MPS 法における境界積分を用いたポリゴン壁境界表現

松永 拓也^{*1}, 柴田 和也^{*2}, 越塚 誠一^{*3}

Boundary integral based polygon wall representation in the MPS method

Takuya MATSUNAGA^{*1}, Kazuya SHIBATA^{*2} and Seiichi KOSHIZUKA^{*3}^{*1,*2,*3} Department of Systems Innovation, The University of Tokyo
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan

Received: 21 April 2018; Revised: 5 June 2018; Accepted: 26 July 2018

Abstract

The particle methods are suited to simulate fluid flow problems with large boundary deformation. The moving particle semi-implicit (MPS) method is one of the representative particle methods for incompressible flow. In recent years, the MPS method has received a great deal of attention in various fields of science and engineering. However, the numerical treatment of complicated wall geometry is still an open question. The conventional approaches have severe issues in handling arbitrary shape or calculation accuracy. In these circumstances, this study has been done to propose a novel numerical treatment of solid wall boundary in the MPS method. In this approach, the wall contribution in the discretization scheme is described in a form of volume integral over object domain. Thus, arbitrary-shaped boundaries represented by a polygon mesh can faithfully be considered. Moreover, since the distribution of physical quantity inside object is given by linear extrapolation, it satisfies the prescribed boundary condition with high accuracy. While the volume integral cannot be numerically evaluated with affordable computational cost, it can be transformed into a boundary integral form based on the divergence theorem. The derived boundary integral can be calculated with reasonable cost and acceptable accuracy using a projection technique and the Gaussian quadrature. The proposed method has been examined through several numerical test cases in 2D and 3D. As a result of the numerical tests, the present method is shown to have considerably higher accuracy compared to conventional methods, and its validity is verified.

Keywords : Computational fluid dynamics, Particle method, MPS method, Wall boundary condition, Polygon boundary representation, Boundary integral, Gaussian quadrature

1. 緒 言

粒子法は物体駆動の流れや自由表面流れなど、境界の大きな変位を伴う複雑な流体現象に対する有効な数値解析手法として大きな注目を集めている。広く普及している格子法と異なり、粒子法は計算格子を使用しない。そのため、計算点の移動に伴う格子の歪み等の問題が発生せず、極めて大きな変形を含む自由境界の運動をも詳細に捉えることができる。

非圧縮性流れのための粒子法としては、MPS (Moving Particle Semi-implicit) 法 (Koshizuka and Oka, 1996) が広く用いられている。既に表面張力モデル (近藤他, 2007; 服部他, 2016)、非ニュートン流体モデル (福澤他, 2014)、キャビテーションモデル (関根他, 2017)、混相流解析手法 (Duan et al., 2017)、流体 - 構造連成解析手法 (Mitsume et

No.18-00197 [DOI:10.1299/transjsme.18-00197], J-STAGE Advance Publication date : 3 August, 2018

^{*1} 正員, 東京大学 大学院工学系研究科 システム創成学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)^{*2} 東京大学 大学院工学系研究科 システム創成学専攻^{*3} 正員, フェロー, 東京大学 大学院工学系研究科 システム創成学専攻

E-mail of corresponding author: matsunaga@mps.q.t.u-tokyo.ac.jp

Fig. 1 Classification of wall boundary representations in the particle methods.

al., 2014) などが考案されており, 移動境界を伴う様々な複雑現象に対して適用されている. また近年では計算精度を向上する数々の研究開発 (Tamai and Koshizuka, 2014; Hu et al., 2017; Tanaka et al., 2018) がなされており, 学術的基礎研究から工学応用に至るまで, 広範な分野での発展が益々期待される. しかしながら, 粒子法は壁境界の取り扱いに重大な課題を残している.

流れ場における壁境界の存在を考慮するためには, 粒子 - 壁面間の相互作用を適切に与える必要がある. 粒子法では計算点が流れに追従して移動するから, 壁面での境界条件が適切に課されていないと, 粒子の境界貫通や非物理的な圧力振動などが発生し大きな誤差あるいは計算の破綻を引き起こしてしまう. 従って, 壁境界の数値的な取り扱い方法は解析の質を大きく左右する重要な要素となっている. ところが, 粒子法における壁境界の表現は格子法に比べ非常に自由度が高く, 単純でない. そのため, これまでに様々な計算手法が提案されているが, 既存の手法はどれも異なる長所と短所をもっており, 問題に応じた使い分けを余儀なくされている. 特に, 複雑な壁面形状を現実的なコストで精度良く考慮することのできる決定的な計算アルゴリズムは未だ考案されていない.

粒子法における壁境界の表現手法は, 大きく粒子境界表現とポリゴン境界表現に分類することができる. 粒子境界表現は, 図 1(a) に示すように, 固体領域に配置した境界粒子を用いる手法である. 代表例として, Koshizuka et al. (1998) の壁粒子とダミー粒子を用いる方法や, Marrone et al. (2011) の内挿マーカーを配置する方法, Cummins and Rudman (1999) のミラー粒子 (流体粒子の鏡像) を用いる方法が挙げられる. 粒子数密度や空間離散化スキームを評価する際には, 近傍にある境界粒子を仮想的な計算点として考慮するだけでよく, 計算アルゴリズムが単純である. しかしながら, 壁面形状に対し適切な境界粒子を配置することが必要とされ, 形状が複雑な場合には境界粒子を配置するために大きな労力を要する.

一方, ポリゴン境界表現は, 図 1(b) に示すように, ポリゴンメッシュ (二次元では線分) で表される壁面形状を直接評価する手法である. 粒子境界表現と比べ境界粒子を配置する必要がないため, CAD ソフトウェア等を用いて作成した形状データを直接シミュレーションに使用できるのが強みである. しかしながら, 粒子数密度や空間離散化スキームに対する壁面寄与の定式化が単純でない. 距離関数と面法線ベクトルの情報に基づくモデル化を利用する原田ら (2008) の方法は, 複雑な壁面形状を含む流れを低コストで計算できるが, 非物理的な数値挙動が発生しやすいことが知られている (Mitsume et al., 2015). Zhang et al. (2015) は, 原田らのモデルにおける計算精度の問題を改善する方法を提案しているが, 補助的に境界粒子を使用する必要がある.

MPS 法と同じく粒子法に分類される SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法では, 境界積分を用いた壁境界表現が Feldman and Bonet (2007) や Ferrand et al. (2013) によって考案されている. これらはポリゴン境界表現であるため, ポリゴンメッシュを用いて容易に複雑形状を考慮できるという特徴がある. しかしながら, 彼らの定式化は SPH 法における Kulasegaram et al. (2004) の再正規化に基づいており, MPS 法に直接流用できない.

このような背景のもと, 筆者らは MPS 法において複雑な壁面形状を精度良く考慮することのできる新しい計算アプローチの開発に取り組んできた (松永他, 2016; 松永他, 2017). 本研究では, 境界積分に基づくポリゴン境界表現の手法を提案する. 境界積分を用いて壁面形状を忠実に考慮することで, 従来のポリゴン境界表現と比べ, 複雑形状への適用性はそのままに, 計算精度を大きく改善することができる. また, SPH 法における境界積分ベースの手法と比べると定式化の方法が大きく異なる. 具体的には, 壁面内部領域の物理量分布を境界条件に適合するよう定め, 空間微分演算子を体積積分により直接記述する点が新しく, 近似精度の向上に加えて, 任意の離散化スキームに適用できる利点がある. 本稿では, 提案手法の定式化ならびに具体的な計算方法について説明し, 数

値計算結果を示す.

