3次元線形弾性体の時間応答特性のコントロールを目的とする形状最適化手法

若狭 守^{*1}, 下田 昌利^{*2}Free-form optimization method for controlling time-dependent response
of 3D linear elastic structureMamoru WAKASA^{*1} and Masatoshi SHIMODA^{*2}^{*1} Graduate School of Advanced Science and Technology, Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tempaku-ku, Nagoya 468-8511, Japan^{*2} Department of Advanced Science and Technology, Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tempaku-ku, Nagoya 468-8511, Japan

Received: 9 January 2019; Revised: 15 February 2019; Accepted: 12 March 2019

Abstract

In this paper, a parameter-free optimization method is proposed for controlling the time-dependent response of a three-dimensional linear elastic structure, where the optimal shape is determined without design parameterization. The design objective is to minimize the vibration displacements or to control the vibration displacement at arbitrary domains and times for an arbitrary time-dependent loading under the volume constraint. The unsteady time-dependent optimum design problems are formulated as distributed-parameter optimization problems and the sensitivity functions with respect to the design velocity field are derived based on the variational method, Lagrange multiplier method and the adjoint method. The derived sensitivity function is applied to the H^1 gradient method, a gradient method in the function space to determine the optimal shape variation. With the proposed method, the optimal shape for time-dependent response problems such as a forced-vibration, a free-vibration or a transient response is obtained while minimizing the objective functional and maintaining the smooth surface of a structure. Several numerical design examples including a continuous dynamic force or an impulse force as an input force are shown to confirm the effectiveness of the proposed method, and the results are discussed.

Keywords : Shape optimization, Time-dependent, Impulse force, Forced vibration, Transient response, H^1 gradient method, Parameter-free optimization

1. 緒 言

機械の構造設計では力学特性と軽量化の両立が求められる。特に、輸送機器や建設機械、工作機械、ロボットアーム等運動を伴う機械では振動特性が重要とされ、設計目的に応じて所望の固有振動特性、周波数応答特性、もしくは時間応答特性の実現が求められる。固有振動問題と周波数応答問題は調和振動の仮定により時間軸を無視して簡単化されるが、時間応答問題は非定常問題として時間軸を考慮した扱いが必要である。位置決めが求められる設計での残留振動問題は時間応答問題の一例である。時間応答問題は地震応答や衝撃応答、あるいは強制振動や自由振動、残留振動、減衰振動や非減衰振動等、運動方程式で表されるあらゆる振動現象を直接的に扱うことができるため、その最適設計問題の解法は非常に重要である。著者らは既報（若狭，下田，2018）にてシェル構造を対象に、板厚分布を設計変数とした時間応答最適化問題の解法を示した。本論文ではそれを基に、適用

No.19-00011 [DOI:10.1299/transjsme.19-00011], J-STAGE Advance Publication date : 20 March, 2019

^{*1} 学生員，豊田工業大学大学院（〒468-8511 愛知県名古屋市中白区久方 2-12-1）^{*2} 正員，豊田工業大学

E-mail of corresponding author: shimoda@toyota-ti.ac.jp

範囲の広い 3 次元線形弾性体を対象に、時間応答特性のコントロールを目的とする形状最適化問題の解法を提示することを目的とする。

前述の“直接的に運動方程式を扱うことができる”ことは時間応答問題の長所である反面、最適化手法を適用する場合、感度関数の計算が煩雑となると同時に、計算コストが非常に大きくなる短所でもある。そのため、その重要性や有効性に関わらず、時間応答問題に関する最適化手法の提案は限られ、数少ない提案も感度解析やパラメトリック最適化手法が大半である。例えば、Choi ら (2005) は随伴変数による過渡応答問題に対する感度解析手法を示している。鈴木ら (1994) は随伴変数法を用いた感度解析を行う事により、過渡応答のような支配方程式に時間積分を含む最適設計問題に対して、効率的に感度解析を行い、感度関数を導出する方法を示している。Yun ら (2017) はマクスウェルモデルを用い、一般的な非粘性減衰系に関する感度解析手法を示している。一方、計算の煩雑さを回避する手法として、Park (2011) は連続時間に対する動的応答を離散化された線形な静的応答に変換する Equivalent static loads method (以下 ESLM とする) を提案し、線形及び非線形の動的問題の最適化に適用し、その効率性と有効性を示している。Kang ら (2006) は過渡的に変化する荷重が構造体に加わる場合の感度関数を直接法と随伴法を用いて計算しており、その近似方法として ESLM を利用している。Kim ら (2010) も同様に、非線形動的問題に対してこの手法を適用した形状最適化手法を提案している。ESLM を用いない手法として、時間積分が必要となる過渡応答問題を、リアプノフ方程式を用いることにより、過渡応答解析の初期条件のみを利用して解析を行う手法が提案されている (Wang, 1984)。Yan ら (2018) は、本手法を用いて加振後の残留振動の抑制を目的とした最適化手法の提案を行っている。彼らは、非拘束あるいは部分的非拘束問題に対して新たなアプローチを提案しており、1~3 次元の構造体に対して適用可能な最適化手法の提案を行っている。こうした先行研究において、設計変数の表現にパラメータ化を必要としないノンパラメトリック手法と形状最適化手法を組み合わせた手法に関しての先行研究はほとんど見られない。一般的に、ノンパラメトリック最適化問題の解法には、最適性基準に基づく漸化式が用いられることが多いが、最適性の保証と収束の悪さの問題が潜在する。

