ボンドグラフに基づく遊星歯車機構のねじり連成振動解析と考察

中川 正夫^{*1}, 西田 大^{*2}, 廣垣 俊樹^{*3}, 青山 栄一^{*3}

Investigation of torsional analysis of planetary gear train for mesh coupled vibration based on a bond graph model

Masao NAKAGAWA^{*1}, Dai NISHIDA^{*2}, Toshiki HIROGAKI^{*3} and Eiichi AOYAMA^{*3}^{*1, *2} Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University

1-3 Tataramiyakodani, Kyotanabe-shi, Kyoto 610-0394, Japan

^{*3} Faculty of Mechanical Engineering, Doshisha University

1-3 Tataramiyakodani, Kyotanabe-shi, Kyoto 610-0394, Japan

Received: 10 August 2016; Revised: 17 February 2017; Accepted: 16 April 2017

Abstract

The planetary gear train (PGT) is one of the most important components of the new hybrid and electric vehicles due to its high torque-to-weight ratio and to its compact geometry. However, this system generates a lot of vibrations which increase the noise into the vehicles due to its complex geometry and to its various mesh coupled motion. The aim of this study is to construct a novel torsional coupled vibration model based on bond graph method and to understand the planetary gear train motional and modal behavior with a focus on the damping effect of the meshing while taking into account the damping effect of the bearings that connects the system to the shaft. The result from bond graph is in good agreement with observed result, and it can be seen that bond graph is proper enough to simulate dynamic behavior of PGT compared with the results by a traditional equation of motion.

Key words : Planetary gear train, Bond graph, Mechanism, Modeling, Vibration mode, Design

1. 緒 言

遊星歯車機構はこれまで多くの機械に用いられ、最新のハイブリッド自動車や電気自動車においても最も重要な機構である。小型軽量でトルク-重量比が大きいことなどの利点を擁する一方で、かみあい複雑で振動騒音が大きいことなどが問題となっている。これまで、遊星歯車機構の動特性を解明し、振動騒音を低減させるために多くの研究がなされてきた (Cooley and Parker, 2014)。例えば Parker らが多自由度の複雑な連成の運動方程式 (Lin and Parker, 1999b) を基礎式としてこれまで多くの研究を行ってきた。プラネットギアが高速で回転しながら公転を行うことで生じるジャイロ効果に着目し、ジャイロ効果が固有振動数や振動モードに与える影響を報告したもの (Cooley and Parker, 2012) や設計パラメータが遊星歯車機構の固有振動数に与える影響を考察したもの (Lin and Parker, 1999a)、FEM を用いてシミュレーションを行い動特性への影響を考察したもの (Parker et al., 2000) などが存在する。しかしそれらのシミュレーションは FEM や多自由度で複雑なマルチボディーダイナミクスを用いたものが主流であり、設計者が容易に利用できる見通しの良い効率的な手法ではなかった。

一方で、非線形や各種の減衰項を含む振動現象はそのエネルギーの流れに着目すると見通し良く解析できることが知られており、エネルギーの流れに着目して動的問題をモデル化して解析する手法として Bond graph がある。そのモデル化の手法を用いることで、連成の運動方程式では考慮することが難しかった非線形要素となる時間変化するかみあい剛性やかみあい減衰をシミュレーションに容易に組み込むことが可能となる。Bond graph を

No.16-00360 [DOI: 10.1299/transjsme.16-00360], J-STAGE Advance Publication date : 28 April, 2017

^{*1} 正員, 同志社大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士後期課程 (〒610-0394 京都府京田辺市多田羅都谷 1-3)^{*2} 正員, 同志社大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士前期課程^{*3} 正員, 同志社大学理工学部

E-mail of corresponding author: masa74n@gmail.com

用いて遊星歯車機構の連成振動を解いた研究報告 (Yutao and Di, 2011) があるが、その報告はモデル化から固有振動数の計算過程を示したに過ぎず、実際の系との比較を行っていないためその有用性は不明である。そこで本報では、現場の設計者でも容易に遊星歯車機構の多自由度で連成する複雑なねじり振動を解析可能とする Bond graph を用いたモデル化の手法を検討することを目的とする。Yutao らによるモデル化手法および計算過程を参考に、時間変動のあるかみあい剛性や減衰比を考慮に入れたより複雑なモデルを解き、実際の系との比較を行うことで提案手法の有効性を検討する。また、より複雑なモデルでの結果が実際の系と合うことが証明されれば、より複雑なモデルでも容易にモデル化できることがわかり、容易に利用できる見通しの良い効率的な手法として Bond graph の真の有用性が示されるものと考ええる。

2. 遊星歯車機構のモデリング

2・1 従来のモデルと運動方程式

2K-H の遊星歯車機構の振動特性に関する解析は図 1 に示すような剛体・バネ・ダンパ系モデルを用いて行われている (Lin and Parker, 1999b)。この遊星歯車機構はリングギア、サンギア、 N 個のプラネットギア (本報では $N=3$)、そしてキャリア (プラネットギアどうしを円周方向に拘束) の基本 4 要素から成る。各要素は 2 並進、1 回転の 3 自由度を要し、機構全体では $9+3N$ 自由度を要するため、多自由度の連成の運動方程式とされている。ここで、水平方向を X 軸、鉛直方向を Y 軸、半径方向を ζ 軸、円周方向を η 軸とし、剛性係数を k 、減衰係数を c としている。各要素における各軸方向の剛性および減衰の左の添え字が要素を、右の添え字が軸方向を示している。また、各かみあいにおいてかみあい剛性およびかみあい減衰係数の一番左の添え字がプラネットギアとかみあい歯車 (リングギア r およびサンギア s) を、最後の添え字が i 番目 (本論文では $i=1\sim3$) のプラネットギアであることを示している。1 番目のプラネットギアと i 番目のプラネットギアとの間の角を ψ_i とする。