2. MPS 法を用いた非圧縮性流れの数値解法

2.1 支配方程式

本研究では, 連続体, 非圧縮性, ニュートン流体を仮定し, 以下に示す連続の式とナビエ・ストークス方程式を支配方程式とする.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{u}$ は速度, t は時間, p は圧力, ρ は密度, ν は動粘性係数, $\mathbf{g}$ は重力加速度を表す. なお, 解析の主要変数である速度 $\mathbf{u}$ および圧力 p は個々の粒子上に定義される. また, 粒子は流体の流れに追従して移動する. これは粒子位置を $\mathbf{r}$ としたとき, 次式のように記述できる.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} \quad (3)$$

2.2 半陰解法による時間進行

MPS 法では, 粘性項と外力項を陽的に評価し, 圧力勾配項を陰的に評価する半陰的アルゴリズムによる時間進行を採用する. まず, 前の時刻 t_{old} における速度 $\mathbf{u}^{\text{old}}$ と粒子位置 $\mathbf{r}^{\text{old}}$ を元に仮の速度 $\mathbf{u}^*$ と仮の粒子位置 $\mathbf{r}^*$ を求める.

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{\text{old}} + \Delta t \left[\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle^{\text{old}} + \mathbf{g} \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^{\text{old}} + \Delta t \mathbf{u}^* \quad (5)$$

ここで, $\Delta t = t_{\text{new}} - t_{\text{old}}$ は時間ステップ幅である.

続いて, 圧力ポアソン方程式

$$\langle \nabla^2 p \rangle^{\text{new}} = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n \rangle^* - n^0}{n^0} + \alpha \frac{\rho}{\Delta t^2} p^{\text{new}} \quad (6)$$

に基づいて圧力を求める. ここで n は粒子数密度, n^0 はその基準値を表す. なお, 右辺第二項は体積保存のための項 (Tanaka and Masunaga, 2010), 第三項は微圧縮性を考慮するための項 (Ikeda et al., 2001) であり, いずれも計算の安定化に大きく寄与する. γ および α はチューニングパラメータで, 問題に応じてそれぞれ $0 \leq \gamma \leq 0.1$, $0 \leq \alpha \leq 10^{-6}$ 程度の値を設定する. なお, 類似の定式化は SPH 法においても開発されており, Asai et al. (2012) によって緩和係数 (γ) の効果と最適化に関する考察がされている. 注意すべき点として, Tanaka and Masunaga (2010) ならびに Asai et al. (2012) では, 第二項が ($\langle n \rangle^*$ でなく) 前時刻の粒子数密度 $\langle n \rangle^{\text{old}}$ を用いて定式化されているのに対し, 本研究では仮の粒子位置 $\mathbf{r}^*$ における粒子数密度 $\langle n \rangle^*$ に置き換えている.

線形ソルバーを用いて式 (6) を解き, 得られた圧力に基づき次のように速度と粒子位置を修正して時刻 t_{new} における値を決定する.

$$\mathbf{u}' = -\frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla p \rangle^{\text{new}} \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{\text{new}} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}' \quad (8)$$

$$\mathbf{r}^{\text{new}} = \mathbf{r}^* + \Delta t \mathbf{u}' \quad (9)$$

2.3 離散化スキーム

MPS 法では、粒子 i の粒子数密度を次のように計算する.

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \langle n \rangle_i^{\text{wall}} \quad (10)$$

重み関数 $w(r)$ は次式で定義される.

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 r_e は影響半径である. $\langle \square \rangle_i^{\text{wall}}$ は壁面の寄与を表す.

速度のラプラシアン、圧力のラプラシアン、および速度の発散は以下の離散方程式によって評価する.

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} \quad (12)$$

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \sum_{j \neq i} (p_j - p_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{wall}} \quad (13)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i = \frac{m}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} \quad (14)$$

ここで、 m は次元数 (二次元では $m=2$, 三次元では $m=3$) を表す. n^0 と λ^0 は等間隔に配置された粒子群に対してそれぞれ式 (10), 式 (15) を適用して得る定数である.

$$\langle \lambda \rangle_i = \frac{1}{n^0} \sum_{j \neq i} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2 w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (15)$$

圧力勾配には様々な離散化スキームが考案されている. 式 (14) に示した速度の発散スキームと同じ取り扱いをすれば,

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{m}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(p_j - p_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} \quad (16)$$

を得る. ところが、式 (16) は自由表面を含む流れでは圧力勾配項に含まれる粒子間引力の効果によって数値不安定化を引き起こす. そこで、Koshizuka et al. (1996) は数値安定性のために p_i を近傍最低圧力 $\hat{p}_i$ で置き換えている.

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{m}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(p_j - \hat{p}_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} \quad (17)$$

$$\hat{p}_i = \min_{j \in \Lambda_i \cup \{i\}} p_j \quad (18)$$

ここで Λ_i は粒子 i の近傍粒子集合

$$\Lambda_i = \left\{ j \neq i \mid w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \neq 0 \right\} \quad (19)$$

Fig. 2 Geometric free-surface detection scheme of Marrone et al. (2010).

である。更に, Toyota et al. (2005) は

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{m}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(p_j + p_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} \quad (20)$$

を提案している。式 (17) に比べ粒子間に作用する斥力が大きくなり, 粒子分布の偏りを改善する効果がある (Chen et al., 2014)。

2.4 自由表面の取り扱い

MPS 法では粒子数密度の低下をもとに自由表面粒子を検出し, 圧力に関するディリクレ境界条件

$$p = 0 \quad \text{on free surface} \quad (21)$$

を適用する。自由表面粒子の判定条件には,

$$n < \beta n^0 \quad (22)$$

が用いられる。ここで β は粒子数密度に対するしきい値で, 式 (22) を満たす粒子を自由表面粒子とみなす。ただし, 式 (22) を単独で用いると多くの誤判定自由表面粒子が発生するため, 本研究では Tanaka and Masunaga (2010) の近傍粒子数に基づく判定法と Marrone et al. (2010) の幾何的判定法 (図 2) を補助条件として用いる。

具体的な計算手順を以下に示す。はじめに, 近傍粒子数を N_i として,

$$N_i < 2m \quad (23)$$

を満たすものを自由表面粒子として判定する。式 (23) を満たさない粒子のうち, 式 (22) と

$$N_i < \beta' N^0 \quad (24)$$

の両者あるいは一方を満たさないものを内部粒子として判定する。ここで, N^0 は近傍粒子数の基準値, β' はしきい値を表す。本研究では, $\beta = \beta' = 0.9$ を使用した。ここまでの計算で自由表面粒子とも内部粒子とも判定されなかった粒子は, Marrone の方法で判定を行う。まず, 次式に基づきモーメント行列 M_i を計算する。

$$M_i = \frac{m}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (25)$$

Fig. 3 Schematic illustration of the boundary particle arrangement in the wall particle method.