一方、著者らはこれまで、設計変数のパラメータ化が不要で、形状変動 (ベクトル設計変数) を自由で滑らかな関数として求めながら目的関数を減少させる分布系のフリーフォーム最適化手法を提示してきた (下田他, 1994) (下田, 2013)。この手法は (1) 随伴変数法による形状勾配関数の理論的導出、(2) 形状勾配関数の数値計算、(3) H^1 勾配法に基づいたベクトル設計変数の決定と更新の 3 つの主プロセスからなり、大規模な設計問題に対して効果的で効率的な解法である。著者らこの手法を、シェル構造体の板厚分布 (スカラー設計変数) を設計変数とする時間応答問題にこれまで発展させており (若狭, 下田, 2018)、本研究ではこの手法の特徴を踏襲しながら、この解法を 3 次元線形弾性体の設計速度場 (ベクトル変数) を設計変数とする時間応答問題に利用する。最適化問題として、任意の動的荷重 (連続振動入力や衝撃入力) に対して、任意の領域及び時間での振動変位最小化問題、またはある目標値への振動変位制御問題、及び振動変位最小化の特殊な場合である動的コンプライアンス最小化問題を扱う。時間領域を扱った問題として、非定常伝熱問題の形状最適化問題の解法が片峯らによって示されており (片峯他, 2000)、各問題の定式化の際に参考にした。各問題を分布系の形状最適化問題として定式化し、形状勾配関数 (感度関数) と最適性条件をラグランジュ乗数法と物質導関数法、及び随伴変数法を適用することにより、理論的に導出する。本手法は分布系 (又は関数空間) の勾配法であるため、複雑で大規模な 3 次元線形弾性体の効率的な形状決定が可能である。続く章にて、3 次元線形弾性体の支配方程式、問題の定式化、形状勾配関数の導出、 H^1 勾配法、及び連続振動入力と衝撃入力を与えた場合の数値計算例を示す。

2. 時間応答問題の支配方程式

図 1 のような、全体領域 Ω 、境界 $\Gamma (= \partial\Omega)$ に対して、時間 t に依存する一般化外力 $\mathbf{P}(t)$ が作用する場合の 3 次元線形弾性体の時間応答問題について考える。3 次元線形弾性体に生じる変位は $\mathbf{u}(t) = \{u_i\}_{i=1,2,3}, t \in [0, t_T]$ で表され、時間応答問題を解くための状態方程式 (もしくは運動方程式) の強形式は式 (1) のような形で表され、適切な境界条件と初期条件 (ここでは静止初期状態を仮定) の下で解かれる。

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_{,tt} + \mathbf{C}\mathbf{u}_{,t} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t), \quad \text{Initial conditions: } \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{u}_{,t}(0) = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ は質量マトリクス、 $\mathbf{C}$ は減衰マトリクス、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリクスを表す。また、減衰マトリクス $\mathbf{C}$ は、粘性減衰、及びレーリー減衰によって式(2)のように表現される。 ζ は粘性減衰係数、 α 及び β はそれぞれ剛性マトリクス及び質量マトリクスに掛け合わされるパラメータを表し、対象物の減衰特性に合うように選択的に設定され、 $\mathbf{I}$ は単位マトリクスを表す。 $(\cdot)_{,t}, (\cdot)_{,tt}$ はそれぞれ時間に関する1階と2階の導関数を表す。ディリクレ境界を Γ_u を表し、一般化力の具体的な時間依存外力として、境界 Γ_p には単位面積当たりの荷重として、 $\mathbf{P}(t) = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1,2,3}$ が作用するものとする、式(1)の弱形式は式(3)のように表される。

$$\mathbf{C} = \zeta \mathbf{I} + \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (2)$$

$$\int_0^{t_T} \{a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})\} dt = \int_0^{t_T} l(\bar{\mathbf{u}}) dt, \quad \mathbf{u}(t) \in U, \forall \bar{\mathbf{u}}(t) \in \bar{U}, \quad (3)$$

$$U = \{\mathbf{u}(t) \in H^1(\Omega \times [0, t_T]) \mid \text{satisfying the given Dirichlet condition in } (\mathbf{u} \in \Gamma_u, t \in [0, t_T])\} \\ \text{and the initial condition } \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{,t}(0) = \mathbf{0} \} \quad (4)$$

$$\bar{U} = \{\bar{\mathbf{u}}(t) \in H^1(\Omega \times [0, t_T]) \mid \bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \text{ in } (\mathbf{u} \in \Gamma_u, t \in [0, t_T]), \bar{\mathbf{u}}(t_T) = \mathbf{0}\} \quad (5)$$