Fig. 1 Torsional rotational model of planetary gear train with lumped parameter and system coordinate. Planetary gear train (PGT) has ring gear, sun gear, N planet gears ($N=3$ in this paper), and carrier which connects planet gears. Although ordinary spur gear train has single meshing point, PGT has $2N$ meshing points, or the double number of planet gears. In the torsional rotation model, each component has three degree of freedom, or X and Y for translation (two degree of freedom for translation) and U for rotation (one degree of freedom for rotation), thus PGT has $9+3N$ degree of freedom totally (three degree of freedom for ring gear, carrier, and sun gear and more three degree of freedom for N planet gears). In that model, there are stiffness k and damping coefficient c for each direction and along with the meshing line (common line of base circle of the gears). Torsional model of PGT is complex model as shown in the figure.

サンギアに関してラグランジアン L より運動方程式を立てると、以下ようになる。

<X 軸方向>

$$m_s(\ddot{x}_s - 2\Omega_c \dot{y}_s - \Omega_c^2 x_s) + \sum_{i=1}^N k_{si} \delta_{si} \sin \psi_{si} + k_{sx} x_s = 0 \quad (1)$$

<Y 軸方向>

$$m_s(\ddot{y}_s + 2\Omega_c \dot{x}_s - \Omega_c^2 y_s) + \sum_{i=1}^N k_{si} \delta_{si} \cos \psi_{si} + k_{sy} y_s = 0 \quad (2)$$

<回転方向>

$$(I_s / r_s^2) \ddot{\alpha}_s + \sum_{i=1}^N k_{si} \delta_{si} + k_{su} u_s = T_s / r_s \quad (3)$$

δ_{si} および ψ_{si} は以下に定義するとおりである。

$$\delta_{si} = -x_s \sin \psi_{si} + y_s \cos \psi_{si} - \zeta_i \sin \alpha_s - \eta_i \cos \alpha_s + u_s + u_i + e_{si}(t) \quad (4)$$

$$\psi_{si} = \psi_i - \alpha_s \quad (5)$$

ここで、 m_s はサンギアの質量、 I_s はサンギアの慣性モーメント、 r_s はサンギアのピッチ円半径、 α_s はサンギアの圧力角、 Ω_c はキャリアの回転角速度、 δ_{si} はサンギアと i 番目のプラネットギア間のかみあい変位、 T_s はサンギアに負荷されるトルク、 e_{si} はサンギアと i 番目のプラネットギア間の誤差変位である。他の要素についても同様に運動方程式を立式し、行列表記すると以下の式となる。

$$M\ddot{q} + \Omega_c G\dot{q} + [K_b + K_m(t) - \Omega_c^2 K_\Omega]q = c + T(t) + F(t) \quad (6)$$

$$q = [x_c, y_c, u_c, x_r, y_r, u_r, x_s, y_s, u_s, \zeta_1, \eta_1, u_1, \dots, \zeta_N, \eta_N, u_N] \quad (7)$$

ここで、 M , G , K , Ω はそれぞれ質量行列、ジャイロ行列、剛性行列、求心剛性行列である。 K_b は支持剛性行列、 $K_m(t)$ はかみあい剛性行列である。 c はプラネットギアに働く遠心力であり、 T はトルク、 F は伝達誤差や歯型誤差によって生じる力である。本研究で扱っている 3 プラネットの遊星歯車機構の場合、 18×18 の行列から 36 個の固有振動数が求まるが、それらは主に 3 種類の固有振動モードシェイプより回転モード、並進モード、プラネットモードに大別される。

2・2 Bond graph によるモデル化

Bond graph は 1959 年、MIT の Paynter 教授によって考案されたものであり、物理の相似性から技術分野に関わらず動的システムのグラフ表示ができ、エネルギーフローの観点ですべての物理システムを統一して扱うことができる。グラフ表示によりシステム全体が視覚化され、各種の現場の技術者でも容易に見通しの良いモデル化が可能となるため、既に多く分野の動的システムの解析でその有効性が示されている。Tanguy らが動的システムの設計における Bond graph の有用性を示し (Tanguy et al., 1999)、Hrovat らが自動車用トルクコンバーターの設計 (Hrovat and Tobler, 1985) に、Sueur らが MIMO 線形システムの解析 (Sueur and Tanguy, 1991) に Bond graph を用いている。Bond graph では図 2 のように要素どうし (慣性、インダクタンス etc.) がボンドを介してつながっており、要素とボンドの接点であるポートに特性を持つ。

ボンドはエネルギーを伝搬しており、そのエネルギーの流れ (パワー、仕事率) はエフォート e とフロー f の積となっている (各分野におけるエフォート e およびフロー f の対応関係は表 1 参照のこと)。単ポート素子には R 素子、 C 素子、 I 素子の 3 種類があり、力学系ではそれぞれ減衰項、剛性項、慣性項に対応している。各素子の特性式は下記に示すとおりである。 R 素子は不可逆的でエネルギー保存しない一方、 C 素子と I 素子は可逆的でエネルギー保存を行う。

