符号付き対角離散ホッジスター演算子の計算アルゴリズムと数値解析

野口 聖史^{*1}, 小國 健二^{*2}

The computational algorithm and numerical analysis of the signed diagonal Hodge star operator

Satoshi NOGUCHI^{*1} and Kenji OGUNI^{*2}^{*1}School of science for Open and Environmental Systems, Keio University
3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan^{*2}Department of System Design Engineering, Keio University
3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

Received: 28 February 2019; Revised: 22 April 2019; Accepted: 29 May 2019

Abstract

Differential form is an alternative mathematical form to describe the field variables and the operators in electromagnetism. From the viewpoint of differential forms, discretization of electromagnetic field is divided into two steps, i) discretization of the exterior derivative operator (Maxwell's equations), and ii) discretization of the Hodge star operator (constitutive equations). The first step, the discrete form of the Maxwell's equations based on differential forms has been obtained by other researchers. In contrast, the discrete Hodge star operators (discrete constitutive equations) have not been obtained so far. In the previous studies, unsigned diagonal discrete Hodge star operators are defined using the unsigned area and length for circumcenter dual meshes, however, it does not lead to correct solution of partial differential equations in the general Delaunay meshes. In this paper, we propose a definition of the signed diagonal discrete Hodge star using the signed area and length operator for circumcenter dual meshes. Also, based on this definition, we propose a simple practical calculation method for the signed discrete Hodge star operators. The result of convergence experiment indicates that the signed diagonal Hodge star operators produce the correct numerical solution for the general Delaunay meshes. Therefore, this definition and calculation method for the signed discrete Hodge star operator provides us with the explicit dynamics formulation for finite element analysis of electromagnetic field.

Keywords : Finite element method, Discrete exterior calculus (DEC), Signed volume, Diagonal discrete Hodge operator, Circumcenter dual, Poisson's equation, Differential forms

1. 緒 言

現在の代表的な電磁界解析手法に、有限要素法 (FEM) がある。特に、電磁場のベクトル量を未知数とする解析では、辺に未知数を置く辺有限要素法が用いられている (Nedelec, 1980, 宮田, 2004, 良晃, 河野, 2018)。これは Bossavit らによる、微分形式を用いた図形的な視点を背景に持っている (Bossavit, 1988, Bossvit and Kettunen, 2000)。微分形式の視点から見ると、電磁場構造の離散化は、外微分演算子 (マクスウェル方程式) の離散化とホッジスター演算子 (構成方程式) の離散化に分けられる。

外微分演算子 (マクスウェル方程式) の離散化に関しては、Bossavit らによる FEM や, Tonti による Cell Method, Hirani らによる Discrete Exterior Calculus (DEC) を用いて同一の離散式が得られ、唯一の離散式であると言える (Bossvit and Kettunen, 2000, Tohti, 2001, Hirani, 2003)。

一方、ホッジスター演算子（構成方程式）の離散化に関しては、現在も決定的な離散化手法が存在しない（Tarhassari and Kettunen, 1999, Auchmann and Kurz, 2006）。離散ホッジスター演算子（離散構成方程式）は、ホッジスター演算子が計量に依存することに対応して、メッシュの形状に依存する。つまり、双対な領域分割の定義に依存する。本研究で用いるドロネー分割に対する、双対な領域分割として、重心ボロノイ分割と外心ボロノイ分割が存在する。重心ボロノイ分割で定義される離散ホッジスター演算子は、対角行列ではなく逆行列の計算が容易ではない。このことが、有限要素法による陽解法を困難にしている（Donderici and Teixeira, 2008）。また、外心ボロノイ分割で定義される離散ホッジスター演算子は、一対一対に对应する図形（ドロネー辺とボロノイ面、ドロネー面とボロノイ辺）の直交性に基づいて、それぞれ図形の面積や長さの絶対値の比で定義される（Bossvit and Kettunen, 2000, Tohti, 2001, Hirani, 2003）。この様に定義される離散ホッジスター演算子は、対角行列である。しかし、四面体の外心が四面体の外部に出る場合、ボロノイ面の面積やボロノイ辺の長さが負の値になることがある。ボロノイ面の面積やボロノイ辺の長さが負の値となる場合、符号なし離散ホッジスター演算子を用いた数値解析は、理論解と異なる値を持つ数値解を与える（Hirani et al., 2013）。そこで、DEC では、全ての四面体の外心が四面体に含まれる（well-centered である）と仮定をしている。しかし、一般のメッシュでは全ての四面体の外心が四面体内部に含まれるということは無く、この仮定は、外心ボロノイ分割で定義される離散ホッジスター演算子の適用できるメッシュを制限している。一般のメッシュに適用できるように、外心ボロノイ分割で定義されるホッジスター演算子を符号付き面積や長さに拡張する考えも存在する（Hirani et al., 2013, Hirani et al., 2018）。しかし、未だ 3 次元での数値解析の結果は乏しいのが現状である。そこで、本研究では、Hirani らと同様に符号付き離散ホッジスターを定義し、3 次元においての符号付き離散ホッジスター演算子の具体的な計算方法を示す。さらに、例題として、静電ポテンシャルに対するポアソン方程式を取り上げ、その符号付き離散ホッジスター演算子を適用して得られる数値解の収束挙動の解析を行った。ただし、ここでの数値解とは、離散方程式の解として得られる各ドロネー点における静電ポテンシャルを線形補間したものを表している。

