前縁を柔軟支持された矩形シートのフラッタ
(シート支持条件のフラッタ特性への影響)廣明 慶一^{*1}, 渡辺 昌宏^{*2}Flutter of a rectangular sheet flexibly supported at the leading edge
(Influence of support condition of the sheet on flutter characteristics)Keiichi HIROAKI^{*1} and Masahiro WATANABE^{*2}^{*1, *2} Aoyama Gakuin Univ. Dept. of Mechanical Engineering

5-10-1 Fuchinobe, Chuo-ku, Sagami-hara-shi, Kanagawa, 252-5258, Japan

Received 6 January 2016

Abstract

This paper deals with the flutter analysis of a rectangular sheet flexibly supported by a wire at the leading edge of the sheet subjected to axial fluid flow. The unsteady fluid force acting on the sheet surface is calculated by using Doublet-point method, which is based on unsteady lifting surface theory. The equation of motion of the sheet coupled with the wire is derived by employing the finite element method. Flutter velocity, frequency and mode are examined through the root locus of the flutter determinant of the system with changing flow velocity. Moreover we measure the flutter velocity and frequency. Flutter characteristic is clarified by comparing the analytical results with the experimental results. To organize the analytical and experimental results, we develop equivalent bending stiffness and torsional stiffness of the leading edge supported by the wire. Then the parameters of wire (tension, length, diameter and Young's modulus) are reduced in two dimensionless numbers (dimensionless equivalent bending stiffness and torsional stiffness). Moreover we organize the analytical and experimental results using these dimensionless numbers.

Key words : Equivalent bending stiffness, Equivalent torsional stiffness, Flutter analysis, Unsteady lifting surface theory, Doublet-point method, Wind-tunnel experiment

1. はじめに

印刷機械やフィルム製造機械などでシートが高速搬送される場合、シートの振動と空気の流れが連成してフラッタが発生し、生産性の低下や騒音問題を招くことがある。一般に、これらの機械でハンドリングされるシートは、端部を柔軟支持された状態で流れにさらされる場合が多い。このため、シート支持部の柔軟性がフラッタ特性に及ぼす影響を明らかにすることは重要である。

これまでに、シートのフラッタに関する研究の多くは、上流側の一辺（前縁）を片持ち支持したシートを対象にフラッタ特性や発生条件が調べられている（Kornecki et al., 1976）,（Shayo, 1980）,（長倉, 金子, 1992）,（Huang, 1995）,（Howell et al, 2009）,（山口他, 1999）,（Watanabe et al, 2002a, 2002b）,（金子, 呉, 2002）,（呉, 金子, 2003）,（Tang et al., 2003）,（渡辺他, 2012）,（長谷川他, 2013）,（藤田, 今井, 2013）。一方, Guo ら（Guo and Paidoussis, 2000）, Eloy ら（Eloy et al., 2007）, Gibbs ら（Gibbs et al., 2012）, Howell ら（Howell and Lucey, 2015）は、前縁をピン支持またはばね支持したシートを対象にフラッタ解析を行い、シート支持条件の違いがフラッタ流速に及ぼす影響を調べている。しかしながら、シート支持部の柔軟性がフラッタ特性と発生条件に及ぼす影響については明らかにされていない。また、これらの研究においては、実験による検証は行われていない。

著者ら（廣明他, 2014）,（Hiroaki et al., 2015）は、細いワイヤを用いて前縁を柔軟に支持した有限幅の矩形シー

トを対象に、三次元フラッタ解析と風洞実験を行い、シート支持部の柔軟性がフラッタ特性と発生条件に及ぼす影響を調べた。そして、ワイヤの長さや張力がフラッタ流速とフラッタモードに及ぼす影響を明らかにした。しかしながら、シート支持部の柔軟性は、ワイヤの長さや張力だけではなく、ワイヤの直径や材質にも依存し、これらのパラメータによりシート支持部（前縁部）の曲げ（撓み）剛性とねじり剛性が変化する。このため、ワイヤの長さ、張力、直径、ヤング率などのパラメータを、シート支持部の等価的な曲げ剛性とねじり剛性として一般的に整理し、フラッタ特性と発生条件への影響を明らかにする必要がある。

そこで、本研究ではシート支持部（前縁）の曲げ剛性とねじり剛性に関する無次元数である、無次元曲げ剛性と無次元ねじり剛性を定義した。ワイヤによる柔軟支持のパラメータは、この二つの無次元数に縮約される。そして、これらの無次元数を用いて解析結果と実験結果を整理し、シート支持部の柔軟性がフラッタ特性と発生条件に及ぼす影響を調べた。また、シート前縁をワイヤで支持した場合、ピン支持した場合、固定支持した場合について、シート表面における流体力の仕事が正の領域（励振エネルギーの流入領域）がどのように変化するかを調べ、シート支持条件のフラッタ特性への影響を検討した。

2. 三次元フラッタ解析

2・1 解析モデル

図1にワイヤで支持された有限幅シートの三次元フラッタ解析モデルと座標系を示す。シートは前縁（上流端）をワイヤで柔軟に支持され、下流端は自由である。密度 ρ_f の流体が x 軸方向に一様流速 U で流れているとする。重力は x 軸方向（流れと同じ方向）に作用している。ここで、シート支持部の柔軟性がフラッタ特性と発生条件に及ぼす影響を調べるために、ワイヤの長さ、張力、直径、ヤング率などのパラメータを、シート支持部の等価的な曲げ剛性とねじり剛性として一般的に整理する。図2は、一般的な並進ばねとねじりばねでシート前縁を支持した解析モデルであり、 k_b と k_t はそれぞれワイヤ支持と等価的な曲げ剛性とねじり剛性である。シートのコード（長さ）、スパン（幅）、厚さ、密度をそれぞれ L, b, h, ρ_s と定義する。また、ワイヤ長さとワイヤ径をそれぞれ L_w, d と定義する。

Fig. 1 Schematic illustrations of the analytical models.