<R 素子：減衰項>

$$e = Rf \quad (8)$$

<C 素子：剛性項>

$$c \int f dt = e \quad (9)$$

<I 素子：慣性項>

$$f = \frac{1}{I} \int e dt \quad (10)$$

さらに 2 ポート素子には **TF** 素子があり、これは歯車に相当する。流れてきたエネルギーのエフォート e とフロー f の比率を変換して伝えるものであり、その変換比を n とすると特性式は以下となる。

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2/n \\ e_2 &= e_1/n \end{aligned} \quad (11)$$

また、並列接点 (0 接点) と直列接点 (1 接点) があり、図 3 のようなつながりを示している。電気回路との物理的相似性 (表 1) を用いているため、力学系では直列と並列の名称が逆になっている。図 3 中の **SE** および **SF** はそれぞれエフォート源、フロー源であり、系にエフォート e およびフロー f を供給している。要素間をつないでいる矢印の方向がエネルギーの流れの伝達方向であり、要素間の因果関係からストローク (エフォート e の流れる向き) が決定される。エフォート e とフロー f の流れる向きは逆であり、通常サブモデルではストロークを付与しない。また、ストロークを付与する際、シミュレーションソフトの演算の性質上、上記特性式 (式 8～10) を考慮して積分型でモデリングすることが推奨されている (トーマ, 須田, 1996)。

Table 1 Similarity of physics

	Electric engineering		Mechanical engineering	
	Electric	Magnetic	Rectilinear motion	Rotary motion
Effort e	Voltage	Field	Force	Torque
	u [V]	V [AT]	F [N]	M [Nm]
Flow f	Current	Flux density	Velocity	Angular velocity
	i [A]	Φ' [Wb/s]	x' [m/s]	ω [rad/s]
Momentamp	Momentam		Momentam	Angular momentam
	P_{el} [Vs]		p [Ns]	L [Nms]
Displacement q	Charge	Flux	Displacement	Angle
	q [C]	Φ [Wb]	x [m]	θ [rad]

歯車とかみあいのサブモデルを図 4(a)に、リングギアプラネットギアのかみあい (サンギアプラネットギアかみあいも同じ) のサブモデルおよびキャリア-プラネットギアのサブモデルを図 4(b)に示す。詳細なモデリングの過程は参考文献 (トーマ, 須田, 1996) に譲るが、図 1 に示す遊星歯車機構全体の **Bond graph** によるモデルは図 5 となる。**Bond graph** における遊星歯車機構の各要素の配置は図 5 に示すとおりである。図 5 ではキャリア固定でリングギアに対して **Motor** から回転入力を行い、プラネットギアおよびキャリアを通してサンギアに出力される流れとなっている。各かみあい点では **TF** 素子によって歯車による速度変換がなされ、キャリアにはリン

グギアからプラネットギアへ伝達されるエネルギーとプラネットギアからサンギアへ伝達されるエネルギーが作用している。 $K_{sp,i}$, K_{pi} はそれぞれ i 番目のプラネットギアの歯とサンギアの歯およびリングギアの歯の間のかみあい剛性であり, wave generator W_{sp} および W_p によって時間変化している (詳細は 2.3 節にて後述)。Yutao らの Bond graph モデルではかみあい剛性の平均値を用いて平均化したうえで定常回転を取り扱っているため Se 素子 (フロー一定) で入力している。しかし, 本研究ではかみあい周期の中でかみあい剛性が変化するモデルを扱い, より一般的な遊星歯車機構の状態をモデル化しているため, Motor として Sf 素子 (エフォート一定) 入力としている。本論文では同じ慣性項を用いているため, 剛性項の取り扱いが固有振動数の周波数成分に影響すると考えられ, このかみあい剛性の非線形性を Bond graph を用いてモデル化し, 解析精度が向上すれば Bond graph の有用性につながると考えられる。

Fig. 2 Basic component of Bond graph Fig. 3-(a) Triple port; 0junction

Fig. 3-(b) Triple port; 1junction

Fig. 4 Component sub models of PGT. This figure shows sub models, or a part of component of whole PGT bond graph model. (a) shows smallest sub model, and (b) shows component sub model. (a)-1 shows sub model of gear itself, energy flow is distributed to mass, stiffness, and damping from 1 junction (parallel junction), because it has same speed as a solid lump. (a)-2 shows sub model of meshing, energy flow came from 0 junction and goes to 1 junction, then distributed to stiffness and damping, because there is no mass component in meshing. (b)-1 shows sub model of carrier – planet gear connection. Energy flow came from left side to left 1 junction and it goes to mass, stiffness, and damping of carrier and rest of them goes to right 1 junction and equally distributed to planet gears, or three mass components. (b)-2 shows sub model of ring gear – planet gear (or sun gear – planet gear) connection. Although meshing conditions are different in the real system (internal meshing and external meshing), it is the same in the bond graph sub model. There is meshing sub model at the center of (b)-2 and ring gear (or sun gear) exists left side and energy flow goes through the meshing and distributed to several planet gears. Whole bond graph model of PGT is composed based on these small sub models.