ここで、 $(\cdot)$ は変分、 t_T は終端時刻を表す。 $H^m(\Omega \times [0, t_T])$ は m 階の導関数まで領域 $\Omega \times$ 時間 $[0, t_T]$ において2乗可積分な関数空間を表す(m 階のソボレフ空間)。剛性に関する双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ 、外力に関する一次形式 $l(\cdot)$ 、慣性力に関する双一次形式 $d(\cdot, \cdot)$ 、及び減衰力に関する双一次形式 $c(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ次のように表される。

$$a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,i} \bar{u}_{l,j} d\Omega \quad (6)$$

$$l(\bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Gamma_p} P_i \bar{u}_i d\Gamma \quad (7)$$

$$d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = - \int_{\Omega} \rho u_{i,t} \bar{u}_{i,t} d\Omega \quad (8)$$

$$c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} (\zeta u_{i,t} \bar{u}_i + \alpha C_{ijkl} u_{(k,l),t} \bar{u}_{i,j} + \beta \rho u_{i,t} \bar{u}_i) d\Omega \quad (9)$$

ここで、 C_{ijkl} は弾性テンソル、 ρ は質量密度を表す。なお、本論文のテンソル表示では Einstein の総和規約と偏微分表記 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot) / \partial x_i$ を使用する。

Fig. 1 Geometry of a three-dimensional linear elastic body, which has an initial global domain Ω and its boundary $\Gamma = \partial\Omega$. The notation Γ_u are the Dirichlet boundary and Γ_p is the boundary the time-dependent force $\mathbf{P}(t)$ is applied.

3. 時間応答問題の定式化と形状勾配関数の導出

時間応答問題として振動変位最小化問題, 振動変位の目標値への制御問題, 及び振動変位最小化問題と特殊な場合である動的コンプライアンス最小化問題を取り上げ, 分布系の形状最適化問題として定式化し, 各問題に対する形状勾配関数をラグランジュ乗数法と物質導関数法, 及び随伴変数法に基づき導出する.

3・1 振動変位最小化問題

3次元線形弾性体に対して, 時間依存する外力が働く場合に, 任意の変位規定領域 A_D での時間 $[0, t_r]$ における振動変位 u_i を最小化することを目的とする振動変位最小化問題を考える. 設計速度場 $\mathbf{V}$ を設計変数 (関数) とし, 状態方程式と体積を制約条件としたとき, その分布系の形状最適化問題は以下のように定式化される.

$$\text{Find } \mathbf{V} \quad (10)$$

$$\text{Minimizes } \int_{A_D} \int_0^{t_r} u_i u_i dt dx \quad (11)$$

$$\text{Subject to } \text{Eq.(3)} \quad (12)$$

$$m = \int_{\Omega} d\Omega \leq M_0 \quad (13)$$

ここで, M_0 は体積制約値を表す.

本問題に対するラグランジュ汎関数は $\bar{\mathbf{u}}$ を状態変数 $\mathbf{u}$ に対するラグランジュ乗数関数 (または随伴変数), Λ_m を体積制約に関するラグランジュ乗数として次式のように表される.

$$L = \int_{A_D} \int_0^{t_r} u_i u_i dt dx + \int_0^{t_r} \{l(\bar{\mathbf{u}}) - a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})\} dt + \Lambda_m (m - M_0) \quad (14)$$

式 (14) で定義されるラグランジュ汎関数の領域変動に対する物質導関数 $\dot{L}$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \int_{A_D} \int_0^{t_r} 2u_i u_i' dt dx + \int_0^{t_r} \{l(\bar{\mathbf{u}}') - a(\mathbf{u}', \bar{\mathbf{u}}) - a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}') - d(\mathbf{u}', \bar{\mathbf{u}}) - d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}') - c(\mathbf{u}', \bar{\mathbf{u}}) - c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}')\} dt \\ & + \Lambda_m' (m - M_0) + \langle G\mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

この問題におけるラグランジュ汎関数 L の停留条件, すなわち状態変数 $\mathbf{u}(t)$, 随伴変数 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ および体積制約 Λ_m に関する最適性条件は以下のように表される.

$$\int_0^{t_r} \{a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}') + d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}') + c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}')\} dt = \int_0^{t_r} l(\bar{\mathbf{u}}') dt, \quad \mathbf{u}(t) \in U, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}'(t) \in \bar{U} \quad (16)$$

$$\int_0^{t_r} \{a(\mathbf{u}', \bar{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{u}', \bar{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}', \bar{\mathbf{u}})\} dt = \int_{A_D} \int_0^{t_r} 2u_i(t) u_i'(t) dt dx, \quad \forall \mathbf{u}'(t) \in U, \quad \bar{\mathbf{u}}(t) \in \bar{U} \quad (17)$$

$$\int_0^{t_r} \{a(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}})\} d\tau = \int_{A_D} \int_0^{t_r} 2u_i(\tau) u_i'(\tau) d\tau dx, \quad \forall \mathbf{u}'(\tau) \in U, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \in \tilde{U} \quad (18)$$

$$\tilde{U} = \{\tilde{\mathbf{u}}(\tau) \in H^1(\Omega \times [0, t_r]) \mid \tilde{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{0} \text{ in } (\mathbf{u} \in \Gamma_u, \tau \in [0, t_r]), \quad \tilde{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}\} \quad (19)$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{u}}(\tau) = \bar{\mathbf{u}}(t_T - \tau), \quad \tau = [0, t_T] \quad (20)$$

$$\Lambda_m(m - M_0) = 0 \quad (21)$$

$$\Lambda_m \geq 0 \quad (22)$$

$$m - M_0 \leq 0 \quad (23)$$

$$\dot{L} = \langle G\mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle = \int_{\Gamma} G\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma = \int_{\Gamma} G V_n d\Gamma \quad (24)$$