Fig. 2 Schematic illustrations of the sheet flexibly supported at the leading edge.

2・2 三次元非定常流体力の計算

非定常揚力面理論に基づくラプラス領域に拡張された DPM (Ueda, 1987)を用いて、シート表面に作用する非定常流体力 $\mathbf{Q}$ を求める。また、ワイヤに作用する流体力は考慮しない。シート上面と下面の圧力差より生じる流体圧力の複素振幅を Δp とし、シート表面での z 方向吹上げ速度の複素振幅を $\bar{w}$ とする。吹上げ速度と圧力差の複素振幅を直接結びつける関係式は、式(1)に示す非圧縮、非粘性の三次元ポテンシャル流れを基礎とする Küssner の積分方程式 (Küssner, 1941)で与えられる。また、式中の s はラプラス変数であり、無次元時間 $\tau = tU/b$ に関し

て無次元ラプラス変数を $\bar{s} = s/bU$ と定義する．式中の上付き $-$ はラプラス変換した変数を表し，積分範囲 s' はシートの全領域である．

$$\bar{w}'(x', y') = \frac{1}{8\pi} \iint_{s'} \Delta \bar{p}(\xi', \eta') \cdot K(x'_0, y'_0) d\xi' d\eta' \quad (1)$$

ここで，核関数は式 (2) で与えられる．

$$K(x'_0, y'_0) = e^{-\bar{s}x'_0} B(\bar{s}, r, X) \quad (2)$$

$$X = x'_0 = x' - \xi', \quad r = |y'_0| = |y' - \eta'| \quad (3)$$

また，上式の $'$ は無次元化された変数を表し，無次元化された各変数は代表長さ b を用いて以下のように定義される．

$$x' = x/b, \quad y' = y/b, \quad \xi' = \xi/b, \quad \eta' = \eta/b, \quad \zeta' = \zeta/b, \quad \bar{w}' = \bar{w}/U, \quad \Delta \bar{p}' = \Delta \bar{p}/(\rho_f U^2/2) \quad (4)$$

DPM により非定常流体力を計算するために，図 3 に示すように要素表面上にダブレット点と吹上げ点を $1/4 \sim 3/4$ 翼弦則に基づき，それぞれ (ξ'_i, η'_i) ， (x'_i, y'_i) に配置する．要素表面上に分布する流体圧力をダブレット点に集約し，分布した吹上げ速度の代表点を吹上げ点にとると，式 (1) の積分方程式を離散化することができる．各要素の表面積を Δ'_j すると，離散化された流体圧力 $\Delta \bar{p}'$ は吹上げ速度 $\bar{w}'$ を用いて以下の式 (5) で求められる．

$$\Delta \bar{p}' = \mathbf{D}(\bar{s})^{-1} \bar{w}' \quad (i, j = 1 \cdots N) \quad (5)$$

$$\bar{w}' = \{\bar{w}'(x'_i, y'_i)\}, \quad \Delta \bar{p}' = \{\Delta \bar{p}'(\xi'_j, \eta'_j)\}, \quad \mathbf{D}(\bar{s}) = [d_{ij}] = \left[\frac{\Delta'_j}{8\pi} K(x'_i - \xi'_j, y'_i - \eta'_j) \right] \quad (6)$$

このとき，任意の位置での吹上げ速度 $\bar{w}'$ は，シートの z 方向の変位成分を用いて，以下のように与えられる．

$$\bar{w}'(x', y') = \frac{\partial}{\partial x'} \bar{h}'_s(x', y') + \bar{s} \bar{h}'_s(x', y') \quad (7)$$

ここで，上式におけるシートの z 方向成分変位の複素振幅 $\bar{h}'_s$ は，FEM により離散化された板要素内の z 方向成分変位 u_s を用いて与えられる．つまり，各板要素の節点外力が全ての板要素の節点変位ベクトル $\mathbf{e}_s(t)$ と関連付けられて求まる．さらにそれらを重ね合わせ，座標変換を行うことで，FEM 全体座標系での節点外力，つまりシートの弾性変形と連成した非定常流体力 $\mathbf{Q}$ が式 (8) のように求められる．式中の $\mathbf{A}_e$ は無次元化された流力弾性行列である．ここで，非定常流体力の導出および式中の記号の詳細に関しては，既報(廣明他, 2014)，(Hiroaki et al., 2015)を参照．

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}_e \mathbf{X} \quad (8)$$

Fig. 3 Location of the doublet point and up-wash point.

2・3 流体・構造連成系の運動方程式

流体・構造連成系の運動方程式は式 (9) のように表される. 式の左辺は FEM を用いて導出した構造系の運動方程式であり, 右辺は 2・2 節で導出過程を示した非定常流体力である.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_c)\mathbf{X} = \frac{1}{2}\rho_f U^2 b \{\mathbf{A}_e - \mathbf{K}_f\} \mathbf{X} \quad (9)$$

式 (9) 中の $\mathbf{K}_s$ は構造系の剛性行列である. また, $\mathbf{K}_f$, $\mathbf{K}_g$, $\mathbf{K}_c$ はそれぞれ流体摩擦, 重力, ワイヤに付加する張力に起因する幾何剛性行列である. さらに, 構造系の固有モードを成分とするモード行列 Φ を用いたモード近似より $\mathbf{X} = \Phi \mathbf{q}(t)$ と表すと, モード座標に関する運動方程式は式(10)のように求まる.