図 1 に示した従来の力学モデルではエネルギーの流れがわからないばかりか, $9+3N$ もの自由度を有しており動特性を求めるためには非常に複雑な連成の運動方程式を解く必要がある。一方で, 図 5 に示す Bond graph のモデルでは機構中の動力伝達に着目してエネルギーの流れに従って要素間をつなぐだけであり, 非常に容易にモデル化することが可能である。Bond graph モデルでは従来のモデルのように自由度を意識する必要がないため, モデルにおける連成を考慮する必要もなく, 高度な解析者でなく現場の設計者にとっても非常に分かりやすいモデルとなっている。例えば, 各要素の剛性は従来のモデルでは k_x, k_y, k_u の 3 自由度を有しているが, Bond graph

では C 素子の k のみで表現されている。これは従来のモデルでは 2 並進, 1 回転の自由度を有する方向へ分解する必要があるのに対し, Bond graph ではエネルギーの流れそのものを扱っているために自由度を意識して分解する必要がないためである。

Bond graph は, 時間変化するかみあい剛性のような非線形項や複雑な減衰のパラメータを有する系をモデル化し, その動特性を見るのに適している。要素間のエネルギーの流れに着目することで, どんなシステムも Bond graph でグラフ化することができ, 20-Sim (Controllab 製) といったソフトで現場の設計者が簡単にシミュレーションすることができる。ただし Bond graph では要素間のエネルギーの流れに着目していることから, 歯車のトルクと回転の方向の関係性を定義する必要がある。遊星歯車機構の各要素の回転数の関係性は, 2 条件 (キャリア固定および剛体回転モード) の重ね合わせによって求められ, 未定係数法によって重ね合わせると以下となる。ここで, N は回転数 [min^{-1}], Z は歯数であり, サンギア, プラネットギア, キャリア, リングギアの添え字をそれぞれ s, p, c, r とする。プラネットギアの回転に関して, プラネットギア軸周りの回転を自転 (N_p), キャリア軸周りの回転を公転 (N_c) と定義する。キャリア固定の条件の時, プラネットギアの公転成分がなく, その回転数の比は平行歯車対と同様に単純なギア比となる。ここで, サンギアだけが逆回転となるのが遊星歯車機構の特徴である。また, 剛体回転モードの時, 遊星歯車機構が 1 剛体として回転し, プラネットギアは差動することがないため自転成分を持たない。

<キャリア固定>

$$N_s : N_p : N_c : N_r = -\frac{Z_r}{Z_s} : \frac{Z_r}{Z_p} : 0 : 1 \quad (12)$$

<剛体回転モード>

$$N_s : N_p : N_c : N_r = 1 : 0 : 1 : 1 \quad (13)$$

<遊星歯車機構の回転数の関係性>

$$\left\{ \begin{array}{l} N_r = N_r \\ N_c = N_c \\ N_s = -\frac{Z_r}{Z_s} N_r + \frac{Z_r + Z_s}{Z_s} N_c \\ N_p = \frac{Z_r}{Z_p} (N_r - N_c) \end{array} \right. \quad (14)$$

遊星歯車機構に Bond graph のモデルを適用する場合, トルクの方向が決まらないという問題点 (林, 2009) が懸念された例もあるが, 前述のとおり Bond graph で扱っているエネルギーの流れ (パワー, 仕事率) はエフォート e (トルク M) とフロー f (角速度 ω) の積であり, そのエネルギーがボンドを通してある要素から次の要素へと流れている。対象の系におけるエネルギーの流れは同じであっても系を見る方向によってエネルギーの流れが逆となることは必然である。Bond graph では, 系を見る方向が一義的に定まらないため指摘の通りトルクが方向が定まらないことは十分に考えられる。そこで, 本研究ではリングギアを基準とし, 反時計回り (CCW 方向) を正方向と定義する。エネルギーの流れが正のとき入力, 負のとき出力であることから, フロー f (角速度 ω) の基準を定義することでエフォート e (トルク M) の方向も一義的に定めることが可能となる。

Fig. 5 Torsional Bond graph model of PGT considering the meshing damping and varying meshing stiffness. This figure illustrates Bond graph model for whole PGT with three planet gears. Here, element R is element for damping, element C is element for stiffness, and element I is element for mass. TF Junction corresponds to gear (gear ratio n), 0 and 1 junctions correspond to parallel and series junction, respectively. 1 junction corresponds to solid lump with same flow, thus it locates at the center of each component and all arrows goes to R , C , and I elements. In the figure, power is inputted into ring gear with motor and it goes through carrier, planet gears and outputted to sun gear. It is easy in Bond graph that to consider nonlinearity of meshing stiffness and damping effect even such a complex model. In this model, meshing stiffness varies three-times in a meshing period T_m by wave generators W_{rp} and W_{sp} .

2・3 かみあい剛性のモデリング

平歯車の1枚かみあいと2枚かみあいの変化によって、かみあい剛性が図6のようにかみあい周期 T_m で時間変化する。さらにかみあい剛性は歯面のヘルツ接触による面圧（伝達トルク）にも依存している（Kieckbusch et al., 2011）が、本モデルではかみあい率 ε のみに依存するとした。1枚かみあいと2枚かみあいの時間は図6に示した通りかみあい率によって異なる。かみあい率 ε はリングギアプラネットギアかみあいとサンギアプラネットギアかみあいである。リングギアが内歯車、サンギアが外歯車であることから、かみあい率 ε はそれぞれ以下のように求まる（社団法人日本材料学会, 2010）。ここで、添え字がaのものは歯車1および2の刃先円半径、bのものは基礎円半径である。

$$\varepsilon_r = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} + a \sin \alpha_w}{\pi m \cos \alpha} = 1.91 \quad (15)$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \sin \alpha_w}{\pi m \cos \alpha} = 1.57 \quad (16)$$