数値実験の結果、2 次のオーダーでの収束が確認された。この結果は、符号付きホッジスター演算子が、四面体の外心が外部に出る一般のメッシュに適用可能であることを示しており、well-centered であるという仮定が必要ないことを示唆している。さらに、符号付き離散ホッジスター演算子は対角行列であることから、有限要素法に容易に陽解法を適用することができる。

2. 微分形式による電磁場構造

2・1 微分形式を用いて表現された電磁場

微分形式を用いてマクスウェル方程式は、

$$dE = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

$$dH = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad (2)$$

$$dD = \rho \quad (3)$$

$$dB = 0 \quad (4)$$

と表現される。ただし、 E , H , D , B , J , ρ はそれぞれ、1-form である電界と磁界、2-form である電束密度、磁束密度、電流密度、3-form である電荷密度である。p-form とは、p-次微分形式とも呼ばれ、「p-重積分の対象となる量」として理解することができる。例えば、電界 E は 1-form であるので、3 次元空間内のある 1 次元図形上で線積分することでスカラー量である電位差を得ることができる。さらに、後に定義する静電ポテンシャル ϕ は、0-form である。0-form は空間内に定義されるスカラー値関数である。また、 d は外微分演算子である。外微分演

算子は計量に依存しない演算子である. $\partial/\partial t$ は時間微分を表している. さらに, 電界 E と電束密度 D , 磁界 H と磁束密度 B には以下の構成方程式が成立する.

$$D = \star_{\epsilon} E \quad (5)$$

$$B = \star_{\mu} H \quad (6)$$

ただし, $\star_{\epsilon}$ と $\star_{\mu}$ はそれぞれ誘電率と透磁率を含むホッジスター演算子である. ここでは, ϵ と μ は誘電率と透磁率を表している. ホッジスター演算子は, 計量に依存した双対な空間への線形演算子である. R^n 空間において p -form と $(n-p)$ -form のベクトルの空間は次元が同じであり, ホッジスター演算子はそれらを関連付けるものである. つまり, R^3 において 2-form の電束密度 D と 1-form である電界 E を関連付けている. 同様に, 2-form の磁束密度 B と 1-form である磁界 H を関連付けている. 次に, マクスウェル方程式と構成方程式から, 本研究で例題として取り上げるポアソン方程式を, 微分形式を用いて表す. 静電界の場合は, 静電ポテンシャル ϕ に関して以下のポアソン方程式が成立する.

$$d \star_{\epsilon} d \phi = -\rho \quad (7)$$

ただし, 静電ポテンシャル ϕ は以下の関係式によって定義される 0-form の微分形式である.

$$E = -d\phi \quad (8)$$

以上に示した様に, マクスウェル方程式と構成方程式を, 微分形式を用いて表現することで, 電磁場構造を計量に依存する部分 (式 (1) から (4)) としない部分 (式 (5), (6)) に区別することができる. また, ホッジスター演算子によって, 電界と電束密度, 磁界と磁束密度はそれぞれ双対な関係を持っており, マクスウェル方程式は双対な 2 つの場に対する支配方程式であることが分かる. そこで, 本研究では双対な 2 つの領域分割であるドロネー分割と外心ボロノイ分割を用いて離散化を行う. さらに, 微分形式は基底によって積分範囲の次元が決まる. 例えば, 1-form である電界であれば空間内の 1 次元の図形 (直線や曲線など) で積分され, スカラー量 (電圧) を与える. これらを合わせると, 各物理量はドロネーもしくはボロノイ分割内に対応する図形を持ち, 図 1 の様に, 整理することができる. Bossavit らの離散化は, この電磁場構造をできるだけ保持することを指針としている (五十嵐他, 2003).

Fig. 1 The structure of the electromagnetic field. It shows the layered structure by the exterior derivative and the dual relation by the Hodge star operator. ψ is the magnetic scalar potential.

3. 離散化手法

3・1 双対な領域分割内で離散化された物理量

本研究では、双対な領域分割であるドロネー分割と外心ボロノイ分割を用いて離散化を行う。それぞれの分割内の辺や面などには向きが与えられている。今後、ドロネー分割またはボロノイ分割とは、向きが与えられたドロネー分割とボロノイ分割を指す。また、ボロノイ面（辺）の添字は、それと直交するドロネー辺（面）の添字と同じものを与えることにする。つまり、 i 番目のドロネー辺（面）と、 i 番目のボロノイ面（辺）が直交する。