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega}\mathbf{q}(t) - \frac{1}{2}\rho_f U^2 b \{\tilde{\mathbf{A}}_e - \tilde{\mathbf{K}}_f\} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_e = \Phi^T \mathbf{A}_e \Phi, \quad \tilde{\mathbf{K}}_f = \Phi^T \mathbf{K}_f \Phi \quad (11)$$

以上より, フラッタ行列式は下式 (12) のように求まる. 式 (12) はラプラス変数 s に関する方程式である. また, 式中の $\mathbf{A}'_e(\bar{s})$ はラプラス変換された流弾性行列である.

$$\det [s^2 \mathbf{I} + s \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Omega} - \frac{1}{2}\rho_f U^2 b (\mathbf{A}'_e(\bar{s}) - \tilde{\mathbf{K}}_f)] = 0 \quad (12)$$

ここで, 流れがない ($U=0$) のときの構造系の i 次固有角振動数を ω_i , 減衰比を ζ_i とすると, 式中の行列 $\mathbf{\Omega}$ と $\mathbf{\Gamma}$ は, それぞれ ω_i^2 と $2\omega_i\zeta_i$ を対角成分とする行列として与えられる. 本研究では, 真空中でシートを打撃し, レーザ変位計で計測した減衰波形から構造系の減衰比 ζ を実験的に求める. ここでは, 各モード次数の減衰比 i の値は同じであると仮定し, 実験で得られた 1 次振動モードの減衰比の値を用いて計算を行う. 得られた減衰比の値は表 1 に示す.

流速 U を変化させ, 式 (12) を満足する特性根であるラプラス変数 s を求めて安定性を判別する. 得られた特性根のうち 1 つでも実部が正 ($\text{Re}[s] > 0$) の根があれば, 系は不安定となり, $\text{Im}[s] \neq 0$ の場合にはフラッタが発生する. この時の流速と振動数をそれぞれ, フラッタ流速 U_f , フラッタ振動数 f_f として定義する. また, 系が不安定となる流速におけるフラッタモードを求める. ここでは, フラッタ解析には低次から 9 個の固有振動モードを用いる.

2・4 流体力による仕事

シート表面に作用する非定常流体力 $\mathbf{Q}$ による 1 周期当りの仕事は, 式 (13) で与えられる.

$$E_f = \oint \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{Q} dt = \oint \dot{\mathbf{X}}^T \left\{ \frac{1}{2}\rho_f U^2 b (\mathbf{A}_e - \mathbf{K}_f) \right\} \mathbf{X} dt = \sum_{k=1}^{N_k} E_{local}^{(k)} \quad (13)$$

ここで, k と N_k は節点番号と全節点の数であり, $E_{local}^{(k)}$ は節点 k における局所的な流体力による仕事を表す. つまり, シート表面上のエネルギー収支分布が得られる. また, 特性根から得られる成長率を零 (一定振幅) とし, フラッタモードで振動する変位を節点変位 $\mathbf{X}(t)$ として計算を行う. さらに, 式 (13) はモード近似を適用することで, 式 (14) となる.

$$E_f = \oint \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T \left\{ \frac{1}{2}\rho_f U^2 b (\mathbf{A}_e - \mathbf{K}_f) \right\} \Phi \mathbf{q} dt = \sum_{i=1}^{N_m} E_i \quad (14)$$

ここで, i と N_m はモード次数とモード近似数であり, E_i は i 次モードの仕事を表す. この式 (14) により, エネルギー収支における各固有モードの寄与率を求めることができ, フラッタの発生に支配的な振動モードを調べることができる. 計算では各固有モードのエネルギーの総和が 1 となるように正規化した.

2・5 支配無次元数 および 計算パラメータ

ワイヤとシートの複合系に発生するフラッタ現象を支配する主な無次元数を以下のように定義する．シートに関する無次元数は，無次元ワイヤ長さ L_w^* ，アスペクト比 Λ ，無次元フラッタ流速 U_f^* ，無次元フラッタ振動数 f_f^* である．これらの無次元数は下式で定義される．また， D はシートの曲げ剛性である．

$$\begin{aligned} L_w^* &= L_w/b, \quad \Lambda = b/L, \quad U_f^* = U_f L \sqrt{\rho_s h/D}, \quad f_f^* = f_f L^2 \sqrt{\rho_s h/D} \\ D &= E_s h^3 / 12(1-\nu_s^2) \end{aligned} \quad (15)$$

次に，ワイヤで柔軟に支持された支持部の剛性の影響を調べるために，ワイヤ支持と等価的な曲げ剛性 k_b とねじり剛性 k_t を導出し，無次元パラメータを定義した．ワイヤの張力，材料特性(ヤング率，ポアソン比)，寸法(ワイヤ長さ，直径)などのワイヤによる柔軟支持のパラメータは，全て等価曲げ剛性と等価ねじり剛性に縮約される．ここでは，これらのパラメータの導出過程について説明する．