そして、モーメント行列 M_i の最小固有値 λ_i を算出し、

$$\lambda_i \leq \beta_1 \quad (26)$$

を満たすものを自由表面粒子として判定し、

$$\lambda_i > \beta_2 \quad (27)$$

を満たすものを内部粒子として判定する。ここで β_1 , β_2 はそれぞれしきい値を表す。本研究では、 $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$ を使用した。上記のいずれにも該当しない粒子、すなわち

$$\beta_1 < \lambda_i \leq \beta_2 \quad (28)$$

を満たすものは、図 2 に示す幾何的判定法を用いて判定する。ここで、スキャン領域は、次のように計算される法線ベクトル $\mathbf{n}_i$ をもとに定義される。

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|} \quad (29)$$

$$\mathbf{v}_i = -M_i^{-1} \mathbf{b}_i \quad (30)$$

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (31)$$

スキャン領域内に粒子が存在しないものを自由表面粒子、一つ以上存在するものを内部粒子として判定する。

3. 従来の壁境界表現

粒子法を用いた流れの計算において壁境界の存在を考慮するには、壁面上で速度と圧力についての境界条件を満足すると共に、影響半径の打ち切りによる近傍粒子の欠損を補正しなければならない。そのためには、粒子数密度や空間離散化スキームに含まれる壁面寄与項 $\langle \square \rangle^{\text{wall}}$ を適切に評価するための数値アルゴリズムが必要である。

粒子法ではこれまで様々な壁境界表現が提案されているが、ここでは MPS 法において広く用いられている Koshizuka et al. (1998) の壁粒子を用いる表現と、原田ら (2008) の距離関数を用いる表現での計算方法について簡潔に説明する。

3.1 壁粒子を用いた表現

MPS 法では、はじめ壁粒子を用いて壁境界が表現されていた (Koshizuka et al., 1998)。図 3 に示すように固液体積を粒子の集合に置き換え、流体領域に接する第一層を壁粒子、それ以外をダミー粒子として定義する。近傍の

壁粒子を Λ^{wall} , ダミー粒子を Λ^{dummy} で表せば, 粒子数密度の壁面寄与項は次のように記述される.

$$\langle n \rangle_i^{\text{wall}} = \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{wall}} \cup \Lambda_i^{\text{dummy}}} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (32)$$

壁粒子およびダミー粒子は物体の運動と共に移動するので, 速度については物体の速度を与える. つまり静止壁であれば全ての壁粒子とダミー粒子を $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ に固定することで速度のディリクレ境界条件を表現する. 従って, 速度のラプラシアンと発散における壁面寄与項は単純に

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{wall}} \cup \Lambda_i^{\text{dummy}}} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (33)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{wall}} \cup \Lambda_i^{\text{dummy}}} \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (34)$$

により計算できる. 一方, 圧力を計算する際には壁粒子のみを流体粒子と同様に扱い圧力を解き, ダミー粒子は近似的なノイマン境界条件を与えるための参照点として扱う. すなわち,

$$p_j = p_i \quad (j \in \Lambda_i^{\text{dummy}}) \quad (35)$$

を仮定することで, 圧力のラプラシアンと勾配の壁面寄与項

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{wall}}} (p_j - p_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (36)$$

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{wall}}} \frac{(p_j - p_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (37)$$

を得る. また, 圧力勾配スキームとして式 (17) を採用したときは,

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{wall}}} \frac{(p_j - \hat{p}_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \frac{m}{n^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{dummy}}} \frac{(p_i - \hat{p}_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (38)$$

式 (20) のときは,

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{wall}}} \frac{(p_j + p_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \frac{m}{n^0} \sum_{j \in \Lambda_i^{\text{dummy}}} \frac{2p_i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (39)$$

となる.

3.2 距離関数を用いたポリゴン壁境界表現

原田ら (2008) の壁境界表現では, 壁面形状を二次元では線分, 三次元ではポリゴンメッシュとして表す. そして, それぞれの粒子から最も近い壁面上の点を計算し, その距離と方向ベクトルをもとに壁面寄与を近似する. 最近傍点の計算はコストが高いため, ポリゴン数が多いシミュレーションでは背景格子を用いた近似計算がよく用いられる. 計算領域中に一様に配置した格子点上で距離関数を予め計算し保存しておく. 解析実行時には粒子位置で距離関数の内挿値を求め使用する. 方向ベクトルは, 距離関数の勾配ベクトルに基づき算出できる. 背景格子を使用した計算法は, 解析の実行時間がポリゴン数に依らないのが強みであるが, 移動壁面を含む場合は背景

Fig. 4 Schematic illustration of the distance function based polygon wall representation.

格子を分割するなどの工夫が必要になる。以下では、壁面寄与項の具体的な計算方法について示す。

粒子数密度の壁面寄与項は、壁重み関数 Z により近似する。

$$\langle n \rangle_i^{\text{wall}} = Z(|\mathbf{r}_{iw}|) \quad (40)$$

ここで $\mathbf{r}_{iw}$ は粒子 i から最近傍壁面までの相対位置ベクトルを表す (図 4(a) 参照)。壁重み関数は、図 4(b) のように平面に対して一様に配置した仮想境界粒子 Λ^{virtual} を考えたときの重み関数の和

$$\sum_{j \in \Lambda_i^{\text{virtual}}} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (41)$$

であり、これは平面までの距離に依存する関数となる。実際の計算では、シミュレーションに先立って壁重み関数を複数の距離に対して予め計算しておき、ルックアップテーブルとして使用することで高速に計算できる。

速度のラブラシアンにも同様に壁重み関数を用いる。

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} (\mathbf{u}_{\text{wall}} - \mathbf{u}_i) Z(|\mathbf{r}_{iw}|) \quad (42)$$

ここで $\mathbf{u}_{\text{wall}}$ は壁面速度を表す。

速度の発散の壁面寄与項は次のように計算する。

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} (\mathbf{u}_{\text{wall}} - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{-\mathbf{r}_{iw}}{|\mathbf{r}_{iw}|} Z'(|\mathbf{r}_{iw}|) \quad (43)$$

ここで Z' は第二の壁重み関数で、仮想境界粒子を用いて次のように計算される。

$$\sum_{j \in \Lambda_i^{\text{virtual}}} \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (44)$$

ここで $\mathbf{n}$ は面の単位法線ベクトルである。通常の壁重み関数と同様に、 Z' も平面までの距離のみの関数となるのでルックアップテーブルを用いた高速化が適用できる。

圧力勾配の壁面寄与項は次式に従って計算する。

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \begin{cases} \frac{\rho}{\Delta t^2} (H - |\mathbf{r}_{iw}|) \frac{\mathbf{r}_{iw}}{|\mathbf{r}_{iw}|} & |\mathbf{r}_{iw}| < H \\ \mathbf{0} & |\mathbf{r}_{iw}| \geq H \end{cases} \quad (45)$$

ここで H は壁面距離に関するしきい値で、初期粒子間距離を ℓ_0 で表すと $H = \ell_0/2$ である。壁面から H 未満の距

Fig. 5 Schematic illustration of the domain of the volume integration (Ω) and of the surface integration ($\partial\Omega$ and $\partial\Omega'$) considered in the boundary integral based polygon wall representation.

離に近づいた粒子には式 (45) に基づき反発力が与えられるので、粒子の過剰接近や貫通に対してロバスト性がある。

圧力のラプラシアン壁面寄与項は次のように計算される。

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{wall}} = \begin{cases} \frac{2\rho}{\lambda^0} \frac{|\mathbf{r}_{iw}|}{\Delta t^2} (H - |\mathbf{r}_{iw}|) & |\mathbf{r}_{iw}| < H \\ \mathbf{0} & |\mathbf{r}_{iw}| \geq H \end{cases} \quad (46)$$

4. 提案手法：境界積分を用いたポリゴン壁境界表現

本研究では、MPS 法において壁境界を考慮するための新しい計算アプローチとして、境界積分を用いた壁境界表現を提案する。壁面形状をポリゴンメッシュで表すため、三次元の複雑な形状であっても取り扱いが容易である。原田ら (2008) の距離関数を用いた手法との違いは、平面を仮定せず、壁面形状を直接評価する点である。そのため、壁面の複雑な凹凸が存在する場合にも精度良く解析を行うことができる。

4.1 体積積分に基づく定式化

Koshizuka et al. (1998) の壁粒子を用いた表現に見られるように、流れに対する壁面の寄与は物体領域中に配置した境界粒子を用いることで単純に評価できる。提案手法では、物体領域中に微小な無限個の粒子を配置した極限を考え、壁面寄与項を体積積分として以下のように記述する。

$$\langle n \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{1}{C_V} \int_{\Omega_i} w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (47)$$

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \int_{\Omega_i} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (48)$$

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \int_{\Omega_i} (p - p_i) w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (49)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \int_{\Omega_i} \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (50)$$

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \int_{\Omega_i} \frac{(p - p_i)(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (51)$$

ここで Ω_i は図 5 に示すような壁面による切除体積を表し、物体領域を Ω^{solid} で表すと次式で定義される。

$$\Omega_i = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega^{\text{solid}} \mid w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) \neq 0 \right\} \quad (52)$$

また, C_V は粒子の総和を体積積分に置換したことで現れるスケーリング係数で, 二次元では面積, 三次元では体積の次元をもつ. 具体的な求め方は 4.3 節で述べる.