変化するかみあい剛性をシミュレーションに反映するため図5に wave generator (W_p , W_{sp})を導入し、現在時刻を t として、その瞬間のかみあい周波数（ $=Z_p \cdot N_p/60$ ）から以下のように矩形波関数で出力している。

$$K_m(t) = \begin{cases} K_1 & \text{if } t \bmod T_m \leq t \\ K_2 & \text{if } t \bmod T_m \geq t \end{cases} \quad (17)$$

かみあい剛性 K_1 と K_2 の値はデジタルフォースゲージを用いたフォースゲージテストから求めた。本研究ではリングギアプラネットギアかみあいとサンギアプラネットギアかみあいの1歯あたりのかみあい剛性は等しいとしているが、実際には前者と後者では内歯と外歯の差が存在してかみあい率 ε が異なるために図6に示すように遊星歯車機構における合成かみあい剛性はかみあい周期 T_m の中で3度変動する非線形性を有する。Bond graphのモデルでは式(17)のとおり時間変化するかみあい剛性を扱っており、図6にある通りの非線形性を反映している。剛性が周波数成分に効くことからこのモデリングによる解析精度の向上が期待される。その一方で、従来の力学モデルで運動方程式を用いて固有振動数を求める際は、次の式(18)のように交流平均値でかみあい剛性を一定値として計算を行った。

$$K_m = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} K_m(t) dt \quad (18)$$

Fig. 6 Time varying meshing stiffness model. There are internal meshing (ring gear and planet gear) and external meshing (sun gear and planet gear) in PGT. Although both meshing have same meshing phase $T_m (=1/f_z; f_z$ is meshing frequency), each contact ratio ε is different. Here, ε_r is contact ratio for internal meshing and ε_s is that for external meshing. As shown the figure, there are three-phases in the total meshing stiffness. Both single meshing in phase-one, single for external and double for internal in phase-two, and both double meshing in phase-three. Such variation of meshing stiffness causes nonlinearity in PGT, and make huge difference in the modeling and simulation.

3. 実験装置および諸元

Robert G. Parker らがヘリコプター用の大型の遊星歯車機構の実験的解析 (Ericson and Parker, 2013) を行い, 松村らがスリップリングを用いた実験的解析 (Matsumura et al., 2014) を行っている. しかし, いずれの研究においても大型の遊星歯車機構 (モジュール 2 以上) を用いているが, 小型軽量化の用途に適した小モジュールでコンパクトな遊星歯車機構を扱っていない. そこで, 本研究では小モジュール (モジュール 1) の遊星歯車機構を対象とする. 用いた歯車の諸元を表 2 に示す. 本研究で用いた遊星歯車機構ではプラネットギアの個数は最大 6 個まで可能であるが, 本報ではプラネットギアが 3 個の遊星歯車機構のみを扱っている.

この遊星歯車機構に対して図 7 に示すフォースゲージテストおよび図 8 に示すハンマリング試験を行った. フォースゲージテストでは, リングギアプラネットギア間, サンギアプラネットギア間のかみあい剛性を同定した. また, ハンマリング試験ではかみあい点でのかみあい減衰比の同定および固有振動数と振動モードの計測を行った. フォースゲージテストは計測機器の関係から図 7 に示すようにサンギアプラネットギア間のみで行うことができなかった.

Table 2 Specifications of gear train

	Sun	Planet	Ring	Carrier
Module [mm]	1			---
Number of teeth	30	15	60	---
Normal pressure angle [deg]	20			---
Helix angle	0			---
Tooth depth coefficient	2.25			---
Tooth width [mm]	6	10	10	---
Pitch diameter [mm]	30	15	60	---
Base diameter [mm]	28.2	14.1	56.4	---
Mass [kg]	0.09	0.01	0.28	0.72
Material	S45C

(a) Photograph of Force gauge test

(b) Illustration of configuration

Fig. 7 Force gauge test. Force gauge test was conducted on the sun planet meshing because it was impossible to insert the digital force gauge on the ring planet meshing. As shown in Fig.1, ring gear is internal gear and it becomes more difficult to insert the digital force if planet gear exists. Thus, it is assumed in this paper that meshing stiffness (either single meshing or double meshing) in both external meshing and internal meshing is the same. But as shown in Fig.7, average meshing stiffness in each meshing stiffness is different due to different contact ratio. In this test, applied force was measured by digital force gauge and displacement was also measured, then meshing stiffness is calculated as a ratio among two.

(a) Hammering test layout – Impact on carrier and ring gear along with rotational direction

(b) Ring gear and carrier

(c) Sun gear and planet gear

Fig. 8 Hammering test and arrangement of four accelerometer. In the test, ch1~5 is hammer, ring gear, carrier, sun gear, and planet gear respectively. Impact was applied on ring gear by a hammer. Acceleration, phase (real and imaginary), coherence were measured by FFT analyzer as 10-time average. Ring gear was a standard of this hammering test.