まず，図4に示すように，張力を付加された両端固定梁が中央に外力 F を受ける場合を考える．このとき，外力 F と梁の変位 x の関係は式(16)で表される(櫻井, 1940)．ここで，図5に示すワイヤとシートの複合系を考え，シートの幅方向に等分布荷重 f を仮定すると，等分布荷重 f と梁の変位 x の関係は式(17)で表される．ここで，梁の変位 x に比例する項をワイヤ支持と等価的な曲げ剛性 k_b と定義する．よって，等価曲げ剛性 k_b は式(18)で表される．

次に図6に示すように，中央にねじりモーメント M_t を受ける両端固定梁を考える．等価曲げ剛性の場合と同様に，ワイヤとシートの複合系を考え，図7に示すようにシートの幅方向に等分布モーメント $m_t = M_t/b$ を仮定すると，ねじりモーメント m_t と梁のねじり角 ϕ の関係は式(19)で表される．ここで，梁のねじり角 ϕ に比例する項をワイヤ支持と等価的なねじり剛性 k_t と定義する．よって，等価ねじり剛性 k_t は式(20)で表される．式中の I, I_p はそれぞれ断面二次モーメント，断面二次極モーメントである．また，式中の l_w はシート幅を除いたワイヤの長さである．さらに，曲げ剛性 k_b とねじり剛性 k_t をシートの曲げ剛性で基準化することで，無次元曲げ剛性と無次元ねじり剛性が式(21)のように得られる．これらの無次元数を用いて結果を整理する．

$$F = \frac{2T}{\left\{ l_w / 2 - (l_w \sinh \frac{\omega}{2}) / (\omega \cosh \frac{\omega}{2}) \right\}} x, \quad \omega = \frac{l_w}{2} \sqrt{\frac{T}{E_w I}}, \quad I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (16)$$

$$f = \frac{2T}{\left\{ l_w / 2 - (l_w \sinh \frac{\omega}{2}) / (\omega \cosh \frac{\omega}{2}) \right\} b} x \quad (17)$$

$$k_b = \frac{2T}{\left\{ l_w / 2 - (l_w \sinh \frac{\omega}{2}) / (\omega \cosh \frac{\omega}{2}) \right\} b} \quad (18)$$

$$m_t = \frac{4G_w I_p}{bl_w} \phi \quad (19)$$

$$k_t = \frac{4G_w I_p}{bl_w}, \quad I_p = \frac{\pi l^4}{32} \quad (20)$$

$$k_b^* = k_b L^3 / D, \quad k_t^* = k_t L / D \quad (21)$$

計算パラメータは実験に合わせて設定した。ワイヤとシートのパラメータを第3章の表1, 2に示す。構造減衰比 ζ は、真空中の打撃試験より実験的に求めた値であり、流体摩擦係数 C_f は流体抗力をロードセルで測定することによって求めた。また、ワイヤの分割数を $N_w=19$ とし、シートの分割数は x 方向分割数を $n_x=13$, y 方向分割数を $n_y=11$ として計算を行った。ここで、ワイヤおよびシートの分割数は、フラッタ流速がほぼ一定値に収束する値を用いた。

Fig. 4 Schematic illustration of the wire under the concentrated load.

Fig. 5 Schematic illustration of the sheet coupled with wire under the distributed load.

Fig. 6 Schematic illustration of the wire under the torsional moment.

Fig. 7 Schematic illustration of the sheet coupled with wire under the distributed moment.

3. 実験装置および実験方法

図8に実験装置全体の構成図を示す。本研究では縦型風洞を用いて実験を行った。ワイヤで上流側の一边を支持したシートをテストセクション上部に設置する。プーリとおもりを用いた機構によりワイヤに張力を付加し、おもりの質量を変化させることで張力を調節する。また、プーリは左右に可動であり、ワイヤ長さを調節することができる。シートの振動変位は図8(b)に示すように、レーザ変位計（キーエンス社製 LK-G400）を用いて測定した。振動変位の測定は振動の節にならず、振幅が大きい下流端付近で行った。空気の流速を徐々に増加させてシートの振動変位を測定し、振動変位が急激に大きくなった流速をフラッタ流速として求めた。シートおよびワイヤの実験パラメータを表1, 2に示す。

Fig. 8 Schematic illustrations of the experimental apparatus.

Table 1 Parameters of the sheet.

Material	PET
Chord L [mm]	120
Span b [mm]	60
Thickness h [mm]	0.2
Young's modulus of sheet E_s [GPa]	3.2
Poisson's ratio of sheet ν_s	0.4
Density of sheet ρ_s [kg/m ³]	1380
Fluid density ρ_f [kg/m ³]	1.2
Damping ratio ζ	0.002
Gravity acceleration g [m/s ²]	9.81
Coefficient of fluid friction C_f	0.01

Table 2 Parameters of the wires.

Material	SUS304	Copper	Piano wire	Brass
Young's modulus of wire E_w [GPa]	197	130	206	103
Poisson's ratio of wire ν_w	0.3	0.34	0.3	0.35
Density of wire ρ_w [kg/m ³]	8000	8940	7850	8390
Diameter of wire d [mm]	0.2	0.2	0.2	0.2
Length of wire L_w [mm]	360	252	373	211