物体領域中における速度と圧力の分布は, それぞれ境界条件を満たすように以下のように定義する.

$$\mathbf{u} = \frac{h+h'}{h}\mathbf{u}_{\text{wall}} - \frac{h'}{h}\mathbf{u}_i \quad (\mathbf{x} \in \Omega_i) \quad (53)$$

$$p = p_i + (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla p \Big|_{\text{wall}} \quad (\mathbf{x} \in \Omega_i) \quad (54)$$

ここで h と h' は, $\mathbf{r}_i$ と $\mathbf{x}$ を結ぶ線分と壁面との交点を $\mathbf{x}_{\text{wall}}$, 単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると次のように表される.

$$h = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{x}_{\text{wall}}) \quad (55)$$

$$h' = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_{\text{wall}} - \mathbf{x}) \quad (56)$$

つまり, 速度分布は壁面上で境界条件を満たすような線形外挿によって定義されている.

式 (53) と式 (54) を式 (48) ~ (51) に代入し, 境界条件ごとに積分領域を分割すると以下を得る.

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \left(\mathbf{u}_{\text{wall}}^k - \mathbf{u}_i \right) \int_{\Omega_i^k} \frac{-\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{h} w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (57)$$

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot \int_{\Omega_i^k} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (58)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \left(\mathbf{u}_{\text{wall}}^k - \mathbf{u}_i \right) \cdot \int_{\Omega_i^k} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{-\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{h} w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (59)$$

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot \int_{\Omega_i^k} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dV \quad (60)$$

式 (47) および式 (57) ~ (60) に含まれる体積積分は, 切除体積 Ω_i の形状のみによって決まる関数である. しかし, 体積積分を数値的に直接計算することは計算コストの点で現実的でない. そこで, 以下では数値的に安価に評価できるよう変形操作を施していく.

なお, 本研究では壁面上での圧力勾配に対して静水圧分布を仮定し,

$$\nabla p \Big|_{\text{wall}} = \rho \mathbf{g} \quad (61)$$

として計算を行う. 従って, 圧力ポアソン方程式は次のように離散化される.

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{new}} = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n \rangle_i^* - n^0}{n^0} + \alpha \frac{\rho}{\Delta t^2} p_i^{\text{new}} \quad (62)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \sum_{j \neq i} (p_j^{\text{new}} - p_i^{\text{new}}) w(|\mathbf{r}_j^* - \mathbf{r}_i^*|) - \alpha \frac{\rho}{\Delta t^2} p_i^{\text{new}} \quad (63)$$

$$= \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n \rangle_i^* - n^0}{n^0} - \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{\rho \mathbf{g}}{C_V} \cdot \int_{\Omega_i^*} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i^*) w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i^*|) dV$$

すなわち, 圧力のラプラシアンは壁面寄与はソース項に組み込まれる.

4.2 体積積分から面積分への変換

体積積分は発散定理を用いることにより面積分に変換することができる。いま、被積分関数を A とおき、次式を満たすようなベクトル関数 $\mathbf{W}$

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = A \quad (64)$$

を考えると,

$$\int_{\Omega} A \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial\Omega'} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (65)$$

が成立する。ここで、図 5 に示すように、 $\partial\Omega$ は Ω の境界でかつ物体表面に含まれる部分、 $\partial\Omega'$ は物体内部の部分である。また、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルである。ベクトル関数 $\mathbf{W}$ には任意性があるが、境界条件を与えることで一意に定まる。そこで境界条件として

$$\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega' \quad (66)$$

を用いれば、式 (65) は次式のように単純化できる。

$$\int_{\Omega} A \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (67)$$

具体的に、重み関数 w を被積分関数としたときの定式化を例として示す。ベクトル関数 $\mathbf{W}$ を位置ベクトル $\mathbf{x}$ とスカラー関数 f の積

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}f \quad (68)$$

とおき、式 (64) に代入すると、 f に関する偏微分方程式

$$mf + (\mathbf{x} \cdot \nabla) f = w \quad (69)$$

を得る (m は次元数を表す)。更に、 f を距離 $r = |\mathbf{x}|$ の関数とすれば、

$$mf + r \frac{df}{dr} = w \quad (70)$$

$$\Leftrightarrow f = f_m = \frac{1}{r^m} \int r^{m-1} w \, dr \quad (71)$$

となる。従って、重み関数 w の体積積分は次のように面積分に変換できる。

$$\int_{\Omega} w \, dV = \int_{\partial\Omega} f_m \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (72)$$

同様の操作により、他の被積分関数に対し以下の変換式を得る。

$$\int_{\Omega} \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{h} w \, dV = \int_{\partial\Omega} f_{m+1} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\because h = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \text{ at } \mathbf{x} \in \partial\Omega) \quad (73)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} w \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} f_{m+1} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (74)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{h} w dV = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} f_m \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (75)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} w dV = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} f_m \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (76)$$

従って、式 (72) ~ (76) の変換を式 (47) および式 (57) ~ (60) に適用することで、境界積分に基づく壁面寄与項の式を得る。

$$\langle n \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{1}{C_V} \int_{\partial\Omega_i} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS \quad (77)$$

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \left(\mathbf{u}_{\text{wall}}^k - \mathbf{u}_i \right) \int_{\partial\Omega_i^k} f_{m+1}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS \quad (78)$$

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot \int_{\partial\Omega_i^k} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) f_{m+1}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS \quad (79)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \left(\mathbf{u}_{\text{wall}}^k - \mathbf{u}_i \right) \cdot \int_{\partial\Omega_i^k} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS \quad (80)$$

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot \int_{\partial\Omega_i^k} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS \quad (81)$$

スカラー関数 f_a ($a \in [1, 2, 3, 4]$) は、

$$f_a = \frac{1}{r^a} \int r^{a-1} w dr \quad (82)$$

と、式 (66) を満たすような境界条件

$$f_a = 0 \text{ at } r = r_e \quad (83)$$

をもとに求めることができ、具体的には以下のようになる。

$$f_1(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) - 1 + \frac{r_e}{r} & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (84)$$

$$f_2(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - \frac{1}{2} - \frac{r_e^2}{2r^2} & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (85)$$

$$f_3(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{2r} - \frac{1}{3} - \frac{r_e^3}{6r^3} & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (86)$$

$$f_4(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{3r} - \frac{1}{4} - \frac{r_e^4}{12r^4} & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (87)$$