なお、式 (16) は式 (3) と同様な状態変数 $\mathbf{u}(t)$ を決定するための状態方程式、式 (17) は随伴変数 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ を決定するための随伴方程式を表しており、式 (16) で得られた $2\mathbf{u}(t)$ を時間依存の外力として与えることによって解かれる。随伴方程式 (17) では終端条件が与えられており、時刻 $t = t_T$ から $t = 0$ までの逆時間積分を行う必要があるが、時間 t に対して $\tau = t_T - t$, $t \in [t_T, 0]$ を導入することにより、随伴変数を以下のように変換し、時刻 $\tau = 0$ から $\tau = t_T$ までの順時間積分問題として式 (18) により解かれる。このとき、時間依存外力も $2\mathbf{u}(\tau)$ に変換する。式 (21) から式 (23) は体積制約 Λ_m に関する支配方程式である。これらの最適性条件が満たされているとき、式 (15) は式 (24) のように表される。ここで、形状勾配密度関数 G ($G\mathbf{n}$ は形状勾配関数とよばれる) は次のように表される。 $\mathbf{n}$ は設計境界上の外向き単位法線ベクトルを表す。なお、 G の導出において、 A_D が変動しないこと、もしくはその影響が小さいことを仮定した (3・2 節と 3・3 節も同様)。また、随伴変数は式 (20) の関係を利用して、 $\mathbf{u}(t)$ と $\bar{\mathbf{u}}(t)$, $t \in [0, t_T]$ の時間を一致させる。

$$G = \int_0^{t_T} \left(\rho u_{i,t} \bar{u}_{i,t} - \zeta u_{i,t} \bar{u}_i - \beta \rho u_{i,t} \bar{u}_i - \alpha C_{ijkl} u_{(k,l),t} \bar{u}_{i,j} - C_{ijkl} u_{k,l} \bar{u}_{i,j} \right) dt + \Lambda_m \quad (25)$$

3・2 任意の時間での振動変位制御問題

3・1 節では、初期時刻 0 から終端時刻 t_T までの振動変位の積分値の最小化を目的としたが、本節では、任意の変位規定領域 A_D の任意の時間 t_θ における振動変位 u_i とその目標変位 $\hat{u}_i$ の二乗誤差を目的関数とする振動変位制御問題を定式化し、形状勾配関数を導出する。本問題は振動変位最小化問題と同様に、式 (3) の状態方程式と体積を制約条件とし、設計速度場 $\mathbf{V}$ を求めるための分布系形状最適化問題として以下のように定式化される。ただし、 $\hat{u}_i$ は指定時間 t_θ での領域 A_D に対する目標変位を表す。また、 Θ は振動変位を評価する離散的な時間ステップの総数を表す。

$$\text{Find } \mathbf{V} \quad (26)$$

$$\text{Minimizes } \sum_{\theta=1}^{\Theta} \int_{A_D} \int_0^{t_T} (u_i - \hat{u}_i)(u_i - \hat{u}_i) \delta(t - \hat{t}_\theta) dt dx \quad (27)$$

$$\text{Subject to } \text{Eq.(3)} \quad (28)$$

$$m = \int_{\Omega} d\Omega \leq M_0 \quad (29)$$

本問題に対するラグランジュ汎関数は次式のように表される。

$$L = \sum_{\theta=1}^{\Theta} \int_{A_D} \int_0^{t_T} (u_i - \hat{u}_i)(u_i - \hat{u}_i) \delta(t - \hat{t}_\theta) dt dx + \int_0^{t_T} \{ l(\bar{\mathbf{u}}) - a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \} dt + \Lambda_m(m - M_0) \quad (30)$$

本ラグランジュ汎関数 L の状態変数 $\mathbf{u}(t)$ 、及び Λ_m に関する最適性条件は 3.1 節と同様である。随伴変数 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ に関する随伴方程式は 3.1 節と同様、式 (20) の変数変換を用いることにより以下のように表される。ただし、制御したい離散時間の数 Θ だけの随伴方程式を解く必要がある。

$$\int_0^{t_r} \{a(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}})\} d\tau = \int_{A_D} \int_0^{t_r} 2(u_i - \hat{u}_i) u_i' \delta(t_T - \hat{t}_\theta - \tau) d\tau dx, \quad \forall \mathbf{u}'(\tau) \in U, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \in \tilde{U},$$

$$(\theta = 1, \dots, \Theta) \quad (31)$$

3.1 節と同様、最適性条件が成立する場合、本問題に関する形状勾配密度関数は最終的に次のように表される。なお、ここでも随伴変数は式 (20) の関係を利用して、 $\mathbf{u}(t)$ と $\bar{\mathbf{u}}(t)$, $t \in [0, t_r]$ の時間を一致させている。

$$G = \sum_{\theta=1}^{\Theta} \int_0^{t_r} (\rho u_{i,t} \bar{u}_{i,t} - \zeta u_{i,t} \bar{u}_i - \beta \rho u_{i,t} \bar{u}_i - \alpha C_{ijkl} u_{(k,l),t} \bar{u}_{i,j} - C_{ijkl} u_{k,l} \bar{u}_{i,j}) \delta(t - \hat{t}_\theta) dt + \Lambda_m \quad (32)$$