4. 解析および実験結果

4・1 FEMによる固有振動モードの解析結果

図9に解析で得られた各支持条件における代表的な固有振動モードを示す。図はアスペクト比 $\Lambda=0.5$ ($L=120\text{mm}$, $b=60\text{mm}$) の場合の結果であり、赤色の領域は上向きの変位、青色の領域は下向きの変位を表している。これらの固有振動モードおよび固有振動数は流体の影響を含まない場合の結果である。また、フラッタ解析には低次から9個の固有振動モードを用いた。代表的なモードについて説明すると、ワイヤ支持とピン支持の場合、1次モードはシートが弾性変形せず回転するモードである。一方、固定の場合、1次モードはシートの曲げモードである。また、ワイヤ支持の2次モード、ピン支持および固定の場合3次モードはシートの曲げモードであるが、ワイヤ支持の場合はワイヤの弾性変形を伴うモードである。ここで、ワイヤ支持の場合は Mode No.2 はシートの曲げモードとなっているのに対して、固定とピン支持の場合 Mode No.2 はシートのねじりモードとなっており、支持条件によってモードの順番が入れ替わっている。

Fig. 9 Nine lowest natural modes and corresponding frequencies derived by FEM analysis in the case of $\Lambda=0.5$.

4・2 等価曲げ剛性, ねじり剛性の妥当性の検証

式 (18), (20) において導出した等価曲げ剛性と等価ねじり剛性の妥当性を検討するために, 図 10 に示すように並進ばねとねじりばねを用いてワイヤとシートの複合系の 1 次モード (図 9 (a) の Mode No.1) をモデル化し, 固有振動数を導出した. そして, 得られた結果と FEM による解析結果および実験結果を比較した. ここで, 並進ばねのばね定数は式 (18) で得られた等価曲げ剛性 k_b , ねじりばねのばね定数は式 (20) で得られた等価ねじり剛性 k_t を用いた. このとき, モデル化した系の固有振動数 f_1 は式 (22) で表される. 式中の m はシートの質量, I は慣性モーメントである.

$$f_1 = \sqrt{\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\nu}}{2\alpha}} \quad (22)$$

$$\alpha = m \left(m \frac{L^2}{4} + I \right) - m^2 \frac{L^2}{4}, \quad \beta = k_b \left(m \frac{L^2}{4} + I \right) + m \left(k_t + mg \frac{L}{2} \right), \quad \nu = k_b \left(k_t + mg \frac{L}{2} \right) \quad (23)$$

図 11 にワイヤに付加する張力と式 (22) を用いて求めた固有振動数の関係 (図中の青線) を示す. 図中には FEM による解析結果 (図中の赤線) と実験結果 (図中のプロット) をあわせて示す. 図より, 式 (22) より求めた固有振動数は FEM による解析結果および実験結果とよく一致している. このことから, 式 (18), (20) において導出した等価曲げ剛性と等価ねじり剛性によって, ワイヤの剛性が適切に評価できていると考えられる.

Fig. 10 Analytical model of the sheet supported by translational and torsional spring.

Fig. 11 Natural frequencies with changing tension of wire.

4・3 等価曲げ剛性のフラッタ特性および発生条件への影響

図 12(a), (b), (c)に無次元曲げ剛性 k_b^* に対する無次元フラッタ流速と振動数の変化を示す。ここで、図 12(a), (b) はワイヤの直径を $d=0.2\text{mm}$ 、材質を SUS304 とした場合の結果である。本研究で実験と解析を行った全てのパラメータにおいて、フラッタ発生後さらに流速を増加させても高次モードは発生しなかった。図 12(a)は、シート幅を除いたワイヤ長さを $l_w=300, 420, 540\text{mm}$ とした場合の、等価曲げ剛性に対するフラッタ流速の変化を表している。ここでは、ワイヤの張力を変化させることで、等価曲げ剛性を変化させた。図より、無次元曲げ剛性を用いて結果を整理すると、フラッタ流速と振動数はワイヤの張力と長さによらず一本の曲線となる。ここで、2・5 節の式(20)より、ワイヤ長さが変化することで等価ねじり剛性も同時に変化したが、図 12(a)で示したワイヤ長さの範囲では、フラッタ特性に顕著な影響は現れなかった。

図 12(b)はワイヤの張力を $T=0.20, 0.98, 3.4\text{N}$ とした場合の、等価曲げ剛性に対するフラッタ流速と振動数の変化を表している。ここでは、ワイヤ長さを変化させることで、等価曲げ剛性を変化させた。図より、張力が小さい場合($T=0.20\text{N}$)は、張力が大きい場合($T=0.98, 3.4\text{N}$)と比べフラッタ流速が少し低下する。これはワイヤ長さの変化により等価ねじり剛性が低下したためであると考えられる。

図 12(c)は、ワイヤの材料として SUS304、銅、ピアノ線、真鍮を用いて等価ねじり剛性を一定 ($k_t^*=0.125$) とした場合における、無次元等価曲げ剛性に対するフラッタ流速と振動数の変化を表している。それぞれのパラメータを表 2 に示す。図より、フラッタ流速はワイヤの張力、長さ、直径、ヤング率によらず一本の曲線になる。このことから、無次元曲げ剛性と無次元ねじり剛性を用いることでフラッタ流速はワイヤの張力、材料特性(ヤング率、ポアソン比)、寸法(ワイヤ長さ、直径)に依存せず、一般的に整理できることがわかる。また、いずれの場合も等価曲げ剛性が大きくなると、フラッタ流速と振動数は増加する。そして、ワイヤによる支持部の曲げ剛性が小さく、前縁が大きく変形する場合に比べて、等価曲げ剛性が十分に大きくなると、フラッタ流速は一定となる。

Fig. 12 Dimensionless flutter velocity(left figures) and corresponding frequency(right figures) with changing dimensionless bending stiffness.