なお、本研究では重み関数として式 (11) を用いたが、異なる重み関数を採用する場合には f_a が変化することに注意されたい。

4.3 計算アルゴリズム

境界積分に基づく壁面寄与項の式 (77) ~ (81) の具体的な評価方法について説明する。

まず、スケーリング係数 C_V の求め方を示す。 C_V には任意性があり、 C_V の値を小さく設定するほど壁面寄与項が大きく、つまり流体に与える反発力等が大きくなる。これは壁粒子を用いた表現に例えると、壁粒子をより密に配置することに相当する。物体領域には流体領域と同等の数密度で壁粒子を配置するのが望ましく、 C_V の値の大きさにも同じことが言える。そこで、ある距離 h の平面に対して一様な境界粒子を配置したときの重み関数の総和、すなわち壁重み関数 $Z(h)$ を基準として考える。そして、同一の平面に対して境界積分に基づく式を適用して算出した壁重み関数が、 $Z(h)$ と一致するよう C_V を決定する。すなわち、

$$C_V = \frac{1}{Z(h)} \int_{\tilde{\Omega}(h)} w(|\mathbf{x}|) dV \quad (88)$$

$$\tilde{\Omega}(h) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid -\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \geq h \right\} \quad (89)$$

ここで、領域 $\tilde{\Omega}(h)$ での重み関数の体積積分は解析的に解くことができ、

$$\int_{\tilde{\Omega}(h)} w(|\mathbf{x}|) dV = \begin{cases} h\sqrt{r_e^2 - h^2} + 2r_e h \ln \left(\frac{h}{r_e + \sqrt{r_e^2 - h^2}} \right) + r_e^2 \arctan \left(\frac{\sqrt{r_e^2 - h^2}}{h} \right) & m = 2 \\ \frac{1}{3} \pi (r_e - h)^3 & m = 3 \end{cases} \quad (90)$$

である。距離 h の値には任意性があるが、ここでは境界粒子配置 (図 4(b) 参照) との整合性を考え、 $h = \ell_0/2$ として C_V を計算する。

つづいて、式 (77) ~ (81) に含まれる面積分の計算方法について示す。いま、壁面形状が二次元では線分の集合、三次元ではポリゴンの集合として表されている場合を考える。従って、面積分をこれら要素ごとに分離して考えれば、次のように変形できる。

$$\langle n \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{1}{C_V} \sum_k (-h_{ik}) \int_{P_k} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \quad (91)$$

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \left(\mathbf{u}_{\text{wall}}^k - \mathbf{u}_i \right) (-h_{ik}) \int_{P_k} f_{m+1}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \quad (92)$$

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{2m}{n^0 \lambda^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot (-h_{ik}) \int_{P_k} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) f_{m+1}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \quad (93)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \left(\mathbf{u}_{\text{wall}}^k - \mathbf{u}_i \right) \cdot (-h_{ik}) \int_{P_k} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \quad (94)$$

$$\langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot (-h_{ik}) \int_{P_k} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \quad (95)$$

ここで P は二次元では線分要素、三次元ではポリゴン要素を表す。また、 h_{ik} は粒子 i から要素 P_k への垂直距離を表し、 P_k の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}_k$ で示せば次式で記述できる。

$$h_{ik} = \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in P_k) \quad (96)$$

ここで $\mathbf{x}$ は要素 P_k 上の任意の点である。

式 (91) ~ (95) に得られた面積分は、ガウス求積を用いて数値的に評価する。二次元の場合には線積分を考

Fig. 6 Schematic illustration of the numerical integration scheme.

えればよく、一般的な一次元のガウス求積を用いて比較的容易に計算できる。しかし、単に線分要素上に積分点を配置すると近似誤差が大きくなるので、図 6(a) に示すように影響半径 r_e で定義される円周上に投影する。すなわち、ある関数 $g(\mathbf{x})$ の線積分を次のように変換し、

$$\int_P g(\mathbf{x}) d\ell = h \int_{\theta_0}^{\theta_1} (1 + \tan^2 \theta) g(-h\mathbf{n} + h \tan \theta \boldsymbol{\tau}) d\theta \quad (97)$$

区間 $[\theta_0, \theta_1]$ の円弧上で 5 点のガウス求積を適用する。ここで $\mathbf{n}$ は線分 P の単位法線ベクトル、 $\boldsymbol{\tau}$ は単位接線ベクトルを表す。一方、三次元の場合には、ポリゴン要素上で面積分を実施しなければならない。これは線積分を行うのに比べて複雑であるが、(ポリゴンを三角形に分割等した上で) 図 6(b) のように要素平面上に局所座標系 (ξ, η) を定義すれば、球面投影した面積分が次のように定義できる。

$$\begin{aligned} \int_P g(\mathbf{x}) dS &= \int_{\eta_0}^{\eta_1} \int_{\Gamma(\eta)} g(-h\mathbf{n} + \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta) d\xi d\eta \\ &= h \int_{\theta_0}^{\theta_1} (1 + \tan^2 \theta) G(h \tan \theta) d\theta \end{aligned} \quad (98)$$

$$\text{with } G(\eta) = \sqrt{h^2 + \eta^2} \int_{\phi_0}^{\phi_1} (1 + \tan^2 \phi) g(-h\mathbf{n} + \sqrt{h^2 + \eta^2} \tan \phi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta) d\phi \quad (99)$$

従って、 $\xi \cdot \eta$ 方向の積分はそれぞれ線積分として表されるから、二次元の場合と同様にガウス求積を用いて数値積分することができる。ただし、5 点のガウス求積を適用すると却って誤差が大きくなるので、積分区間 $([\phi_0, \phi_1]$ および $[\theta_0, \theta_1])$ を等しく 5 分割してそれぞれの区間で 1 点のガウス求積を適用した。

4.4 数値積分スキームの比較

平面による切除体積 $\tilde{\Omega}(h)$ に対して、境界積分に基づく式 (91) を適用した場合と、壁粒子を配置した場合での粒子数密度における壁面寄与項の値の比較を行った。なお、影響半径は $r_e = 3.1\ell_0$ とした。二次元での結果を図 7(a) に、三次元での結果を図 7(b) に示す。数値積分スキームの比較として、式 (90) の解析解を用いた場合と、積分点を (影響半径の円周上・球面上に投影せず) 要素上に直接配置した場合 (unoptimized) の結果をプロットした。積分点の投影を用いた数値積分スキーム (optimized) は、概して壁粒子を用いた結果ならびに積分の解析解とよく一致した。一方、投影を用いない場合には壁面距離が小さくなるほど数値積分誤差が大きくなった。

つづいて、壁面のコーナーに対する計算結果を図 8 に示す。比較として、原田ら (2008) の壁重み関数 Z をプロットした。平面の場合と同様、二次元、三次元共に、投影を用いた数値積分スキームでの計算結果は、壁粒子を用

Fig. 7 Comparison of the wall contribution term in particle number density for flat wall. By adopting the optimized scheme, the boundary integral can be numerically evaluated with high accuracy. Moreover, the calculated wall contribution agrees with the wall particle representation.

Fig. 8 Comparison of the wall contribution term in particle number density for wall corner. The optimized integration scheme shows good agreement with the wall particle representation. On the other hand, the conventional wall weight function considerably underestimates the wall contribution at a concave corner.