微分形式から分かる電磁場構造をもとに、離散化された物理量を以下の様に、連続な物理量をメッシュ内の対応する図形上で積分した値を並べたベクトルとして定義する。これは、一種のサンプリングである。積分方向は与えられた辺や面の方向とする。ただし、メッシュ全体のドロネー辺とドロネー面の数をそれぞれ E と F とした。

$$[e] = \left[\int_{l_1} E, \int_{l_2} E, \dots, \int_{l_E} E \right]^T \quad (9)$$

$$[b] = \left[\int_{S_1} B, \int_{S_2} B, \dots, \int_{S_F} B \right]^T \quad (10)$$

$$[h] = \left[\int_{\tilde{l}_1} H, \int_{\tilde{l}_2} H, \dots, \int_{\tilde{l}_F} H \right]^T \quad (11)$$

$$[d] = \left[\int_{\tilde{S}_1} D, \int_{\tilde{S}_2} D, \dots, \int_{\tilde{S}_E} D \right]^T \quad (12)$$

この時、 l_i , $\tilde{l}_i$, S_i , $\tilde{S}_i$ はそれぞれ i 番目のドロネー辺、ボロノイ辺、ドロネー面、ボロノイ面を表す。今後もこの表記を用いる。また、それぞれドロネー辺とボロノイ面、ドロネー面とボロノイ辺が一对一に対応することからメッシュ全体での総数が一致することを用いている。この定義は、物理的には、連続な物理量をメッシュ内の有限個の図形上で測定することに対応する。

3・2 符号付き離散ホッジスター演算子

図1内で、ボロノイ分割内の図形に対応付けられる物理量（電束密度と磁界）の対応する図形上での符号付き平均を、双対な関係にある物理量（電界と磁束密度）の符号付き平均を用いて以下の様に定義する。

$$\frac{1}{\text{Area}(\tilde{S}_i)} \int_{\tilde{S}_i} D := \epsilon \frac{1}{\text{Length}(l_i)} \int_{l_i} E \quad (13)$$

$$\frac{1}{\text{Length}(\tilde{l}_i)} \int_{\tilde{l}_i} H := \frac{1}{\mu} \frac{1}{\text{Area}(S_i)} \int_{S_i} B \quad (14)$$

ただし、 $\text{Area}(\ )$ と $\text{Length}(\ )$ はそれぞれ括弧内の図形の符号付き面積と長さである。これらを具体的に計算する方法は4章で詳しく述べる。ただし、ボロノイ面の面積や、ボロノイ辺の長さが0になる場合は本研究では考慮しない。この関係式から、以下の様に、離散ホッジスター演算子を表す対角行列を定義する。

$$[\star_\epsilon] = \begin{cases} \epsilon \frac{\text{Area}(\tilde{S}_i)}{\text{Length}(l_i)}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (15)$$

$$[\star_\mu] = \begin{cases} \mu \frac{\text{Area}(S_i)}{\text{Length}(\tilde{l}_i)}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (16)$$

これは、DEC (Hirani, 2003), Cell Method (Tonti, 2001), FEM (Bossavit and Kettunen, 2000) で定義される離散ホッジスター演算子を、符号付き面積と長さを用いて定義し直したものに当たる。この行列は、メッシュ内の図形の面積や長さなど計量的な性質（メッシュの形状）によって決まり、ホッジスター演算子が計量に依存することに対応する。最終的に以下の様に、離散式を得ることができる。

$$[d] = [\star_\epsilon][e] \quad (17)$$

$$[b] = [\star_\mu][h] \quad (18)$$

式 (15) と式 (16) で定義される行列は、対角行列であり、ボロノイ面の面積とボロノイ辺の長さが 0 にならないメッシュにおいて正則性を持つ。しかし、一般には正定値性を持たない。

3・3 離散マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は、Discrete Exterior Calculus (Hirani, 2003) に従って以下の様に離散化される。ただし、前述の様に、この離散式は Bossavit らや Tonti の結果に一致する (Bossavit and Kettunen, 2000, Tohti, 2001)。

$$[R][e] = -\frac{\partial[b]}{\partial t} \quad (19)$$

$$[R]^T[h] = \frac{\partial[d]}{\partial t} + [j] \quad (20)$$

$$[G]^T[d] = [\rho] \quad (21)$$

$$[D][b] = [0] \quad (22)$$

ただし、 $[G]$, $[R]$, $[D]$, はそれぞれ grad, rot, div に対応する行列で、0, ± 1 を要素に持つ。 $[G]$ に関しては、後述のように負の符号を含んでいる。式 (19) から式 (22) はそれぞれ、ファラデーの法則、アンペールの法則、電束密度に関するガウスの法則、磁束密度に対するガウスの法則に対応する離散式である。また、 $[\rho]$, $[j]$ は、

$$[\rho] = \left[\int_{\tilde{V}_1} \rho, \int_{\tilde{V}_2} \rho, \dots, \int_{\tilde{V}_N} \rho \right]^T \quad (23)$$

$$[j] = \left[\int_{\tilde{S}_1} J, \int_{\tilde{S}_2} J, \dots, \int_{\tilde{S}_E} J \right]^T \quad (24)$$

と定義されるベクトルである。ただし、 $\tilde{V}_i$ は i 番目のボロノイ多面体であり、 N はドロネー分割内の節点の数を表している。また、 $[0]$ は適切な次元の零ベクトルである。