3・3 動的コンプライアンス最小化問題

初期時刻 0 から終端時刻 t_r までのコンプライアンスの全時間積分として定義される動的コンプライアンスの最小化問題に対し、形状勾配関数を導出する。本問題も前節と同様、式 (3) の状態方程式と体積を制約条件とし、設計速度場 V を設計変数とする。この分布系形状最適化問題は以下のように定式化される。

$$\text{Find } V \quad (33)$$

$$\text{Minimizes } \int_0^{t_r} l(\mathbf{u}) dt \quad (34)$$

$$\text{Subject to } \text{Eq.(3)} \quad (35)$$

$$m = \int_{\Omega} d\Omega \leq M_0 \quad (36)$$

本問題に対するラグランジュ汎関数 L は次式のように表される。

$$L = \int_0^{t_r} \{l(\mathbf{u}) + l(\bar{\mathbf{u}}) - a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})\} dt + \Lambda_m (m - M_0) \quad (37)$$

本ラグランジュ汎関数 L の状態変数 $\mathbf{u}(t)$ 、及び Λ_m に関する最適性条件は 3.1 節と同様である。随伴変数 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ に関する随伴方程式は 3.1 節と同様、式 (20) の変数変換を用いることにより次のように表される。

$$\int_0^{t_r} \{a(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}', \tilde{\mathbf{u}})\} d\tau = \int_0^{t_r} l(\mathbf{u}') d\tau, \quad \forall \mathbf{u}'(\tau) \in U, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \in \tilde{U} \quad (38)$$

式 (38) は状態方程式の式 (16) と一致しており、 $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(\tau)$ の関係が成立する自己随伴問題であることが分かる。これらの最適性条件が満たされる場合、本問題に関する形状勾配密度関数は次式のように表され、状態方程式のみから決定される。

$$G = \int_0^{t_r} (\rho u_{i,t} u_{i,t} - \zeta u_{i,t} u_i - \beta \rho u_{i,t} u_i - \alpha C_{ijkl} u_{(k,l),t} u_{i,j} - C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}) dt + \Lambda_m \quad (39)$$

形状勾配関数 G_n が導出されれば H^1 勾配法の適用が可能となる。

4. H^1 勾配法

目的汎関数を減少させながら、3 次元線形弾性体の形状の滑らかさを保つために、 H^1 勾配法 (力法) を用いる。本手法は、畔上 (畔上, 1994) によって領域最適化問題の解法として提案されたヒルベルト空間の勾配法であり、

設計変数としての形状表現にパラメータ化を必要としない分布系形状最適化手法である．本手法では，負の形状勾配関数に比例した荷重 $-Gn$ を擬似弾性体の設計境界（外表面）に与え，そこで得られる変位場をベクトル設計変数である設計速度場 V として用い，形状更新を行うことにより，設計境界の滑らかさを保持しながら最適形状を得ることが可能である．

式 (40) は設計速度場 V の支配方程式を表しており，この解析を速度場解析と呼ぶ．速度場解析の拘束条件は形状設計条件を考慮し，剛性解析や随伴解析とは独立に与えられ，汎用 FEM コードを用いて解くことが可能である（下田他，1994）．ここで， C_0 は領域の変動制約を満たす許容関数空間を表す．

$$a(V, w) = -\langle Gn, w \rangle, w \in C_0 \quad (40)$$

Fig. 2 Schematic of H^1 gradient method.

5. 数値計算結果

本手法の有効性と実用性を検証委するため，異なる荷重条件下での振動変位最小化問題，変位制御問題，及び動的コンプライアンス最小化問題の数値解析例を示す．以下の全ての数値解析例において，解析モデルは 8 節点 6 面体ソリッド要素を使用し，材料特性はヤング率 $E = 210\text{GPa}$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ ，質量密度 $\rho = 7.9 \times 10^{-3}\text{g/mm}^3$ ，粘性減衰係数 $\zeta = 0$ とし，レーリー減衰のみを考慮する．

5・1 連続時間依存荷重に対する振動変位最小化問題

本節では連続時間依存荷重に対する振動変位最小化問題の解法の適用結果を示す．解析モデルには曲率を持つ一様正方形断面の L 型パイプモデルを使用する．図 3(a)に示すように，端面を完全拘束し，もう一方の端面に対して x 軸方向に等分布荷重を与えた．この時，入力荷重として，図 3(c)で示される地震荷重のような連続的に時間依存する荷重を与えた．なお，図中の SPC は拘束自由度番号を示しており，1~3 は x から z の並進自由度，4~6 は x 軸から z 軸周りの回転自由度を表す．過渡応答解析における微小時間刻みを 0.002 秒とし，500 回繰り返し計算することにより，合計 1.0 秒間の解析を行った．この時，感度関数の計算及び目的関数の評価は計算効率，及びメモリーとハードディスク容量を考慮し，10 ステップごとの時間刻みで行った．なお，本問題におけるレーリー減衰のパラメータとして $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$ ， $\beta = 1.0 \times 10^{-4}$ を使用した．目的関数を評価する振動変位制御領域は，図 3(a)で示される橙色の線で囲われた断面であり，振動変位の評価時間は加振時間と等しい 0.0 秒から 1.0 秒間とした．体積制約値である M_0 は初期形状と比較して 1.0 倍とした．形状変動ベクトルを求める速度場解析における境界条件を図 3(b)に示すが，構造体の両端面を滑り拘束した．

