない。フレームの振動の除振については改めてフレーム除振装置の開発が求められる。

5. 結 言

第 3 章の有限差分法によるシミュレーションで、テニスラケットのストリング面振動の除振を行うにはダンパ形状の最適化を計る必要性が示した。この伝搬の様子は、格子状のストリング面、フレーム部、それらを繋ぐ一次元ストリング部の振動がそれぞれ反射波を生み出し、それらが絡み合ったものとなっている。第 4 章で、テニスボールをストリング面に直接当て、マイクを用いた音響分析から市販のゴム輪の除振効果を調べた。

- ① ゴム輪が無いとストリング面振動は 300ms 以上続く。
- ② 単純ゴム輪による最適な除振ではストリング面振動は 50ms で消失する。
- ③ ゴム輪の変形はいずれも除振効果を弱める
- ④ X 軸方向と Y 軸方向とも 55 pound の張力としたストリング面の振動は 1.1kHz に強いピークを持ち、X 軸方向が 55pound, Y 軸方向が 40pound の張力としたストリング面の振動は 0.8kHz に強いピークが現れた。
- ⑤ X 軸と Y 軸で異なる張力の場合、異なる振動のピークが現れると想定していたが、モード周期の分裂は現れなかった。

この結果と定在波の周期的条件を考え合わせると、格子状ストリング面が 1 つの基本振動モードを生み出しているものと思われる。これは、二次元ストリング面の振動ピークの現れる周期がマイクに音圧を与えるので、3 章の衝撃波のシミュレーションに於いて、平面での波動パターンが異なるにも関わらず音圧の周期が基本モードに統一される予想とも一致する。

文献

- Allen, T., Goodwill, S. and Haake, S., Experimental validation of a finite-element model of a tennis racket string-bed, *The Engineering of Sport* 7, Vol.1 (2008), pp.115-123.
- ANSYS INC., Computer simulation of ball impact helps design better tennis rackets (2012), available from <<http://resource.ansys.com/staticassets/ANSYS/staticassets/resourcelibrary/article/AA-V6-I2-Full-Version.pdf>>, (accessed on 25 May 2016).
- Cross, R. and Bower, R., Measurements of string tension in a tennis racket, *Sports Engineering*, Vol. 4(2001), pp.165-175.
- Cross, R., Flexible beam analysis of the effects of string tension and frame stiffness on racket performance, *Sports Engineering*, Vol.3(2000), pp.111-122, Blackwell Science Ltd.
- Dassault Systemes, Workshop tennis racket simulation using Abaqus (2007).
- 後藤憲一, 西山敏之, 山本邦夫, 神吉健, 山崎修一郎, 詳解現代物理学演習(1972), pp.27-49, 共立出版.
- 神田芳文, 高塚正則, 有限要素法によるテニスラケットとボールの衝突分析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.62, No.598 (1996), pp.78-85.
- 川副嘉彦, 武田幸宏, 中川慎理, テニスラケットのスピン性能におよぼすガット・ノッチの影響 (スピン量・接触時間・打球速度の超高速ビデオ画像分析), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.76, No.770 (2010), pp.294-303.
- Li, L., Yang, S.H., Hwang, C. and Kim, Y.S., Effects of string tension and impact location on tennis playing, *Journal of Mechanical Science and Technology* 23 (2009), pp.2990-2997.
- Mohr, S., Cotter, R., Lau, D., Gillet, C., Kotze, J., Jolly, M. and Schwenger, R., Dynamics of a string-bed damper on tennis rackets, *The Engineering of Sport* 7, Vol.2(2008), pp.179-189, Blackwell Science Ltd.
- 園田素康, 松久寛, 朴正圭, 振動エネルギーを考慮したテニスラケットの反発について, VSTech2003 振動・音響技術シンポジウム講演論文集 (2003), pp.187-190.
- Wang, I.T., Lin, Y-Y., Su, C-K and Lin, P-C., The effect of tennis racket string vibration absorber placement on tennis racket vibrations, *International Society of Biomechanics in Sports* (2005), pp.243-245.
- Weir, D., Finite element modelling of tennis racket impacts to predict spin generation, Doctoral thesis of Loughborough University (2013), pp.33-120.

References

- Allen, T., Goodwill, S. and Haake, S., Experimental validation of a finite-element model of a tennis racket string-bed, *The Engineering of Sport* 7, Vol.1 (2008), pp.115-123.
- ANSYS INC., Computer simulation of ball impact helps design better tennis rackets (2012), available from <<http://resource.ansys.com/staticassets/ANSYS/staticassets/resourcelibrary/article/AA-V6-I2-Full-Version.pdf>>, (accessed on 25 May 2016).
- Cross, R. and Bower, R., Measurements of string tension in a tennis racket, *Sports Engineering*, Vol. 4(2001), pp.165-175.
- Cross, R., Flexible beam analysis of the effects of string tension and frame stiffness on racket performance, *Sports Engineering*, Vol.3(2000), pp.111-122, Blackwell Science Ltd.
- Dassault Systemes, Workshop tennis racket simulation using Abaqus (2007).
- Gotoh, K., Hishiyama, T., Yamamoto, K., Kamiyoshi, K. and Yamazaki, S., Modern physics seminar (1972), pp.27-49, kyoritsu-pub (in Japanese).
- Kanda, Y. and Takatsuka, M., Finite element analysis of impact of a ball on a tennis racket -Analysis of impact of a ball on clamped strings-, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 62, No.598(1996), pp.2164-2171 (in Japanese).
- Kawazoe, Y., Takeda, Y. and Nakagawa, M., Effect of string notches on tennis racket spin performance: Ball spin rate, contact time and post-impact ball velocity with ultra-high-speed video analysis (Mechanical systems), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.76, No.770(2010), pp.2646-2655 (in Japanese).
- Li, L., Yang, S.H., Hwang, C. and Kim, Y.S., Effects of string tension and impact location on tennis playing, *Journal of Mechanical Science and Technology* 23 (2009), pp.2990-2997.

- Mohr, S., Cottey, R., Lau, D., Gillet, C., Kotze, J., Jolly, M. and Schwenger, R., Dynamics of a string-bed damper on tennis rackets, *The Engineering of Sport* 7, Vol.2(2008) , pp.179-189, Blackwell Science Ltd.
- Sonoda, M., Matsuhisa, H. and ParkJ, G., Theoretical analysis of restitution of tennis racket by considering the vibration energy, *Vibration and acoustic new technology symposium 2003 (of JSME)*, pp.187-190 (in Japanese).
- Wang, I.T., Lin, Y-Y., Su, C-K and Lin, P-C., The effect of tennis racket string vibration absorber placement on tennis racket vibrations, *International Society of Biomechanics in Sports* (2005), pp.243-245.
- Weir, D., Finite element modelling of tennis racket impacts to predict spin generation, *Doctoral thesis of Loughborough University* (2013), pp.33-120.