式 (20) と式 (21) は境界に対応する成分は、境界に存在するボロノイ多面体が不完全なことに起因する補正が必要である。その補正項に関しては次節で詳しく述べる。

また、上記の離散マクスウェル方程式に加えてドロネー節点上での静電ポテンシャルの値を並べた列ベクトル $[\phi]$ に関して、式 (8) に対応する以下の関係式が成立する。

$$[e] = [G][\phi] \quad (25)$$

この場合, $[G]$ は, 下図の様に電束密度 (ボロノイ面) と電界 (ドロネー辺) の向き付けを, それぞれの向きを示すベクトルの内積が正になるように対応させた場合, 負の符号を含んでいる. そのため, 式 (25) の右辺には負の符号が付かない. これを用いると, 下記の離散ポアソン方程式を得ることができる.

$$[G]^T[\star_\epsilon][G][\phi] = [\rho] \quad (26)$$

Fig. 2 The correspondence of the orientation of the Voronoi face (yellow lines) to the orientation of the Delaunay edge (blue lines).

3・4 ボロノイ領域内の離散式に関する補正項について

ボロノイ分割内の離散式である式 (20) と式 (21) は, 前述の様に, 境界に存在するボロノイ多面体が不完全であること (ボロノイ多面体が解析領域境界によって切断されること) に起因する補正を行う必要がある. 補正項を含む, 電束密度に関するガウスの法則は以下の様に表せる.

$$[G]^T[d] = [\rho] - [\xi] \quad (27)$$

ここで, $[\xi]$ は,

$$[\xi] = \left[\int_{\tilde{v}_1 \cap \partial\Omega} D, \int_{\tilde{v}_2 \cap \partial\Omega} D, \dots, \int_{\tilde{v}_N \cap \partial\Omega} D \right] \quad (28)$$

である. ただし, Ω は解析領域全体を表している. つまり, 解析領域境界による各ボロノイ多面体の断面で電束密度を面積分した値である. ただし, 解析領域の内部では $\tilde{v}_i \cap \partial\Omega = \emptyset$ が成り立つため, 対応する $[\sigma]$ の成分は 0 である.

補正項を含んだガウスの法則を用いて, 補正項を含む離散ポアソン方程式を得ることができる.

$$[G]^T[\star_\epsilon][G][\phi] = [\rho] - [\sigma] \quad (29)$$

この補正項を含んだ離散ポアソン方程式を用いて, 符号付き離散ホッジスター演算子を用いた場合の収束性の数値解析を行った. 数値解析の結果の詳細を 5 章で示す.

式 (20) に関しても $\tilde{S}_i \cap \partial\Omega$ の範囲で, 磁界を線積分した値で補正を行うことができる.

4. 符号付き離散ホッジスター演算子の計算方法

4・1 2次元の外心ボロノイ分割における符号付き面積

3次元の計算方法を示す前に、まず2次元における符号付き面積について示す。2次元のドロネー分割とボロノイ分割の一部で隣接するドロネー三角形が鈍角三角形である例を示す。この場合、ボロノイ多角形が反転し、重なり合う。

Fig. 3 A part of the Delaunay tessellation (solid lines) and a part of the Voronoi tessellation (dashed lines). In this figure, some Voronoi polygons are overlapped.

比較のために、重なり合わない場合の2次元のドロネー分割とボロノイ分割の一部も示す。

Fig. 4 A part of the Delaunay tessellation (solid lines) and a part of the Voronoi tessellation (dashed lines). In this figure, Any Voronoi polygons are not overlapped.

ただし、 e は各ドロネー点、 c は各ボロノイ点、 n はボロノイ辺同士の各交点である。図3中の青色で示した2つのドロネー三角形は鈍角三角形である。そのためそれらに対応するボロノイ分割の一部（図3中赤色で示した部分）は反転し他のボロノイ多角形の一部と重なり合う。そのため、ボロノイ多角形の一部は負の面積を持つ。例として、ドロネー点 e_0 に対応するボロノイ多角形の符号付き面積を考える。ボロノイ多角形の面積はあるドロネー点1点と、そのドロネー点を共有する三角形のうち隣接する三角形の外心2点で構成される三角形の面積の和である。まず、ドロネー点の周囲のドロネー三角形に反時計回りに $T_0, T_1, \dots, T_n$ 、と名前を付けていく。ここでは、 e_0 周りのドロネー三角形に以下の図の様に名前を付けていく。

Fig. 5 How to number each Voronoi polygon.

さらに、 T_i ($0 \leq i \leq n$) の外心を c_i ($0 \leq i \leq n$) と定義する。この時、三角形の面積の符号を、 c_i の c_{i+1} 位置関係が e_0 から反時計回りに見て c_i, c_{i+1} の順になっていれば正、 c_{i+1}, c_i の順になっていれば負であると定める。その

時, 図 3 中の三角形 $e_0c_0c_1$ と三角形 $e_0c_2c_3$ は正の面積を持ち, 一方, 三角形 $e_0c_1c_2$ は負の面積を持つ. 結果として, それらの和 (重ね合わせ) を考えると反転したボロノイ多面体の一部 (三角形 $n_0c_2c_1$) のみが負の面積を持つ.