図 4(a)，(b)に初期形状，図 4(c)，(d)に得られた最適形状を示す．最適形状では，振動変位制御領域において，振動変位を最小化するために，拘束点近傍は曲げモーメント分布に従った形状となり，I 型断面形状に近づいていることがわかる．また，振動変位制御領域よりも上部分に関してはほぼ形状変動は見られず，任意の場所での

Fig. 3 The boundary condition of the L-shaped model with uniform square cross section. (a) shows the boundary condition for the time response analysis. The time dependent load is applied to the upper edge. (b) shows the boundary condition for the velocity analysis. Both edges are fixed to the axial direction. (c) shows the dynamic load profile of the continuous time dependent load.

Fig. 4 Calculated results for vibration displacement minimization problem under the continuous time dependent load of the L-shaped model. (a) shows the initial shape and (b) shows the side view of the initial shape. (c) shows the optimal shape obtained. (d) shows the side view of the optimal shape.

変位最小化が達成されていることがわかる。図 5 に目的関数と体積の収束履歴を示す。目的関数は安定的に減少し、初期と比較して約 95%以上減少したところで収束していることがわかる。また、図 6 に振動変位制御領域の一部である点 D の最適化前後の時間応答を示す。本問題では、周期的な強制荷重を与えているため、最適化前後共にそれに従った振動を行っているが、最適形状では振動変位が減少していることがわかる。以上の結果から、本解法により連続時間依存荷重が作用した場合において、任意の振動変位制御領域における振動変位最小化が達成されていることが確認される。

Fig. 5 The iteration history of the objective function and the volume normalized to the initial value of the L-shaped model. The objective function is stably decreased more than 95%.

Fig. 6 Time responses of vibration displacement at point D of the L-shaped model. Blue and red lines are the initial and the optimized shape, respectively.

5・2 衝撃荷重に対する振動変位最小化問題

本節では衝撃荷重に対する振動変位最小化問題の解法の適用結果を示す。解析モデルには図 7(a)に示す U 型モデルを使用した。この時、図中における右下面はピン支持されており、左下面に対して図 7(c)に示される衝撃荷重を等分布荷重として x 方向に与えた。過渡応答解析における微小時間刻みを 0.002 秒とし、500 回繰り返し計算することにより、合計 1.0 秒間の解析を行った。この時、5・1 の場合と同様、感度関数の計算及び目的関数の評価は 10 ステップごとの時間刻みで行った。なお、本問題ではレーリー減衰のパラメータとして、 $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}$, $\beta = 1.0 \times 10^{-5}$ を使用した。振動変位の評価時間は、解析時間と等しい 0.0 秒から 1.0 秒間とし、振動変位制御領域 A_D を図 7(a)中に橙色の線で囲われる断面で与えた。体積制約値 M_0 は、初期形状と比較して 1.0 倍とし、速度場解析での境界条件を図 7(b)に示す。本問題では構造体の側面及び下面をピン支持した。

図 8(a)に初期形状、図 8(b)に得られた最適形状を示す。最適形状では、剛性を高めるため、拘束側の面が構造体の内側に盛り上がる形状が得られていることがわかる。図 9 に目的関数及び体積の収束履歴を示す。体積制約を満たしながら、初期形状と比較して約 95%以上減少していることがわかる。この時、試行回数 8 回目近傍で目的関数が大きく減少するが、これは最適化の過程で構造体の振動周波数が変動し、振動変位の評価の際に、出力

Fig. 7 The boundary condition of the U-shaped model. (a) shows the boundary condition for the time response analysis. The impulse load is applied to the left bottom. (b) shows the boundary condition for the velocity analysis. Both bottom surfaces and the side surfaces of the structure are simply supported. (c) shows the dynamic load profile of the impulse load.

Fig. 8 Calculation results for the vibration displacement minimization problem under the impulse load for the U-shaped model. (a) shows the initial shape and (b) shows the optimal shape.

の時間的な間引きを行っており、一種のエイリアシングによる積分誤差が発生したためである。これは最適化計算の繰り返しにより解消されるため、最適形状には影響は与えない。また、図 10 に振動変位制御領域の一部である点 E における最適化前後の時間応答を示す。衝撃入力後に、構造体は自由振動となり、徐々に減衰していることがわかる。また、最適化をすることで、初期の荷重による振動のピーク値も減少し、さらに評価時間全体を通して振動変位が大きく減少し、5.2 節と同様に振動変位が 0.0mm に近づいていることがわかる。以上の結果から

本解法により、衝突荷重が与えられた場合において、任意の振動変位制御領域における振動変位最小化が達成されていることがわかる。

Fig. 9 The iteration history of volume and objective functional normalized to the initial value of the U-shaped model. The objective functional is stably decreased by more than 95%.

Fig. 10 Time responses at point E for vibration displacement minimization problem under impulse load of the U-shaped model. Blue and red curves are the initial and the optimized shape, respectively.