4・4 シート支持条件のフラッタ特性および発生条件への影響

シート支持条件のフラッタ流速への影響を調べるために、図 13 にシートの前縁をワイヤで支持した場合、ピン支持した場合、固定とした場合の無次元フラッタ流速と振動数への影響を示す。図は等価ねじり剛性 $k_b^*=0.125$ (ワイヤ長さ $L_w=360\text{mm}$, 直径 $d=0.2\text{mm}$), ワイヤの材質を SUS304 とした場合の結果である。図より、シートの前縁を固定した場合にフラッタ流速と振動数 (図の青線) が最も大きくなる。また、シートの前縁をピン支持した場合 (ねじり剛性 0) は、固定とした場合 (ねじり剛性 ∞) と比べてフラッタ流速はあまり変化しない (約 5% 低下) がフラッタ振動数は大きく (約 40%) 低下する。このことから、ねじり剛性のフラッタ流速への影響が小さいがフラッタ振動数に及ぼす影響は大きく、ねじり剛性が大きくなるとフラッタ振動数は高くなる。シートの前縁をワイヤで支持した場合、ワイヤによる支持部の曲げ剛性が小さく、前縁が大きく変形する場合に比べて十分に等価曲げ剛性が大きくなると、前縁をピン支持した場合のフラッタ流速 (図の赤線) に一致する。また、等価曲げ剛性が小さい場合は、十分に等価曲げ剛性が大きい場合と比べフラッタ流速は大きく (半分以上に) 低下する。

シート支持条件による励振エネルギーの流入領域の変化を調べるために、図 14 に各支持条件 (ワイヤ支持、ピン支持、固定) におけるフラッタモード、シート表面上の局所的な流体力による仕事の分布 $\tilde{E}_{local}^{(k)}$ (エネルギー収支)、各固有モードの寄与率 E_i^* および対応する固有振動モードを示す。フラッタモードはエネルギーがシート上のどの領域で流入または散逸しているか示すために、三次元で導出したモードの幅方向中央の位置におけるモードを二次元的に表示している。このとき、シートの前縁をワイヤで支持した場合の結果は等価曲げ剛性が小さいとき ($k_b^*=33.6$) と、等価曲げ剛性が十分に大きいとき ($k_b^*=910$) の結果を示す。図 14 の上から二段目に示したシート表面上の流体力による仕事より、いずれの支持条件においてもシートの中流域においてエネルギーが流入しており (図の赤色の領域)、下流端付近でエネルギーが散逸している (図の青色の領域)。また、等価曲げ剛性が小さくシート支持部が大きく振動する場合、変位が進行波的になる領域が上流側に移動し、エネルギー流入領域が上流端側に拡大する。このとき、シートの下流端付近に加え、上流端付近にもエネルギーの散逸領域が存在する。

ここで、フラッタモードにおける各固有振動モードの寄与率に着目すると、いずれの支持条件においても 2 つのモードの寄与が支配的である。前縁を固定した場合は、シートの曲げ 1 次モードと、曲げ 2 次モードの寄与が支配的となっている。また、シートの前縁をワイヤで支持した場合とピン支持した場合はシートが弾性変形せずに回転する 1 次モードと、シートの曲げが卓越したモードの寄与が支配的である。このことから、シート支持条件によってフラッタモードに寄与する固有振動モードは異なるにも関わらず、いずれの支持条件においてもシートの中流域においてエネルギーが流入しており、下流端付近ではエネルギーが散逸している。つまり、シートの支持条件によらずシートの中流領域におけるエネルギーの流入がフラッタ発生の原因である。また、ワイヤによる支持部の曲げ剛性が小さく、前縁が大きく変形する場合、励振エネルギーの流入領域が上流端側に拡大するが、上流端付近ではエネルギーが散逸するようになる。これにより、曲げ剛性が小さい場合はシート全体での仕事の総和が正になる流速が低くなるため、フラッタ流速が低下する。

Fig. 13 Dimensionless flutter velocity(left figure) and corresponding frequency(right figure) with changing dimensionless bending stiffness.

Fig. 14 Flutter modes, normalized local work done by fluid force, modal contribution ratio and corresponding modes.

5. まとめ

本研究ではシート支持部（前縁）の曲げ剛性とねじり剛性に関する無次元数である，無次元曲げ剛性と無次元ねじり剛性を定義した．そして，これらの無次元数を用いて解析結果と実験結果を整理し，シート支持部の柔軟性がフラッタ特性と発生条件に及ぼす影響を調べた．また，シート前縁をワイヤで支持した場合，ピン支持した場合，固定とした場合について，シート表面における流体力の仕事为正の領域（励振エネルギーの流入領域）がどのように変化するのかを調べ，シート支持条件のフラッタ特性への影響を調べた．得られた主な結果を以下に示す．