反転したボロノイ多角形の一部は, その他のボロノイ多角形と重なり合う. 例えば, 図 3 中の四角形 $n_0c_2n_1c_1$ では, 周囲の各ドロネー一点 e_0, e_1, e_2, e_3 のそれぞれに対応するボロノイ多角形の一部が重なり合う. 上記の符号付き面積の定義に従うと, e_0 と e_2 に対応する, 三角形 $n_0c_2c_1$ と三角形 $n_1c_1c_2$ が負の面積を持ち, e_1 と e_3 に対応する, 2つの四角形 $n_0c_2n_1c_1$ が正の面積を持つ. 図 6 では, 三角形 $n_0c_2c_1$ と三角形 $n_1c_1c_2$ は負の値を持つことからマイナスの符号を付している. それらの和は四角形 $n_0c_2n_1c_1$ の面積に一致する. つまり, ボロノイ多角形は符号付きで平面を充填する. これは, 正の電荷と負の電荷が混在する状況に対応し, 物理的な直感とも合致する. 同様のことが, 3次元の符号付き体積に関しても言える.

Fig. 6 Schematic diagram of overlapping areas.

4・2 3次元ボロノイ分割における符号付き体積を用いたボロノイ面の符号付き面積の計算方法

外心ボロノイ分割を用いた場合, ドロネー分割とボロノイ分割は直交するので図 7 中の破線で囲まれた範囲の体積を V_1 とすると以下の関係式が成立する. 今後, この体積 (V_1) を基準体積と呼ぶ.

$$\text{Area}(\tilde{S}_i) = \frac{3V_1}{\text{Length}(l_i)} \quad (30)$$

Fig. 7 V_1 created by the i -th Delaunay edge and the i -th Voronoi face inside the analysis domain.

はじめに, 解析領域の内部に含まれるドロネー辺とそれに対応するボロノイ面の作る基準体積について考える. ドロネー辺は常に正であることと合わせると, 式 (30) 内のボロノイ面の符号は V_1 の符号によって決まることが分かる. つまり, 基準体積を符号付きで計算することでボロノイ面の面積を求めることができる. 以下で, V_1 の具体的な計算アルゴリズムを示す.

説明のため, 四面体 $e_0e_1e_2e_3$ の体積 ($V(e_0, e_1, e_2, e_3)$) を以下のように定義する.

$$V(e_0, e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

ただし, $e_i (i = 0, 1, 2, 3)$ の各座標を (x_i, y_i, z_i) とし, $\det()$ は行列式を表す.

基準体積をいくつかの四面体に分けて計算を行う. 四面体の4点は, ドロネー辺を構成する2点とそのドロネー辺を共有する四面体のうち隣接する二つの四面体の外心2点である. また, あるドロネー辺の向きづけによっ

て周囲の四面体に $T_0, T_1, \dots, T_n$, と名前を付けていく. 二つのドロネー一点 e_0 と e_1 で構成され, e_0 から e_1 への向き付けを与えられたドロネー一辺を考える. このドロネー一辺を共有する周囲の四面体に関して, e_1 から見て(矢印の先から見て)反時計回りに $T_0, T_1, \dots, T_n$, と名前を付ける. さらに, T_i ($0 \leq i \leq n$) の外心を c_i ($0 \leq i \leq n$) と定義する. このとき基準体積を以下のように定義する.

$$V_1 = \sum_{i=0}^{n-1} V(e_0, e_1, c_i, c_{i+1}) + V(e_0, e_1, c_n, c_0) \quad (32)$$

Fig. 8 Two examples of the Delaunay edge and the Voronoi face inside the analysis domain.

あるドロネー一辺を共有し隣接する四面体の外心が四面体の外部に出て, ボロノイ面が反転する時, 対応する四面体の体積が負になる. 例えば, 図8の右側の例の中の $V(e_0, e_1, e_4, e_5)$ は負であり, 反転したボロノイ面に対応する基準体積の一部が負になっていることが分かる. この様に, 基準体積は符号付き四面体の体積の和として表すことで求めることができる.

次に, 解析領域境界上のドロネー一辺と対応するボロノイ面の一部が作る基準体積について考える. 解析領域境界上のドロネー一辺に対応するボロノイ面は, 境界によって切断され不完全である. それに伴い, 基準体積も不完全である. そこで, 境界に面する四面体の外心から境界への垂線と境界の交点を求め, 基準体積の計算を行なった. 例えば, 図9の場合, 基準体積は p_0 と p_1 を含め

$$V_1 = \sum_{i=0}^{n-1} V(e_0, e_1, c_i, c_{i+1}) + V(e_0, e_1, p_0, c_1) + V(e_0, e_1, c_n, p_1) \quad (33)$$

と定義する. ただし, c_0, c_2 から境界 $\partial\Omega$ に下ろした垂線の足として p_0 と p_1 を定義している. ここで, c_i ($0 \leq i \leq n$) は領域内部と同様に定義を行なった. 境界に面する四面体の外心である c_0 もしくは c_n が, 解析領域の外部に出る場合それぞれ, 式(33)の第2項もしくは, 第3項が負になる.