4. 実験結果および考察

4・1 かみあい剛性

プラネットギアサンギア間で行ったフォースゲージテストの結果の一例を図9に示す。かみあい周期によってかみあい剛性も変化していることが図9より明らかに見てとれる。

一般に平歯車では、1枚かみあいから2枚かみあいへとかみあいが進行するが、このヒステリシスサイクルにおいてもかみあいが1枚かみあい（①部）から2枚かみあい（②部）へと進行していることが見てとれる。より多くの歯がかみあっている2枚かみあいの領域（②部）では1枚かみあいの領域（①部）よりも剛性が高い。また、③部はバックラッシュによってかみあいが発生しない領域であり、かみあい剛性は0となっている。バックラッシュは先行研究（Faggioni et al., 2011）より0.212 mmであると計算される。また、図9のヒステリシスサイクルの二つの傾きより1枚かみあいおよび2枚かみあいのかみあい剛性が算出され、10回の中央値からそれぞれ 7.0×10^5 , $1.25 \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}$ と計算された。

Fig. 9 Meshing force hysteresis (Sun gear – Planet gear). As shown in the figure, there is clear meshing hysteresis on a measured gear tooth, start from single meshing and move onto double meshing, then backrush. In the force gauge test, the relation between applied torque and displacement on only a certain tooth, or only one of the gear tooth can be measured. That is the reason why the hysteresis cycle is observed.

平均のかみあい剛性はかみあい率に依存しており、以下の式 (Kieckbusch and Howard, 2007) より導いたかみあい剛性と比較を行う。

$$K = Ew \left((c_T m^2 z^{2.2})^{-1} + (c_c m^{1.85} z^2 \tau^{0.105})^{-1} \right)^{-1} \quad (19)$$

ここで、 E はヤング率、 w は歯幅、 $c_T = 7.9365 \times 10^{-5}$ 、 $c_c = 3.2 \times 10^{-5}$ 、 m はモジュール、 z は歯数、 τ は駆動試験で負荷したトルクである。式 (19) より、1 枚かみあいの時のかみあい剛性は $1.09 \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}$ となり、実験より得られた 1 枚かみあいと 2 枚かみあいのかみあい剛性の値の間の値となり、このことから実験値は妥当なものであると考えられる。したがって、Bond graph のシミュレーションには実験より得られた値を用いることとした。

4・2 かみあい減衰

ノイズや固定の差異を除くためにハンマリング試験を複数回行いその波形から減衰比を算出した。減衰比は下記の式のように減衰係数と固有振動数から求め、 M は等価質量である。

$$\zeta = c / 2\sqrt{Mk} \quad (20)$$

Fig. 10 Superior envelope on timeline. This figure shows a result of hammering test on a sun and planet meshing. There is clear envelope on a result, and damping ratio is calculated from the result. The observed result was compared with the value from references, and it was found that the value is well matched.

ハンマリング試験から得られた波形には明確な減衰波形が表れ、図 10 のように包絡線を引くことができた。この包絡線より 3 プラネットの遊星歯車機構で実験より計測された減衰比は先行研究 (Ambarisha and Parker, 2007) の平歯車の減衰係数とよく一致した $\zeta=0.12$ と $\zeta=0.15$ とその他に $\zeta=0$ 、 $\zeta=0.01$ 、 $\zeta=0.07$ が計測された。

次に、リングギアプラネットギアカみあい、サンギアプラネットギアカみあいの減衰比を調べるために単一プラネットギアでハンマリング試験を行った。上記と同様に減衰比を求めるとリングギアとプラネットギアの減衰比は $\zeta=0.03$ 、サンギアとプラネットギアの減衰比は $\zeta=0.0024$ となった。ハンマリング試験より得られた値は単一ものであったため、1 枚かみあいと 2 枚かみあいによる減衰比を同定することはできなかった。

4・3 固有振動数と振動モード

上記で同定したかみあい剛性とかみあい減衰比を用いた Bond graph によって求められる固有振動数と振動モードと従来の運動方程式によって求められる固有振動数と振動モード、ハンマリング試験によって求められた試験機の固有振動数と振動モードの比較を行う。そもそも Bond graph はブロック線図や状態方程式と深い連関があり、シミュレーションソフト (20-Sim, Controllab 製) に依存しているものの、固有振動数や振動モードを求めることができる。本研究の Bond graph を解いた 20-Sim では固有値問題として固有振動数を解くことが可能である。特に減衰に関して、通常代入すべき減衰係数ではなく減衰比を入力し、計測された減衰比と剛性、それぞれのかみあいでの等価質量から逆計算している。

遊星歯車機構の振動モードには、各要素が相対的に回転運動を行う「回転モード」、プラネットギアのみが回転運動を行う「プラネットモード」、機構全体が並進運動を行う「並進モード」が存在する (Lin and Parker,

1999a). 本報ではリングギアを基準として固定しているため、リングギアに対する他要素に動きを示した。質量及び剛性の近い回転モードとプラネットモードは近い固有振動数となることが多い。その一方で、並進モードでは機構全体が並進するモードであり、他のモードに比べて重い機構全体の質量が作用する一方で、回転方向の低い支持剛性を持つ回転モードに対して並進モードでは並進方向の剛性が非常に高いため、並進モードは高周波数の固有モードとなる。