- (1) シート前縁部の等価的な無次元曲げ剛性と無次元ねじり剛性を用いることで、フラッタ流速と振動数はワイヤの張力、長さ、直径、ヤング率などのパラメータによらず一般的に整理することができる。
- (2) 等価曲げ剛性が大きくなるとフラッタ流速は増加する。そして、ワイヤによる支持部の曲げ剛性が小さく、前縁が大きく変形する場合に比べて、等価曲げ剛性が十分に大きくなると、フラッタ流速は一定となる。また、等価ねじり剛性が小さい場合は、等価曲げ剛性が大きくなると前縁をピン支持されたシートのフラッタの体系に近づく。
- (3) シートの前縁を固定した場合にフラッタ流速が最も大きくなる。また、シートの前縁をピン支持した場合は、固定とした場合と比べて約 5% 程度フラッタ流速が低下する。シートの前縁をワイヤで支持した場合、ワイヤによる支持部の曲げ剛性が小さく、前縁が大きく変形する場合に比べて、十分に等価曲げ剛性が大きくなると前縁をピン支持した場合のフラッタ流速に一致する。また、等価曲げ剛性が小さい場合は、十分に等価曲げ剛性が大きい場合と比べてフラッタ流速は半分以下になる。
- (4) シート前縁の支持条件によらず、シートの中流領域では流体力による仕事が正であり、この領域におけるエネルギーの流入がフラッタ発生の原因である。また、シート上流端の曲げ剛性が小さい場合、励振エネルギーの流入領域が上流端側に拡大するが、上流端付近ではエネルギーが散逸するようになる。これにより、曲げ剛性が小さい場合はシート全体での仕事の総和が正になる流速が低くなるため、フラッタ流速が低下する。

主な記号

A_e	: 流力弾性行列	l_w	: シート幅を除いたワイヤ長さ
b	: シートのスパン (幅)	L_w	: ワイヤ長さ
C	: 全体座標系での減衰行列	M	: 全体座標系での質量行列
C_f	: 流体摩擦係数	N_s, N_w	: シート, ワイヤの要素分割数
d	: ワイヤの直径	N_k	: 全節点数
D	: シートの曲げ剛性	N_m	: モード打ち切り次数
E_s, E_w	: シート, ワイヤのヤング率	n_x, n_y	: シートの x, y 軸方向分割数
E_f	: 流体力による仕事	s	: ラプラス変数
E_{local}	: 局所的な流体力による仕事	$\bar{s}$	: 無次元ラプラス変数
f_f	: フラッタ振動数	Q	: 流体力行列
f_f^*	: 無次元フラッタ振動数	U_f	: フラッタ流速
g	: 重力加速度	U_f^*	: 無次元フラッタ流速
h	: シートの厚さ	X	: 全体座標系での変位ベクトル
I	: ワイヤの断面二次モーメント	ν_s, ν_w	: シート, ワイヤのポアソン比
I_p	: ワイヤの断面二次極モーメント	ρ_f	: 流体の密度
K	: 全体座標系での剛性行列	ρ_s, ρ_w	: シート, ワイヤの密度
k	: 節点番号	τ	: 無次元時間
k_b, k_b^*	: 等価曲げ剛性, 無次元曲げ剛性	ζ	: 減衰比
k_t, k_t^*	: 等価ねじり剛性, 無次元ねじり剛性	Φ	: モード行列
K_c	: ワイヤの張力に起因する幾何剛性行列		
K_f	: 流体摩擦に起因する幾何剛性行列		
K_g	: 重力に起因する幾何剛性行列		
K_s	: 構造系の剛性行列		
L	: シートのコード (長さ)		

添え字

i	: i 番目
j	: j 番目

文 献

- Eloy, C., Souilliez, C. and Schouveiler, L., Flutter of a rectangular plate, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.23 (2007), pp.904-919.
- 藤田勝久, 今井俊彰, 平行流中を移動する柔軟平板の動的安定性解析, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.79, No.801 (2013), pp.1336-1347.
- Gibbs, C. S., Wang, I. and Dowell, E. H., Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.34 (2012), pp.68-83.
- Guo, C. Q. and Paidoussis, M. P., Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.67 (2000), pp.171-176.
- 長谷川亜紀, 渡辺昌宏, 原謙介, 非定常揚力面理論に基づく矩形シートのフラッタ解析と風洞実験, *Dynamic and Design Conference*, No.13-18 (2013), 621.
- 廣明慶一, 渡辺昌宏, 森田亮介, ワイヤで支持された矩形シートのフラッタ解析と風洞実験, *Dynamic and Design Conference 2014 講演論文集(USB)*, No.14-17 (2014), 217.
- Hiroaki, K., Watanabe, M. and Morita, R., Flutter analysis and experiments of a rectangular sheet supported by a wire, *Proceedings of ASME PVP2015*, No.PVP2015-45061(2015).
- Howell, R. M., Lucey, A. D., Carpenter, P. W. and Pitman M. W., Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.25 (2009), pp.544-566.
- Howell, R. M. and Lucey, A. D., Flutter of spring-mounted flexible plates in uniform flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.59 (2015), pp.370-393.
- Huang, L., Flutter of cantilevered plates in axial flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.9 (1995), pp.127-147.
- 金子成彦, 呉小山, 離散はり要素を用いたすきま流れによって発生するシートフラッタ解析, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.68, No.675 (2002), pp.3314-3321.
- Kornecki, A., Dowell, E. H. and O'Brien, J., On the aeroelastic instability of two dimensional panels in uniform incompressible flow, *Journal of Sound and vibration*, Vol.47 (1976), pp.163-178.
- Küssner, H. G., General airfoil theory, *NACA TM 979* (1941).
- 長倉博, 金子成彦, 一次元平行すきま流路内に置かれた片持弾性はりの安定性, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.58, No.546 (1992), pp.352-359.
- 櫻井豊三, 固定梁の軸張力實用計算法, *土木学会誌*, Vol.26, No.5(1940), pp573-595.
- Shayo, L. K., Stability of cantilevered panels in uniform incompressible flow, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.68 (1980), pp.341-350.
- Tang, D. M., Yamamoto, H. and Dowell, E.H., Flutter and limit cycle oscillation of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.17(2003), pp.225-242.
- Ueda, T. and Dowell, E. H., A new solution method for lifting surface in subsonic flow, *AIAA Journal*, Vol.20, No.3 (1982), pp.348-355.
- Ueda, T., Lifting surface calculations in the Laplace domain with application to root loci, *AIAA Journal*, Vol.25, No.5 (1987), pp.698-704.
- 渡辺昌宏, 原謙介, Gonzalez, M. and Cuadrado, J., 非定常揚力面理論に基づく矩形シートのフラッタ解析, *日本機械学会年次大会 CD-ROM 講演論文集*, No.12-1, No.J101021 (2012).
- Watanabe, Y., Suzuki, S., Sugihara, M. and Sueoka, Y., An experimental study of paper flutter, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.16 (2002a), pp.529-542.
- Watanabe, Y., Isogai, K., Suzuki, S. and Sugihara, M., A theoretical study of paper flutter, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.16 (2002b), pp.543-560.
- 呉小山, 金子成彦, 離散はり要素を用いたすきま内で発生するシートフラッタの非線形解析, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.69, No.687 (2003), pp.2991-2998.