Fig. 9 The incomplete Voronoi face at the boundary of the analysis domain.

上記に示した方法で求めた基準体積の値と式 (30) を用いて、ボロノイ面の符号付き面積を求めることができる。

4・3 3次元ボロノイ分割における符号付き体積を用いたボロノイ辺の符号付き長さの計算方法

ボロノイ辺の符号付き長さに関しても、対応するボロノイ辺とボロノイ面の作る基準体積 (V_2) と以下の関係式が成立する。ただし、 V_2 は図 10 内で、破線で囲まれる体積である。

$$\text{Length}(\tilde{l}_i) = \frac{3V_2}{\text{Area}(S_i)} \quad (34)$$

Fig. 10 V_2 created by the i -th Delaunay face and the i -th Voronoi edge inside the analysis domain.

図中の、青色の矢印はドロネー面の向きを示しており、ドロネー面を構成する周囲の3点に、面の向きを示す矢印の先から見て反時計回りの順で e_1 , e_2 , e_3 と与えた。また、与えたドロネー面の向きを示すベクトルの始点側の四面体の外心を c_0 、終点側の四面体の外心を c_1 と定義している。

ボロノイ面の場合と同様に、基準体積の符号はボロノイ辺の符号によって決まる。基準体積は以下のように、計算することができる。

$$V_2 = V(e_1, e_2, c_0, c_1) + V(e_2, e_3, c_0, c_1) + V(e_3, e_1, c_0, c_1) \quad (35)$$

c_0 から c_1 に向かう矢印が反転すると、基準体積は負になりボロノイ辺も負になる。

ドロネー面が解析領域境界上に存在する時は、式 (35) 中の c_0 , c_1 として、境界に接する四面体の外心と、その外心からドロネー面に下ろした垂線の足を用いて同様の計算をすれば良い。外心が解析領域の外に出るような場合は基準体積が負になる。

5. 収束性の数値解析

符号付き離散ホッジスター演算子を3次元の一般のメッシュに適用した際の、収束挙動の検証を行った。一般のメッシュとは、一部のドロネー四面体の外心が四面体の内部に含まれない様なメッシュのことを差す。つまり、ボロノイ面の面積やボロノイ辺の長さが負になることがあり得る。ただし、今回実験に用いたメッシュでは、ボロノイ面の面積とボロノイ辺の面積が0になることは無かった。本研究では、解析領域として一辺 100 m の立方体領域を用いて、真空中 ($\epsilon = \epsilon_0 = 8.84 \times 10^{-12}$ F/m) の電荷密度 ρ が以下のように与えられる時の、静電ポテンシャルの分布をポアソン方程式と境界条件から決定する問題を取り上げる。

$$\rho = \begin{cases} 1.0 \times 10^{-12} & C \quad (0 \leq r \leq 50\sqrt{3}) \\ 0 & C \quad (50\sqrt{3} < r) \end{cases} \quad (36)$$

ここで、 r はメッシュの中心からの距離であり、 C は単位のクーロンである。解くべき境界値問題は

$$\begin{cases} d \star_{\epsilon} d \phi = -\rho & \text{in } \Omega \\ \phi = \bar{\phi} & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (37)$$

である。ただし、 $\bar{\phi}$ は境界における理論解である。 Ω は解析領域全体を表す。この境界値問題に対する理論解は、無限遠をポテンシャルの基準として、本研究の解析領域が存在する半径 $50\sqrt{3}$ m の球の内部において以下の様に表される。

$$\phi(r) = \frac{\rho_1 R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_1}{6\epsilon_0} r^2 \quad (0 \leq r \leq 50\sqrt{3}) \quad (38)$$

これが本研究で設定した問題の理論解である。ただし、 $\rho_1 = 1.0 \times 10^{-12}$ 、 $R = 50\sqrt{3}$ であり、 r はメッシュの中心からの距離である。

補正項を含んだ離散ポアソン方程式（式（29））を、境界に存在するドロネー点については、式（38）で表される静電ポテンシャル ϕ の理論解を与えて、各ドロネー点での静電ポテンシャルを求めた。ただし、補正項を計算する際には境界における電束密度の理論解を用いた。

本研究で用いたメッシュについて示す。本研究では、解析領域を四面体分割したメッシュを用いた。ただし、メッシュに粗密はない。メッシュの詳細を以下に示す。

Table 1 Details of the meshes.