5・3 衝撃荷重に対する振動変位制御問題

本節では衝撃荷重に対する振動変位制御問題の解法の適用結果を示す。解析モデルには、5.2 節の図 7(a)に示す U 型モデルを使用し、拘束条件及び荷重条件も同様とした。また、振動変位制御領域 A_D は、5.2 節と同様に図 7(a)中に橙色で囲われる断面で与えた。本問題でも過渡応答解析における微小時間刻みを 0.002 秒とし、500 回繰り返し計算することにより、合計 1.0 秒間の解析を行った。この時、5・1 の場合と同様、感度関数の計算及び目的関数の評価は 10 ステップごとの時間刻みで行った。なお、レーリー減衰のパラメータとして $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}$ 、 $\beta = 1.0 \times 10^{-5}$ を使用した。このとき、時刻 0.4 秒における振動変位を、0.0mm に制御することを目的とした。体積制約値である M_0 は、初期形状と比較して 1.0 倍とした。また、速度場解析での境界条件も 5.2 節と同様に、過渡応答解析における加振点と拘束点、及び構造体の側面部をピン支持した。

図 11(a)に初期形状、図 11(b)に得られた最適形状を示す。形状のわずかな変化に伴い、構造体の振動特性は大きく変化する。本問題では、形状変動をよりわかりやすくするため、変動量のコンター図を図 11(c)に示す。これにより、拘束側の面及び曲げモーメントの影響を受ける曲率部が形状変動していることがわかる。また、目的関数及び体積の収束履歴を図 12 に示す。体積制約を満たしながら目的関数は 1 回目の繰返しで減少するが、2 回目では一旦増加し、再び減少し、最終的に 0 に収束している。これは 1 回当りの変動量が大きかったため、2 回目では目標変位（最適解）を通り過ぎたことによる挙動である。1 回目（の近傍）と 3 回目はいずれも局所最適形状である。図 13(a)に振動変位制御領域の一部である点 E の最適化前後の時間応答を示す。図 13(b)は制御時間の時刻 0.4 秒近傍を切り出したものである。このグラフから、最適化計算により周波数が変動し、指定時間において設定

した目標値にほぼ近づいていることがわかる。以上のことから、本解法により、任意の領域と時間で振動変位制御が可能であることが確認される。

Fig. 11 Calculated results for vibration displacement control problem under impulse load of the U-shaped model. (a) shows the initial shape and (b) shows the optimal shape. (c) shows the contour plot of the shape variation of the optimal shape. [mm] is used as the unit system for contour plot.

Fig. 12 The iteration history of the objective function and the volume normalized to the initial value of the U-shaped model. The objective function is decreased and approaches to 0.

(a) Time response at point E.

(b) Displacement response near target time $t = 0.4$ s.

Fig. 13 Time responses at point E for vibration displacement control problem of the U-shaped model. Blue and red lines are the initial and the optimized shape, respectively.

5・4 時間依存する荷重を受ける T 型モデルに対する動的コンプライアンス最小化問題

本節では動的コンプライアンス最小化問題の解法の適用結果を示す。解析モデルには図 14(a)に示される曲面を持つ T 型モデルを使用し、構造体の上面に図 14(c)で示される連続的に時間依存荷重を等分布荷重として y 方向に与えた。このとき、左右の端面は単純支持した。過渡応答解析における微小時間刻みを 0.002 秒とし、500 回繰り返し計算をすることで、合計 1.0 秒間の解析を行い、その時の動的コンプライアンスの最小化を目的とした。この時、5・1 の場合と同様、感度関数の計算及び目的関数の評価は 10 ステップごとの時間刻みで行った。なお、レーリー減衰のパラメータとして、 $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$ 、 $\beta = 1.0 \times 10^{-4}$ を使用した。体積制約値 M_0 は初期形状と比較して 1.0 倍とし、速度場解析における境界条件を図 14(b)に示す。荷重を与える上面及び左右の端面、下面のピン支持を仮定した。

図 15(a)に初期形状、図 15(b)に最適化計算で得られた最適形状を示す。最適形状では、最も曲げ力が生じる交点部分の形状が加振方向に対して膨らむように形状変動していることがわかる。また、全体として滑らかな形状を有していることが確認できる。本問題における目的関数と体積の収束履歴を図 16 に示す。目的関数は安定的に収束し、体積制約を満たしながら初期形状と比較して約 35%減少していることがわかる。また、図 17 に加振点の一部である点 F における最適化前後の応答を示す。図 14(c)で示されるような周期的な荷重を与えているため、最適化前後共に、それに従った振動をするが、最適形状では振動変位が減少しており、これらの結果から、時間依存する動的外力に対して、動的コンプライアンスを最小とする高剛性な形状が効率的に得られたことが確認できる。

Fig. 14 The boundary condition of the T-shaped model. (a) shows the boundary condition for the time response analysis. The time-dependent load is applied to the upper surface. (b) shows the boundary condition for the velocity analysis. The bottom surfaces are simply supported. (c) shows the dynamic load profile of the continuous time dependent load.

Fig. 15 Calculated results for the dynamic compliance minimization problem under continuous time dependent load for the T-shaped model. (a) shows the initial shape and (b) shows the optimal shape.

Fig. 16 The iteration history of the objective function and the volume normalized to the initial value of the T-shaped model. The objective function is decreased by 35%.