山口信行, 横田和彦, 辻本良信, 柔軟で薄いシートの高速気流中における挙動に関する研究(第1報, 微小擾乱的挙動の理論的評価法), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.65, No.632 (1999), pp1224-1231.

References

- Eloy, C., Souilliez, C. and Schouveiler, L., Flutter of a rectangular plate, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.23 (2007), pp.904-919.
- Fujita, K. and Imai, T., Dynamic stability analysis of a flexible plate moving in a parallel flow, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.79, No.801 (2013), pp.1336-1347 (in Japanese).
- Gibbs, C. S., Wang, I. and Dowell, E. H., Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.34 (2012), pp.68-83.
- Guo, C. Q. and Paidoussis, M. P., Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.67 (2000), pp.171-176.
- Hasegawa, A., Watanebe, M. and Hara, K., Flutter analysis of a rectangular sheet based on the unsteady lifting surface theory and wind-tunnel experiments, *Dynamic and Design Conference*, No.13-18 (2013), 621 (in Japanese).
- Hiroaki, K., Watanabe, M. and Morita, R., Flutter analysis and wind-tunnel experiments of a rectangular sheet supported by wire, *Proceedings of Dynamic and Design Conference 2014*, No.14-17 (2014), 217 (in Japanese).
- Hiroaki, K., Watanabe, M. and Morita, R., Flutter analysis and experiments of a rectangular sheet supported by a wire, *Proceedings of ASME PVP2015*, No.PVP2015-45061(2015).
- Howell, R. M., Lucey, A. D., Carpenter, P. W. and Pitman M. W., Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.25 (2009), pp.544-566.
- Howell, R. M. and Lucey, A. D., Flutter of spring-mounted flexible plates in uniform flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.59 (2015), pp.370-393.
- Huang, L., Flutter of cantilevered plates in axial flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.9 (1995), pp.127-147.
- Kaneko, S. and Wu, X., Leakage flow induced sheet flutter analysis using discretized beam elements, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.68, No.675 (2002), pp.3314-3321 (in Japanese).
- Kornecki, A., Dowell, E. H. and O'Brien, J., On the aeroelastic instability of two dimensional panels in uniform incompressible flow, *Journal of Sound and vibration*, Vol.47 (1976), pp.163-178.
- Küssner, H. G., General airfoil theory, NACA TM 979 (1941).
- Nagakura, H. and Kaneko, S., The Stability of a Cantilever beam subjected to one-dimensional leakage flow, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.58, No.546 (1992), pp.352-259 (in Japanese).
- Sakurai, T., Koteihari no jikutyouryokujitsuyoukeisanhou, *Journal of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol.26, No.5(1940), pp573-595 (in Japanese) .
- Shayo, L. K., Stability of cantilevered panels in uniform incompressible flow, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.68 (1980), pp.341-350.
- Tang, D. M., Yamamoto, H. and Dowell, E.H., Flutter and limit cycle oscillation of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.17(2003), pp.225-242.
- Ueda, T. and Dowell, E. H., A new solution method for lifting surface in subsonic flow, *AIAA Journal*, Vol.20, No.3 (1982), pp.348-355.
- Ueda, T., Lifting surface calculations in the Laplace domain with application to root loci, *AIAA Journal*, Vol.25, No.5 (1987), pp.698-704.
- Watanebe, M., Hara, K., Gonzalez, M. and Cuadrado, J., Flutter analysis of a rectangular sheet based on the unsteady lifting surface theory, *Proceedings of JSME annual meeting*, No.12-1, No.J101021 (2012) (in Japanese).
- Watanabe, Y., Suzuki, S., Sugihara, M. and Sueoka Y., An experimental study of paper flutter, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.16 (2002a), pp.529-542.

- Watanabe, Y., Isogai, K., Suzuki, S. and Sugihara, M., A theoretical study of paper flutter, Journal of Fluids and Structures, Vol.16 (2002b), pp.543-560.
- Wu, X. and Kaneko, S., Nonlinear analysis of leakage flow induced sheet flutter using discretized beam elements, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.69, No.687 (2002), pp.2991-2998 (in Japanese).
- Yamaguchi, N., Yokota, K. and Tsujimoto, Y., Fluttering behavior of a flexible thin sheet in high-speed flow(1st report, theoretical method for prediction of the sheet behavior for small perturbed motion), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.65, No.632 (1999), pp1224-1231 (in Japanese).