ハンマリング試験によって得られたコヒーレンスを考慮して、コヒーレンスが0.95以上であった300Hz以下に着目し、3次モードまでを比較の対象とすることとした。運動方程式、Bond graph、ハンマリング試験から得られた振動モードをまとめたものを図11に示す。ハンマリング試験より固有振動数は135, 206, 274Hzが計測された。1～3次モードのいずれのモードも回転モードである。また、運動方程式は式(6)より、減衰項およびジャイロ項を省いて制御系解析ソフトMATLABを用いて固有振動数および振動モードを求めた。この過程においてかみあい剛性の平均値を用いていること、減衰項を省略していることからこの運動方程式は先行研究であるYutaoらのBond graphモデルと等価であるといえる。結果、1次モードが130Hz、2, 3次モードが重解の297Hzとなった。ここで1次モードは回転モード、2, 3次モードはプラネットモードである。図5に示す20-SimにおけるBond graphに各試験により同定したかみあい剛性とかみあい減衰比を代入し、固有振動数を求めたところ144, 207, 282Hzとなり、いずれのモードも回転モードである。本研究で扱っている非線形性を含んだBond Graphモデルは20-Simによって線形化し、状態方程式に等価変換したうえで固有振動数を求めている。

図11より、多自由度の連立の運動方程式で線形モデル化した後に解析ソフトで計算した結果に比べ、Bond graphを用いて求めた方が固有振動数、振動モードともに全ての固有モードにおいて実験によって同定された結果に非常に近くなっていることがわかる。従来の運動方程式を解いたものでは1次モードは実験結果と近いものの、2, 3次モードでは固有振動数だけでなく振動モードも異なっている。

いずれの計算においても質量項は同じだが、特に2次モードが異なった理由として剛性項の差異が考えられる。一般に慣性項と剛性項が周波数成分に効き、減衰項が位相に効く。本研究では同じ慣性項を用いているため、剛性項の扱いが固有振動数に大きく作用していると考えられる。従来の運動方程式ではかみあい剛性を一定値として扱ったが、Bond graphではかみあい剛性を時間の関数として非線形性を考慮に入れた。かみあい剛性が一定値の場合、プラネットギアに作用するかみあい剛性は1通りで、複数あるプラネットギアが対称配置（プラネットギアの回転中心がサンギアおよびリングギアの中心角に等配）され重解のモードとなる。一方で、非線形性として考えた場合、プラネットギアに作用するかみあい剛性はリングギア側とサンギア側で内歯と外歯でかみあい率が異なることから1枚かみあいと2枚かみあいのタイミングがずれる（位相が異なる）ことに起因する固有モードの差も解析できる。前述のとおり回転モードとプラネットモードの固有振動数は近いが、Bond graphによってかみあい剛性の非線形性を考慮したことで明らかに解析精度が向上し、さらにモードの見落としも減少したことがわかる。さらに、減衰項が作用している位相に着目すると、減衰を無視した運動方程式の解（Yutaoらのモデルの解でもある）よりもかみあい減衰項を考慮に入れたBond graphのモデルの方が実験から得られた結果に近く、位相の面からも解析精度が向上したといえる。

以上より複雑で多自由度な遊星歯車機構の連成ねじり振動の解析において、提案するBond graphを用いたモデル化の手法は有効であり、現場の技術者でも容易に見通しよく非線形要素も考慮した解析が可能であるだけでなく、高次回転モードなどでの解析精度向上とモードの見落としも防止する効果が期待できることも判明した。

Fig. 11 Natural frequencies and mode shapes. This figure shows comparison among the result of natural frequencies and mode shape in first to third modes, based on the calculation, Bond graph, and experiment. In the figure, the result of experiment is the complete answer and it is important how close or similar to the answer the result from the others are. Mass and stiffness are both critical to the frequency, and damping is critical to the phase. From the figure it is clear that simulation by Bond graph is well matched with the experimental result, because nonlinear meshing stiffness and damping is considered in it, though those factors are neglected in the calculation.

5. 結 言

2K-H 遊星歯車機構の駆動中のエネルギーの流れに着目して, Bond graph を用いて新たな動的システムとしてのモデル化の手法を検討し, その振動解析を試みた. 以下に, 本研究により得られた結論を示す.

- (1) 本モデル化によりプラネットギア, リングギア, サンギアの多自由度の連成の関係の視覚化でき, 現場の設計技術者が動力システムの全体を理解するための有効な手段の一つとなることがわかった.
- (2) 多自由度の連成の運動方程式では考慮が難しかった非線形要素であるプラネットギアとリングギア, プラネットギアとサンギアの歯のかみあい部のかみあい剛性の時間変化, さらにそれらのかみあい減衰比を容易にモデルに組み込み, 正確なシミュレーションを行う手法を構築できた.
- (3) Bond graph のモデルによる結果は, 実測による固有振動数, 振動モードともに非常によく一致しており, 従来の連成の運動方程式では十分な精度で解析ができなかった, 高次回転モードなどに対しても高い精度で見落とすことなく解析が可能であることがわかった.