Mesh number	The number of nodes	The number of elements	The weighted average aspect ratio	The maximum length of Delaunay edges [m]
mesh1	1 047	4 833	0.7881	21.84
mesh2	13 593	76 093	0.7955	9.041
mesh3	104 952	630 773	0.7978	4.469
mesh4	307 428	1 888 182	0.7983	3.247
mesh5	1 007 682	6 288 544	0.7983	2.134
mesh6	2 991 719	18 855 917	0.7987	1.502
mesh7	11 859 412	75 369 928	0.7989	0.959

ただし、この表中の重み付き平均アスペクト比は以下の式で定義される η である（小国他，2004）。

$$\eta = \frac{1}{V} \sum_{i=0}^N \eta_i v_i \quad (39)$$

ただし、 η_i と v_i はそれぞれ、各四面体のアスペクト比と体積である。また、 N と V はそれぞれ、メッシュ内の四面体総数と解析領域体積である。本研究でアスペクト比は、四面体の内接球半径の3倍を外接球半径で割ったものを用いた。以下に、例として本研究で用いたメッシュの一つを示す。

Fig. 11 The example of the meshes. It has 1047 nodes and 4833 tetrahedral elements.

また、以下に例として計算の結果得られた静電ポテンシャル ϕ の xy 平面でのコンター図を示す。

Fig. 12 The example of the numerical solutions. (a) is the result got by mesh1, which has 1047 nodes, and (b) is the result got by mesh2, which has 13593 nodes.

また、さらに数値実験の際に計算された、各メッシュに対する4章中で V_1 を用いて表される基準体積の分布のヒストグラムを本論文の最後に Appendix として示した。

誤差の指標として、以下の様に定義される静電ポテンシャルの誤差の L^2 ノルムを正規化したもの E_{L^2} を採用し、収束の挙動を調べた。

$$E_{L^2} = \frac{\left(\int_{\Omega} |\phi - \hat{\phi}|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\Omega} |\phi|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (40)$$

ただし、 ϕ は理論解を、 $\hat{\phi}$ は符号付き離散ホッジスター演算子を用いて計算された各ドロネー点での静電ポテンシャルを線形補間した数値解を表す。図13は、計算した L^2 誤差ノルムと最大のドロネー辺の長さの関係をプロットした図である。図13から符号付き離散ホッジスター演算子を、四面体の外心が四面体の外部に出るような一般のメッシュに適用し得られる数値解は理論解に収束することが分かる。この結果は、符号付き離散ホッジスター演算子は、ボロノイ面の面積やボロノイ辺の長さが0にならない一般のメッシュにおいて、理論解に収束する正しい数値解を与えることを示している。

6. 結 論

外心ボロノイ分割において、符号付き離散ホッジスター演算子を定義した。定義した離散ホッジスター演算子は、対角行列であり、ボロノイ面の面積やボロノイ辺の長さが 0 にならないメッシュにおいて正則性を持つ。しかし、一般には正定値性は持たない。

符号付き離散ホッジスター演算子を求める際に必要な符号付き体積の、ベクトル解析に基づく単純な計算方法を示した。この符号付き体積の計算方法は、Hirani らの提案する向き付け (Hirani et al., 2013) よりも直感的で理解しやすいものである。さらに、この方法は、符号付き体積および符号付き離散ホッジスター演算子を求める簡便なアルゴリズムを与える。

求めた離散ホッジスター演算子を用いて 3 次元のポアソン方程式の数値解を求めた。また、その数値解と理論解の L^2 誤差ノルムを誤差指標とした誤差解析を行った。解析の結果、数値解は 2 次のオーダーで理論解に収束し正しい数値解を与えることを示した。この結果は、符号付きホッジスター演算子は、外心に対応する四面体の外部に出る一般のメッシュに対しても適用可能である可能性を示唆している。ただし、ボロノイ面の面積やボロノイ辺の長さが 0 になる場合を除く。さらに、得られる行列が対角行列であり、逆行列を容易に求めることができることから、有限要素法に容易に陽解法を適用することができる。このことから、符号付き体積を用いた離散ホッジスター演算子は、離散ホッジスター演算子の有力な候補であると考えられる。

Fig. 13 The L^2 error convergence for Poisson's equations in a second order. The L^2 error for electric scalar potential is plotted against the maximum length of the Delaunay edges. This result indicates that signed diagonal Hodge star operators produce the correct numerical solution for the general Delaunay meshes.

文 献

- Auchmann, B. and Kurz, S., A geometrically defined discrete Hodge operator on simplicial cells, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.42, No.4 (2006), pp.643-646.
- Bossavit, A., Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computation in electromagnetism, IEE proceedings A, Vol.135, No.8 (1988), pp.493-500.
- Bossavit, A. and Kettunen, L., Yee-like scheme on staggered cellular grids: a synthesis between FIT and FEM approaches, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.36, No.4 (2000), pp.861-867.
- Desbrun, M., Kanso, E. and Tong, Y., Discrete differential forms for computational modeling, Discrete Differential Geometry, Vol.38 (2008), pp.287-324.
- Donderici, B. and Teixeira, F. L., Mixed finite-element time-domain method for transient maxwell equations in doubly dispersive media, IEEE Transactions on Microwave and Techniques, Vol. 56, No.1 (2008), pp.113-120.
- Hirani, A. N., Discrete exterior calculus, Pasadena, California Institute of Technology (2003), Ph.D. thesis.
- Hirani, A. N., Kalyanaraman, K. and VanderZee, E. B., Delaunay Hodge star, Computer-Aided Design, Vol. 45, No. 2 (2013), pp.540-544.