いた場合に良く一致しており、投影を用いない場合には誤差が大きい。また、壁重み関数は壁面のコーナーで壁面寄与項を過小評価することがわかる。これは平面を仮定していることが原因であり、壁面が凸形状ならば逆に過大評価を引き起こす。

なお、三次元における数値積分は二次元と比べて誤差が大きく、そのために壁面寄与がやや過大に評価されている。数値積分に用いる積分点数を増やせば、誤差をより小さくすることができるが、計算負荷の問題がある。現在の求積法では三角形ポリゴン一つあたり積分点を既に 25 点使用して計算を行っており、これ以上積分点数を増やすことは望ましくない。また、図 7 および図 8 の結果からわかるように、積分誤差は最大でも 5% 程度であり、流れのシミュレーションに顕著な影響を与えることは少ないと考えられる。そのため、本研究では前述の数値積分スキームを採用するが、より高精度・低コストな計算法については今後の課題としたい。

4.5 圧力勾配スキームの修正

式 (81) に得られた圧力勾配の壁面寄与項は、圧力勾配スキームとして式 (16) を採用した場合のものである。しかし、2.3 節で述べたように、自由表面を含む流れでは数値的に不安定になりやすいため、式 (17) あるいは式 (20) が一般に用いられる。離散化スキームを変更する場合には壁面寄与項もそれに合わせる必要があるが、4.1 節ならびに 4.2 節で示したように、離散方程式における粒子の総和を体積積分に置き換え、発散定理を用いて式変形すれば境界積分形式の壁面寄与項が定式化できる。式 (17) を採用した場合の壁面寄与項を具体的に記せば、

$$\begin{aligned} \langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = & \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot (-h_{ik}) \int_{P_k} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \\ & + \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} (p_i - \hat{p}_i) \sum_k (-h_{ik}) \int_{P_k} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_{m-1}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \end{aligned} \quad (100)$$

式 (20) の場合は、

$$\begin{aligned} \langle \nabla p \rangle_i^{\text{wall}} = & \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} \sum_k \nabla p \Big|_{\text{wall}}^k \cdot (-h_{ik}) \int_{P_k} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_m(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \\ & + \frac{m}{n^0} \frac{1}{C_V} (2p_i) \sum_k (-h_{ik}) \int_{P_k} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^2} f_{m-1}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|) dS \end{aligned} \quad (101)$$

となる。

なお、本研究では壁面上での圧力勾配に対して、静水圧分布を仮定した式 (61) を採用している。従って、粒子が大きな速度をもって壁面に衝突した場合、壁面から十分な反発力が与えられず貫通を起こすことがある。そこで、粒子貫通を防ぐための数値安定化項として、原田ら (2008) の壁面距離に基づく式 (45) を加えて考慮する。ただし、粒子が壁面に過剰接近した場合のみ補正が働くよう、壁面距離のしきい値は $H = 0.2\ell_0$ とする。

5. 数値計算結果

提案手法の妥当性・有用性を確認するため、二次元および三次元の複数の問題を対象に数値計算を実施した。その結果を以下に示す。

5.1 平面ポアズイユ流れ

図 9(a) に示す平行平板間の二次元の流れ（平面ポアズイユ流れ）を MPS 法を用いて計算した。流路の上下の境界を滑りなしの壁面、左右端を周期境界とし、 x 軸方向に体積力 $\mathbf{g}$ を与えることにより流れを駆動させる。なお、初期状態において流体は静止しているものとした。流体の物性値は密度 $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ 、動粘性係数 $\nu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ とし、体積力の大きさは $g = 1 \text{ m/s}^2$ とした。流体領域には 5120 (160×32) の粒子を等間隔に配置し、時間ステップ幅は 10^{-4} s で一定とした。また、比較として壁粒子を用いた表現ならびに距離関数を用いたポリゴン壁境界表現を適用した場合の計算も行った。なお、本問題では自由表面が発生しないため、圧力勾配スキームには式 (16) を使用した。

数値解析から得られた速度分布の時間発展を図 9(b) に示す。ここで、縦軸 u^* は $\sqrt{gL}$ (L は流路高さ) で無次元化された x 方向速度で、 t^* は L^2/ν で無次元化された時刻を表す。計算結果を解析解 (Morris et al., 1997) と比較したところ、提案手法は解析解と良い一致を示すのに対し、従来手法では共に速度が過大に評価されている。これは、速度のラプラシアン壁面寄与項 $\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle^{\text{wall}}$ の算出方法の違いによるものである。従来手法では物体内部の速度を一定として扱うため、壁面せん断応力が過小評価されて壁面上で滑りが起こる。一方、提案手法では線形外挿によって速度分布を決定しており、壁面位置で $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ の境界条件を満たすため精度が高い。

(a) Problem configuration

(b) Calculated velocity profiles

(a) Problem configuration

(b) Calculated velocity profiles

Fig. 9 Simulation of the plane Poiseuille flow. The present representation shows good agreement with the analytical solution for the velocity profile development. On the other hand, the conventional approaches give significant calculation error due to inaccurate estimation of wall shear stress.

Fig. 10 Simulation of the laminar flow in a square channel. Compared to the conventional representations, the present representation shows better agreement with FVM and thus higher accuracy. Particularly, the distance function based representation gives significant error near the wall corner.

5.2 正方形管内流れ

図 10(a) に示す正方形管内の三次元の流れを対象に数値解析を行った。計算条件については、平面ポアズイユ流れの問題と同様である。流体粒子の数は 163840 ($160 \times 32 \times 32$) とした。本問題に対しては、定常解のみ解析解が得られる (Kundu et al., 2011)。そこで、時間発展の参照値として有限体積法 (FVM) による計算結果を用いる。FVM の計算格子は $320 \times 64 \times 64$ の等間隔構造格子とし、時間ステップ幅は $2.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ で一定として計算を行った。

解析結果を図 10(b) に示す。提案手法は FVM での結果と良く一致するが、平面ポアズイユ流れでの解析同様、従来手法では速度が過大評価されている。特に、距離関数を用いたポリゴン壁境界表現では、壁面のコーナー近傍で壁面寄与項が過小に評価されるため、計算の初期では逆流が起こるなど顕著な計算誤差が見られた。

5.3 二次元静水圧問題

丸底容器における二次元の静水圧問題の解析を行った。容器の幅は 0.1 m、底面は半径 0.05 m の半円形状とし、鉛直下向きに体積力 $\mathbf{g}$ を与える。なお、壁面形状は 18 の線分で表現されている。流体の物性値は密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、動粘性係数 $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ とし、体積力の大きさは $g = 10 \text{ m/s}^2$ とした。流体体積は 0.015 m^3 、流体粒子数は 1536 とした。また、数値自然対流の発生を小さく抑えるため、圧力勾配スキームには式 (20) を適用した。ただし、距離関数を用いた表現では式 (20) を適用して安定に計算が実行できなかったため代わりに式 (17) を使用した。

計算によって得られた瞬時圧力分布の典型例を図 11 に示す。ここで、比較として壁粒子を用いた表現ならびに距離関数を用いた表現での結果を並べて表示する。距離関数を用いた表現では壁面近傍で不自然な粒子の凝集の

Fig. 11 Simulation of the hydrostatic pressure problem in 2D vessel with round bottom. The wall particle representation and the present representation show overall fair results. However, the distance function based representation gives unnatural particle clustering and pressure increase near wall.

発生と異常な圧力上昇が見られる。更に、気液界面付近では壁面に沿って粒子が突出している。一方、提案手法では均一な粒子分布が得られ、圧力分布ならびに界面位置についても壁粒子を用いた結果とおおよそ定量的に一致していることがわかる。また、理論静水圧との誤差のRMS値は約11Paであり、理論値との一致も良好である。物理時間あたりに要する計算時間を比較すると、最も高速なのは壁粒子を用いた表現であった。これに対し、距離関数を用いた表現は約1.08倍、提案手法は約1.25倍の計算時間がかかった。

5.4 三次元静水圧問題

図12(a)に示す容器における三次元の静水圧問題の解析を行った。壁面形状は36のポリゴンで表現されている。計算条件については二次元の場合と同様である。ただし、流体体積は 0.0015 m^3 で、使用した流体粒子数は49152である。計算結果の瞬時圧力分布の例を図12(b)(c)に示す。距離関数を用いた表現では、壁面のコーナー付近で顕著な圧力振動が見られた。これは壁面寄与項の過小評価が原因である。一方、提案手法では滑らかな圧力分布が得られた。計算時間を比較したところ、距離関数を用いた表現の方が高速であった。同一の物理時間を解析するのに、提案手法は約1.91倍の計算時間を要した。