文 献

- Ambarisha, V. and Parker, R., Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models, *Journal of sound and vibration* 302 (2007), pp.577-595.
- Chen, Y. and Ishibashi, A., Studies on noise and vibration of planetary gear drives for automatic transmission of passenger cars, *JSME journal* No.99-0415(2000). p.634.
- Cooley, C. and Parker, R., A review of planetary and epicyclic gear dynamics and vibration research, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 66 (2014).
- Cooley, C. and Parker, R., Vibration properties of high-speed planetary gears with gyroscopic effects, *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 134(2012).
- Ericson, T. and Parker, R., Planetary gear modal vibration experiments and correlation against lumped-parameter and finite element models, *Journal of sound and vibration* 332 (2013), pp.2350-2375.
- Faggioni, M., Samani, F., Bertacchi, G. and Pellicano, F., Dynamics optimization of spur gears, *Mechanism and machine theory* 46(2011), pp.544-557.
- 林輝, 歯車規格の資料作りからマイクロメカニズムの研究まで, 精密工学会誌, Vol. 75, No. 1(2009), p.37.
- Hrovat, D. and Tobler, W., Bond graph modeling and computer simulation of automotive torque converters, *Journal of the franklin institute*, Vol.319, Issue1-2(1985), pp.93-114.
- Kiebusch, T. and Howard, I., A common formula for the combined torsional mesh stiffness of spur gears, 5th Australasian congress on applied mechanics, ACAM (2007).
- Kiebusch, T., Sappok, D., Sauer, B. and Howard, I., Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parameterical FE models, *Journal of mechanical engineering* 57(2011), pp.810-818.
- Lin, J. and Parker, R., Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters, *Journal of sound and vibration*, Vol. 228, Issue1 (1999a), pp. 109-128.
- Lin, J. and Parker, R., Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration, *Transactions of the ASME*, Vol. 121(1999b), pp.316-321.
- 松村茂樹, 若崎知己, 飯野剛, 北條春夫, プラネタリ型遊星歯車装置の振動挙動の実験的把握に関する研究, 第14回機素潤滑設計部門講演会講演論文集, No. 14-6 (2014), pp. 159-160.
- Parker, R., Agashe, V. and Vijayakar, S., Dynamic response of a planetary gear system using a finite element/ contact mechanics model, *Transactions of the ASME*, Vol. 122(2000), pp.304-310.
- Sueur, C. and Tanguy Dauphin G., Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems, *Journal of franklin institute*, Vol.328, Issue1 (1991), pp.55-70.
- Tanguy Dauphin, G., Rahmani, A., and Sueur, C., Bond graph aided design of controlled system, *Simulation practice and theory*, Vol.7, Issue 5-6(1999), pp.493-513.
- 社団法人日本材料学会, 機械設計法, 第7章 (2010), p.179.
- トーマ, J., 須田信英, ボンドグラフによるシミュレーション, コロナ社 (1996).
- Yutao, L. and Di, T., Dynamics modeling of planetary gear set considering meshing stiffness based on bond graph, 2011 International conference on advances in engineering, *procedia engineering* 24(2011), pp.850-855.

References

- Ambarisha, V. and Parker, R., Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models, *Journal of sound and vibration* 302 (2007), pp.577-595.
- Chen, Y. and Ishibashi, A., Studies on noise and vibration of planetary gear drives for automatic transmission of passenger cars, *JSME journal* No.99-0415(2000). p.634.
- Cooley, C. and Parker, R., A review of planetary and epicyclic gear dynamics and vibration research, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 66 (2014).
- Cooley, C. and Parker, R., Vibration properties of high-speed planetary gears with gyroscopic effects, *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 134(2012).
- Ericson, T. and Parker, R., Planetary gear modal vibration experiments and correlation against lumped-parameter and finite element models, *Journal of sound and vibration* 332 (2013), pp.2350-2375.
- Faggioni, M., Samani, F., Bertacchi, G. and Pellicano, F., Dynamics optimization of spur gears, *Mechanism and machine theory* 46(2011), pp.544-557.

- Hayashi, T., From production of the materials on gear standard to the study on micro-mechanisms, Journal of JSPE, Vol. 75, No.1(2009), p.37, (in Japanese).
- Hrovat, D. and Tobler, W., Bond graph modeling and computer simulation of automotive torque converters, Journal of the franklin institute, Vol.319, Issue1-2(1985), pp.93-114.
- Kiekbusch, T. and Howard, I., A common formula for the combined torsional mesh stiffness of spur gears, 5th Australasian congress on applied mechanics, ACAM (2007).
- Kiekbusch, T., Sappok, D., Sauer, B. and Howard, I., Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parameterical FE models, Journal of mechanical engineering 57(2011), pp.810-818.
- Lin, J. and Parker, R., Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters, Journal of sound and vibration, Vol. 228, Issue1 (1999a), pp. 109-128.
- Lin, J. and Parker, R., Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration, Transactions of the ASME, Vol. 121(1999b), pp.316-321.
- Matsumura, S., Wakasaki, T., Iino, T. and Houjoh, H., Experimental investigation of vibration behavior of a planetary gear system, Proceeding of The 14th. Machine design and tribology division meeting in JSME, No.14-6 (2014), pp.159-160, (in Japanese).
- Parker, R., Agashe, V. and Vijayakar, S., Dynamic response of a planetary gear system using a finite element/ contact mechanics model, Transactions of the ASME, Vol. 122(2000), pp.304-310.
- Sueur, C. and Tanguy Dauphin G., Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems, Journal of franklin institute, Vol.328, Issue1 (1991), pp.55-70.
- Tanguy Dauphin, G., Rahmani, A., and Sueur, C., Bond graph aided design of controlled system, Simulation practice and theory, Vol.7, Issue 5-6(1999), pp.493-513.
- The society of materials science Japan, Machine design, Sector 7 (2010), p.179 (in Japanese).
- Thoma, J. and Suda, N., Simulation by Bondgraphs, Corona publishing Co., Ltd. (1996) (in Japanese).
- Yutao, L. and Di, T., Dynamics modeling of planetary gear set considering meshing stiffness based on bond graph, 2011 International conference on advances in engineering, procedia engineering 24(2011), pp.850-855.