Fig. 17 Displacement response at point F for the dynamic compliance minimization problem of the T-shaped model. Blue and red lines are the initial and the optimized shape, respectively.

6. 結 言

3次元線形弾性体に、時間依存する種々の荷重が加わる場合の時間応答問題に対して、力学的に最適な形状を求めるための形状最適化手法を提示した。本手法は設計変数である形状表現にパラメータ化を必要としないパラメータフリー手法である。連続的に時間依存する荷重及び、衝撃荷重が加わる場合において、振動変位最小化問題、振動変位制御問題、及び動的コンプライアンス最小化問題を対象に、分布系の最適化問題として定式化し、変分法とラグランジュ乗数法、随伴変数法を利用して、各問題に対する最適性条件と形状勾配関数を理論的に導出した。得られた形状勾配関数を H^1 勾配法に適用し、形状の滑らかさを保ちながら目的汎関数を減少させるための形状を得ることを可能とした。これらの手法の有効性と実用性を、振動変位最小化問題、振動変位制御問題、及び動的コンプライアンス最小化問題のそれぞれにおける数値計算例を通して確認した。

文 献

- 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集A編, Vol. 60, No. 574 (1994), pp. 1479-1486.
 Choi, K. K. and Kim, N. H., Structural sensitivity analysis and optimization 1, Springer (2005).
 Kang, B., Park, G.J. and Arora, J., A review of optimization of structures subjected to transient loads, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.31, No.2 (2006), pp.81-95.
 片峯英次, 畔上秀幸, 松浦易広, 非定常熱伝導場における形状同定問題の解法, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.66, No.641 (2000), pp.227-234.
 Kim, Y. and Park, G.J., Nonlinear dynamic response structural optimization using equivalent static loads, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.199, No.9-12 (2010), pp.660-676.

- Park, G.J., Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.43, No.3 (2011), pp.319-337.
- 下田昌利, 吳志強, 畔上秀幸, 桜井俊明, 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (力法によるアプローチ), *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.60, No.578 (1994), pp.250-257.
- 下田昌利, シェル構造体のフリーフォーム最適化手法, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.79, No.797 (2013), pp.60-73.
- 鈴木克幸, 大坪英臣, 時間積分を要する動的システムの随伴法による感度解析と最適設計, *日本造船学会論文集*, No.175 (1994), pp.317-323.
- 若狭守, 下田昌利, 時間応答特性のコントロールを目的とするシェル構造体の板厚最適化手法, *日本機械学会論文集*, Vol.84, No.868 (2018), DOI: 10.1299/transjsme.18-00343.
- Wang, B., Transient response optimization of vibrating structures by Liapunov's second method, *Sound and Vibration*, Vol.96, No.4 (1984), pp.505-512.
- Yan, K., Cheng, G. and Wang, B., Topology optimization of plate structures subject to initial excitations for minimum dynamic performance index, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.53, No.3 (2016), pp.623-633.
- Yun, K. and Youn, S., Design sensitivity analysis for transient response of non-viscously damped dynamic systems, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.55, No.6 (2017), pp.2197-2210.

Reference

- Azegami, H., Solution to domain optimization problems, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 60, No. 574 (1994), pp. 1479-1486 (in Japanese).
- Choi, K. K. and Kim, N. H., *Structural sensitivity analysis and optimization 1*, Springer (2005).
- Kang, B., Park, G.J. and Arora, J., A review of optimization of structures subjected to transient loads, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.31, No.2 (2006), pp.81-95.
- Katamine, E., Azegami, H. and Matsuura, Y., Solution to shape optimization problem of unsteady heat-conduction fields, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol.66, No.641 (2000), pp.227-234 (in Japanese).
- Kim, Y. and Park, G.J., Nonlinear dynamic response structural optimization using equivalent static loads, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.199, No.9-12 (2010), pp.660-676.
- Park, G.J., Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.43, No.3 (2011), pp.319-337.
- Shimoda, M., Wu, C. H., Azegami, H. and Sakurai, T., Numerical method for domain optimization problems using a general FEM code (Traction method approach), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.60, No.578 (1994), pp.250-257 (in Japanese).
- Shimoda, M., Free-form optimization method for shell structures, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.79, No.797 (2013), pp.60-73 (in Japanese).
- Suzuki, K. and Ohtubo, M., Sensitivity analysis by adjoint method and optimal design of the dynamic systems that require time integration, *Transaction of the Society of Naval Architects of Japan*, No.175 (1994), pp.317-323 (in Japanese).
- Wakasa, M. and Shimoda, M., Thickness optimization of shell structure for controlling time-dependent responses, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol.84, No.868 (2018), DOI: 10.1299/transjsme.18-00343.
- Wang, B., Transient response optimization of vibrating structures by Liapunov's second method, *Sound and Vibration*, Vol.96, No.4 (1984), pp.505-512.
- Yan, K., Cheng, G. and Wang, B., Topology optimization of plate structures subject to initial excitations for minimum dynamic performance index, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.53, No.3 (2016), pp.623-633.
- Yun, K. and Youn, S., Design sensitivity analysis for transient response of non-viscously damped dynamic systems, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.55, No.6 (2017), pp.2197-2210.