- Hirani, A. N., Kalyanaraman, K. and VanderZee, E. B., Corrigendum to “Delaunay Hodge star” [Comput. Aided Dec. 45 (2013) 540-544], Computer-Aided Design, Vol. 96 (2018), pp.59-60.
- 五十嵐一, 亀有昭久, 加川幸雄, 西口磯春, A. Bossavit, 新しい計算電磁気学, 培風館 (2003), p.230.
- 宮田健治, 辺要素有限要素法による磁界解析について, 電気学会論文誌 C, Vol.124, No.7 (2004), pp.1404-1409.
- 牟禮良晃, 河野晴彦, 交流磁場下における導体壁に囲まれた電磁流体流れの 3 次元解析, 日本機械学会論文集, Vol.84, No.863 (2018), DOI:10.1299/transjsme.17-00589.
- Nedelec, J. C., Mixed finite elements in R^3 , Numerische Mathematik, Vol.35, No.3 (1980), pp.315-341.
- 小国健二, 堀宗朗, 阪口秀, 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案, 土木学会論文集, Vol.2004, No.766 (2004), pp.203-217.
- Tarhassari, T., Kettunen, L. and Bossavit, A., Some realization of a discrete Hodge star: a reinterpretation of finite element techniques, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 3 (1999), pp.1494-1497.
- Tonti, E., A direct discrete formulation of field laws: the cell method, CMES: Computer Modeling in Engineering and Science, Vol.2, No.2 (2001), pp.237-258.
- Yee, K.S., Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.14, No.3 (1966), pp.302-307.

References

- Auchmann, B. and Kurz, S., A geometrically defined discrete Hodge operator on simplicial cells, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.42, No.4 (2006), pp.643-646.
- Bossavit, A., Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computation in electromagnetism, IEE proceedings A, Vol.135, No.8 (1988), pp.493-500.
- Bossavit, A. and Kettunen, L., Yee-like scheme on staggered cellular grids: a synthesis between FIT and FEM approaches, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.36, No.4 (2000), pp.861-867.
- Desbrun, M., Kanso, E. and Tong, Y., Discrete differential forms for computational modeling, Discrete Differential Geometry, Vol.38 (2008), pp.287-324.
- Donderici, B. and Teixeira, F. L., Mixed finite-element time-domain method for transient maxwell equations in doubly dispersive media, IEEE Transactions on Microwave and Techniques, Vol. 56, No.1 (2008), pp.113-120.
- Hirani, A. N., Discrete exterior calculus, Pasadena, California Institute of Technology (2003), Ph.D. thesis.
- Hirani, A. N., Kalyanaraman, K. and VanderZee, E. B., Delaunay Hodge star, Computer-Aided Design, Vol. 45, No. 2 (2013), pp.540-544.
- Hirani, A. N., Kalyanaraman, K. and VanderZee, E. B., Corrigendum to “Delaunay Hodge star” [Comput. Aided Dec. 45 (2013) 540-544], Computer-Aided Design, Vol. 96 (2018), pp.59-60.
- Igarashi, H., Kameari, A., Kagawa, Y., Nishiguchi, I. and Bossavit, A., Atarashii keisan denjikigaku, Baifukan (2003), p.230 (in Japanese).
- Miyata, K., Magnetic field analysis by the edge element FEM, The transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan. C, A publication of Electronics, Information and Systems Society, Vol.124, No.7 (2004), pp.1404-1409 (in Japanese).
- Mura, Y. and Kohno, H., Three-dimensional numerical analysis of magnetohydrodynamic flow bounded by conducting walls under alternating-current magnetic fields, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.84, No.863 (2018), DOI:10.1299/transjsme.17-00589.
- Nedelec, J. C., Mixed finite elements in R^3 , Numerische Mathematik, Vol.35, No.3 (1980), pp.315-341.
- Oguni, K., Hori, M. and Sakaguchi, H., Proposal of new FEM for analysis of failure phenomena, Journal of Japan Society of Civil Engineering, Vol.2004, No.766 (2004), pp.203-217 (in Japanese).
- Tarhassari, T., Kettunen, L. and Bossavit, A., Some realization of a discrete Hodge star: a reinterpretation of finite element techniques, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 3 (1999), pp.1494-1497.

- Tonti, E., A direct discrete formulation of field laws: the cell method, CMES: Computer Modeling in Engineering and Science, Vol.2, No.2 (2001), pp.237-258.
- Yee, K.S., Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.14, No.3 (1966), pp.302-307.

Appendix

以下に、数値実験の際に計算された基準体積の分布のヒストグラムを示す。ただし、横軸は基準体積を、基準体積の絶対値の最大値で正規化した値である。

Fig. 1-A-(1) mesh1.

Fig. 1-A-(2) mesh2.

Fig. 1-A-(3) mesh3.

Fig. 1-A-(4) mesh4.

Fig. 1-A-(5) mesh5.

Fig. 1-A-(6) mesh6.

Fig. 1-A-(7) mesh7.

Fig. 1-A The histogram of normalized signed volume (V_1).