5.5 二次元ダム崩壊問題

図13に示す二次元のダム崩壊問題の計算を行った。流体の物性値は密度 $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$ 、動粘性係数 $\nu = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ とし、重力加速度は $g = 9.8\text{ m/s}^2$ とした。水柱は初期時刻で静止しているものとし、2048 (32×64)の流体粒子を等間隔に配置した。圧力勾配スキームには式(17)を使用した。

計算結果を図14に示す。距離関数を用いた表現では壁面に粒子が付着する不自然な挙動が見られた。更に、付着粒子の凝集によって著しい圧力増大が起こり、内部粒子との間に空隙が発生している。一方で、提案手法では不自然な挙動は確認されなかった。また、壁粒子を用いた表現と比較して、圧力分布の大まかな傾向が一致している。加えて、壁粒子の表面粗さに起因する圧力振動もなく、壁面付近においても滑らかな圧力分布が得られた。

提案手法を用いた場合における流体が右壁に衝突する時刻前後での圧力分布を図14に示す。流体の先端に位置する粒子が大きな速度をもって壁面に衝突しているが、壁貫通を起こすことなく安定に計算が行えている。これ

Fig. 12 Simulation of the hydrostatic pressure problem in 3D vessel. The distance function based representation gives significant pressure oscillation near wall corner. The present representation shows smooth and stable pressure distribution.

Fig. 13 Configuration of the 2D dam break problem.

は、4.5 節で説明したように、圧力勾配スキームに距離関数に基づく数値安定化項を考慮していることによる効果である。更に、壁面距離のしきい値として十分小さな値 ($H = 0.2\ell_0$) を設定したことで、不自然な圧力分布の発生が回避されている。

6. 結 言

本研究では、MPS 法において壁境界を考慮するための新しい計算アプローチとして、境界積分を用いたポリゴン境界表現を提案した。本手法では壁面からの寄与を体積積分として記述することで、任意の離散化スキームに対して、形状を忠実に考慮する壁面寄与項を定式化することができる。そのため、従来のポリゴン境界表現と比べ、複雑形状への適用性はそのままに、計算精度が大きく改善される。加えて、物体内部の物理量分布を一定とせず線形外挿によって与えるため、境界条件を精度良く満足する。ただし、体積積分を数値的に直接計算する

Fig. 14 Snapshots of the dam break problem simulated with the wall particle representation (upper), the distance function based representation (middle) and the present representation (lower). The distance function based representation gives unnatural particle behaviors. The present representation shows overall good agreement with the wall particle representation, and moreover, smoother pressure distribution is obtained near wall as there is no surface roughness due to particle representation.

Fig. 15 Pressure and velocity distributions around impact time calculated with the present representation. While a particle with high velocity in magnitude collides with the right wall, penetration is successfully avoided due to modification of the pressure gradient scheme.

ことは計算コストの点で現実的でないため、発散定理に基づき変形操作を施して、数値的に安価に評価可能な境界積分形式の壁面寄与項を定式化した。

数値検証のため、二次元および三次元の複数の問題を対象に提案手法を適用して流れの計算を行った。平面ポアズイユ流れならびに正方形管内流れを解析した結果、速度分布の時間発展が解析解や有限体積法の計算結果と良く一致し、主として速度のディリクレ境界条件とラプラシアン取り扱いの妥当性が示された。つづいて、丸底

容器における静水圧問題を二次元および三次元で計算した。二次元では壁粒子を用いた表現での計算結果や理論静水圧との良い一致を示した。三次元では顕著な圧力振動も見られず滑らかな圧力分布が得られ、距離関数を用いた表現と比較して計算精度が大きく改善された。ただし、従来手法に比べてより大きな計算時間を要した。二次元のダム崩壊問題では、壁粒子を用いた表現と比較して圧力分布の大きな傾向が一致した。加えて、壁粒子の表面粗さに起因する圧力振動が発生しないため、壁面付近においてより滑らかな圧力分布が得られた。

以上のことから、提案手法は MPS 法における有用なポリゴン壁境界表現であると結論付けられる。同時に、計算コストの問題が明らかとなった。従来手法に比べて計算時間がかかるのは数値積分の計算にコストを要しているためである。従って、境界積分のより低コストな評価方法を見つけることが今後の課題である。

文 献

- Asai, M., Aly, A.M., Sonoda, Y. and Sakai, Y., A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, *Journal of Applied Mathematics*, Vol.2012 (2012), Article ID 139583.
- Chen, X., Xi, G. and Sun, Z.-G., Improving stability of MPS method by a computational scheme based on conceptual particles, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.278 (2014), pp.254–271.
- Cummins, S.J. and Rudman, M., An SPH projection method, *Journal of Computational Physics*, Vol.152 (1999), pp.584–607.
- Duan, G., Chen, B., Zhang, X. and Wang, Y., A multiphase MPS solver for modeling multi-fluid interaction with free surface and its application in oil spill, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.320 (2017), pp.133–161.
- Feldman, J. and Bonet, J., Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.72 (2007), pp.295–324.
- Ferrand, M., Laurence, D.R., Rogers, B.D., Violeau, D. and Kassiotis, C., Unified semi-analytical wall boundary conditions for inviscid, laminar or turbulent flows in the meshless SPH method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.71 (2013), pp.446–472.
- 福澤洋平, 富山秀樹, 柴田和也, 越塚誠一, MPS 法による高粘性非ニュートン流体の流動解析, 日本計算工学会論文集, Paper No. 20140007 (2014).
- 原田隆宏, 越塚誠一, 島崎克教, MPS 法における壁境界計算モデルの改良, 日本計算工学会論文集, Paper No. 20080006 (2008).
- 服部豪, 日合大輔, 赤池茂, 越塚誠一, MPS 法におけるポリゴン壁面上での濡れ計算モデルの改良, 日本機械学会論文集, Vol.82, No.835 (2016), DOI:10.1299/transjsme.15-00602.
- Hu, F., Matsunaga, T., Tamai, T. and Koshizuka, S., An ALE particle method using upwind interpolation, *Computers & Fluids*, Vol.145 (2017), pp.21–36.
- Ikeda, H., Koshizuka, S., Oka, Y., Park, H.S. and Sugimoto, J., Numerical analysis of jet injection behavior for fuel-coolant interaction using particle method, *Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol.38, No.3 (2001), pp.174–182.
- 近藤雅裕, 越塚誠一, 滝本正人, MPS 法における粒子間ポテンシャル力を用いた表面張力モデル, 日本計算工学会論文集, Paper No. 20070021 (2007).
- Koshizuka, S., Nobe, A. and Oka, Y., Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.26 (1998), pp.751–769.
- Koshizuka, S. and Oka, Y., Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123 (1996), pp.421–434.
- Kulasegaram, S., Bonet, J., Lewis, R.W. and Profit, M., A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications, *Computational Mechanics*, Vol.33 (2004), pp.316–325.
- Kundu, B., Simlandi, S. and Das, P.K., Analytical techniques for analysis of fully developed laminar flow through rectangular channels, *Heat and Mass Transfer*, Vol.47 (2011), pp.1289–1299.
- Marrone, S., Antuono, M., Colagrossi, A., Colicchio, G., Le Touz, D. and Graziani, G., δ -SPH model for simulating violent impact flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.200 (2011), pp.1526–1542.

- Marrone, S., Colagrossi, A., Le Touzé, D. and Graziani, G., Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers, *Journal of Computational Physics*, Vol.229, No.10 (2010), pp.3652–3663.
- 松永拓也, 柴田和也, 室谷浩平, 越塚誠一, ミラー粒子境界表現を用いた MPS 法による流体シミュレーション, 日本計算工学会論文集, Paper No. 20160002 (2016).
- 松永拓也, 柴田和也, 越塚誠一, MPS 法での壁境界表現における境界積分を用いた計算アプローチ, 計算力学講演会論文集, Vol.30 (2017), p.139.
- Mitsume, N., Yoshimura, S., Murotani, K. and Yamada, T., MPS-FEM partitioned coupling approach for fluid-structure interaction with free surface flow, *International Journal of Computational Methods*, Vol.11, No.4 (2014), pp.1350101.
- Mitsume, N., Yoshimura, S., Murotani, K. and Yamada, T., Explicitly represented polygon wall boundary model for the explicit MPS method, *Computational Particle Mechanics*, Vol.2, No.1 (2015), pp.73–89.
- Morris, J.P., Fox, P.J. and Zhu, Y., Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *Journal of Computational Physics*, Vol.136, No.1 (1997), pp.214–226.
- 関根章裕, 越塚誠一, 吉村一樹, 石井英二, Moving Particle Semi-implicit 法によるノズル内キャビテーションと液体噴流のシミュレーション, 混相流, Vol.31, No.4 (2017), pp.427–436.
- Tamai, T. and Koshizuka, S., Least squares moving particle semi-implicit method, *Computational Particle Mechanics*, Vol.1, No.3 (2014), pp.277–305.
- Tanaka, M., Cardoso, R. and Bahai, H., Multi-resolution MPS method, *Journal of Computational Physics*, Vol.359 (2018), pp.106–136.
- Tanaka, M. and Masunaga, T., Stabilization and smoothing of pressure in MPS method by Quasi-Compressibility, *Journal of Computational Physics*, Vol.229, No.11 (2010), pp.4279–4290.
- Toyota, E., Akimoto, H. and Kubo, S., A particle method with variable spatial resolution for incompressible flows, *Proceedings of the 19th Japan Society of Fluid Mechanics*, Vol.9 (2005), p.2.
- Zhang, T.G., Koshizuka, S., Shibata, K., Murotani, K. and Ishii, E., Improved wall weight function with polygon boundary in moving particle semi-implicit method, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20150012 (2015).

References

- Asai, M., Aly, A.M., Sonoda, Y. and Sakai, Y., A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, *Journal of Applied Mathematics*, Vol.2012 (2012), Article ID 139583.
- Chen, X., Xi, G. and Sun, Z.-G., Improving stability of MPS method by a computational scheme based on conceptual particles, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.278 (2014), pp.254–271.
- Cummins, S.J. and Rudman, M., An SPH projection method, *Journal of Computational Physics*, Vol.152 (1999), pp.584–607.
- Duan, G., Chen, B., Zhang, X. and Wang, Y., A multiphase MPS solver for modeling multi-fluid interaction with free surface and its application in oil spill, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.320 (2017), pp.133–161.
- Feldman, J. and Bonet, J., Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.72 (2007), pp.295–324.
- Ferrand, M., Laurence, D.R., Rogers, B.D., Violeau, D. and Kassiotis, C., Unified semi-analytical wall boundary conditions for inviscid, laminar or turbulent flows in the meshless SPH method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.71 (2013), pp.446–472.
- Fukuzawa, Y., Tomiyama, H., Shibata, K. and Koshizuka, S., Numerical analysis of high viscous non-Newtonian fluid flow using the MPS method, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20140007 (2014) (in Japanese).
- Harada, T., Koshizuka, S. and Shimazaki, K., Improvement of wall boundary condition model for MPS method, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20080006 (2008) (in Japanese).
- Hattori, T., Hiai, D., Akaike, S. and Koshizuka, S., Improvement of wetting calculation model on polygon wall in the MPS method, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol.82, No.835 (2016), DOI:10.1299/transjsme.15-00602.

- Hu, F., Matsunaga, T., Tamai, T. and Koshizuka, S., An ALE particle method using upwind interpolation, *Computers & Fluids*, Vol.145 (2017), pp.21–36.
- Ikeda, H., Koshizuka, S., Oka, Y., Park, H.S. and Sugimoto, J., Numerical analysis of jet injection behavior for fuel-coolant interaction using particle method, *Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol.38, No.3 (2001), pp.174–182.
- Kondo, M., Koshizuka, S. and Takimoto, M., Surface tension model using inter-particle potential force in moving particle semi-implicit method, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20070021 (2007) (in Japanese).
- Koshizuka, S., Nobe, A. and Oka, Y., Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.26 (1998), pp.751–769.
- Koshizuka, S. and Oka, Y., Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123 (1996), pp.421–434.
- Kulasegaram, S., Bonet, J., Lewis, R.W. and Profit, M., A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications, *Computational Mechanics*, Vol.33 (2004), pp.316–325.
- Kundu, B., Simlandi, S. and Das, P.K., Analytical techniques for analysis of fully developed laminar flow through rectangular channels, *Heat and Mass Transfer*, Vol.47 (2011), pp.1289–1299.
- Marrone, S., Antuono, M., Colagrossi, A., Colicchio, G., Le Touzé, D. and Graziani, G., δ -SPH model for simulating violent impact flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.200 (2011), pp.1526–1542.
- Marrone, S., Colagrossi, A., Le Touzé, D. and Graziani, G., Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers, *Journal of Computational Physics*, Vol.229, No.10 (2010), pp.3652–3663.
- Matsunaga, T., Shibata, K., Murotani, K. and Koshizuka, S., Fluid flow simulation using MPS method with mirror particle boundary representation, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20160002 (2016) (in Japanese).
- Matsunaga, T., Shibata, K. and Koshizuka, S., Boundary integral based approach for the wall representation in MPS method, *Proceedings of the JSME Computational Mechanics Division Conference*, Vol.30 (2017), p.139 (in Japanese).
- Mitsume, N., Yoshimura, S., Murotani, K. and Yamada, T., MPS-FEM partitioned coupling approach for fluid-structure interaction with free surface flow, *International Journal of Computational Methods*, Vol.11, No.4 (2014), pp.1350101.
- Mitsume, N., Yoshimura, S., Murotani, K. and Yamada, T., Explicitly represented polygon wall boundary model for the explicit MPS method, *Computational Particle Mechanics*, Vol.2, No.1 (2015), pp.73–89.
- Morris, J.P., Fox, P.J. and Zhu, Y., Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *Journal of Computational Physics*, Vol.136, No.1 (1997), pp.214–226.
- Sekine, A., Koshizuka, S., Yoshimura, K. and Ishii, E., Numerical simulation of cavitation in a nozzle and liquid jet using moving particle semi-implicit method, *Japanese Journal of Multiphase Flow*, Vol.31, No.4 (2017), pp.427–436 (in Japanese).
- Tamai, T. and Koshizuka, S., Least squares moving particle semi-implicit method, *Computational Particle Mechanics*, Vol.1, No.3 (2014), pp.277–305.
- Tanaka, M., Cardoso, R. and Bahai, H., Multi-resolution MPS method, *Journal of Computational Physics*, Vol.359 (2018), pp.106–136.
- Tanaka, M. and Masunaga, T., Stabilization and smoothing of pressure in MPS method by Quasi-Compressibility, *Journal of Computational Physics*, Vol.229, No.11 (2010), pp.4279–4290.
- Toyota, E., Akimoto, H. and Kubo, S., A particle method with variable spatial resolution for incompressible flows, *Proceedings of the 19th Japan Society of Fluid Mechanics*, Vol.9 (2005), p.2.
- Zhang, T.G., Koshizuka, S., Shibata, K., Murotani, K. and Ishii, E., Improved wall weight function with polygon boundary in moving particle semi-implicit method, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20150012 (2015).