穴あき板で仕切られた一次元音場の音響固有周波数の推定法に関する研究

石原 国彦^{*1}, 工藤 哲^{*2}

Study on a method for estimating acoustic natural frequency of one dimensional sound field partitioned by perforated plate

Kunihiko ISHIHARA^{*1} and Satoru KUDO^{*2}^{*1, *2} Tokushima Bunri Univ. Dept. of Clinical Engineering
1314-1 Shido, Sanuki-Shi, Kagawa 769-2193, Japan

Received: 16 January 2019; Revised: 28 May 2019; Accepted: 25 August 2019

Abstract

A perforated plate is used as an acoustic absorption material for compressors and acoustic barriers for roads and railways. The effects of the perforated plate on the acoustic natural frequency of an one dimensional sound field partitioned with the perforated plate has been studied in our previous investigations. And it was clarified that the acoustic natural frequency of the one dimensional sound field partitioned with the perforated plate becomes lower as the aperture ratio becomes smaller. There are two methods obtaining the acoustic natural frequencies. One is the method based on the eigenvalue analysis. And the other is the one based on the peak frequency of the response analysis. In this paper, the impedance derived by Melling is used for the response analysis. we compared two acoustic natural frequencies calculated by different two methods. As a result, it was clarified that the acoustic natural frequency calculated by the response analysis was a little smaller than that calculated by the eigenvalue analysis in all conditions. But its difference is small, and both the acoustic natural frequencies calculated by two methods agree with experimental results. And it has become easier to physically understand the analytical and experimental results by considering and comparing the element of transfer matrix.

Keywords : Noise control, Sound and acoustics, Acoustic natural frequency, Perforated plate, Transfer matrix method

1. 緒 言

穴あき板は、産業界において圧縮機用消音器に対する吸音材（木村他，2009）や道路・鉄道用防音壁の吸音材として用いられている（次橋他，2014）。また、熱交換器のダクト壁に穴あき板を適用して大音響騒音を抑制できることを確認している（石原他，2016），（石原，2017）。これらは穴あき板の吸音に着目した研究であるが、本研究では、穴あき板で仕切られた一次元音場を対象として穴あき板の共鳴周波数（以下音響固有周波数）に及ぼす影響について検討してきた（石原他，2017）。そして、実験や伝達マトリックス法による解析を行った結果、実験と解析の結果はよく一致し、開口率を減少させると音響固有周波数が下がることが明らかになった（石原他，2017）。また、この現象は音波が開口部を通過する際、時間遅れを生じ、見かけの音速が減少したものと解釈した（石原他，2018）。さらにこれを明らかにするために、音の伝搬速度を求める実験を行い、見かけの音速が減少することを確認した（工藤，石原，2017）。これまでは穴あき板で仕切られた一次元音場の音響固有周波数に及ぼす穴あき板の開口率の影響について伝達マトリックス法によって導出した振動数方程式より共鳴周波数を求める手法（以

下固有値解析)を用いてきた。そして先の研究では開口率のみならず穴の長さやダクト長手方向の設置位置の音響固有周波数に及ぼす影響を明らかにし、実験結果とも比較してよく一致することを示した(石原, 工藤, 2019)。一方、共鳴周波数を求める方法として、応答解析を行い音圧レベルがピークとなる周波数を求めることもしばしば行われる(以下応答解析)。その際には共振ピークが無限大にならないように穴部の音響インピーダンスを伝達行列に適用する必要がある、その結果固有値解析とは行列の値が異なることになる。本論文では行列の値が異なることで音響固有周波数にどのような影響があるのか、また固有値解析、応答解析のいずれの解析結果が実験値によく合うのか、さらにすべての条件で応答解析値が固有値解析値より小さく現れる点に着目し、その理由を明らかにした点等に新規性を持たせた。したがって、固有値解析に用いた伝達マトリックス法の穴あき板に対応する行列において、穴あき板の減衰を考慮するために Melling の論文 (Melling, 1973)にある穴部のインピーダンスを適用し、伝達マトリックス法を用いた応答解析を行い音圧レベルのピークから共鳴周波数を計算した(以下応答解析)。さらに、実験結果と固有値解析結果および応答解析結果を比較し、二つの解析方法の違いについて検討を行った。これによって、穴あき板で仕切られた一次元音場の共鳴周波数の推定に適した解析手法について知見を得る。

2. 固有値解析と応答解析

2・1 固有値解析の方法

図1に示す一次元ダクトの断面変化する箇所および端部に図のように番号を付け、各位置での状態ベクトルを $[P_i \ U_i]^T$ ($i=1\sim4$) で表すと両端部の状態ベクトルの間には式(1)が成り立つ。ここで P_i , U_i はそれぞれ音圧と体積速度である。

$$\begin{bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kl_2 & jZ_2 \sin kl_2 \\ j\frac{1}{Z_2} \sin kl_2 & \cos kl_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos kl_3 & jZ_3 \sin kl_3 \\ j\frac{1}{Z_3} \sin kl_3 & \cos kl_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos kl_1 & jZ_1 \sin kl_1 \\ j\frac{1}{Z_1} \sin kl_1 & \cos kl_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Fig.1 Analytical model of 1D duct.

ダクトの両端は閉であるので境界条件は次式で与えられる。

$$U_1 = 0, \quad U_4 = 0 \quad (2)$$

この境界条件を式(1)に適用すると振動数方程式

$$|A_{21}| = 0 \quad (3)$$

を得る。ここで A_{21} は式(4)で与えられる。

$$A_{21} = j\frac{1}{Z_2} \sin kl_2 \left(\cos kl_3 \cos kl_1 - \frac{Z_3}{Z_1} \sin kl_3 \sin kl_1 \right) + j \cos kl_2 \left(\frac{1}{Z_3} \sin kl_3 \cos kl_1 + \frac{1}{Z_1} \cos kl_3 \sin kl_1 \right) \quad (4)$$

開口率 φ (S_3/S_2) の穴あき板を含む音響管の振動数方程式として最終的に式 (5) が得られる.

$$\sin kl_2 \left(\cos kl_3 \cos kl_1 - \frac{1}{\varphi} \sin kl_3 \sin kl_1 \right) + \cos kl_2 (\varphi \sin kl_3 \cos kl_1 + \cos kl_3 \sin kl_1) = 0 \quad (5)$$

式 (5) において, 開口率 φ が 1%, 4% および 16% のときの音響固有振動数を穴あき板の穴の長さ l_3 が, 0.0023 m, 0.0046 m, 0.01 m および 0.02 m, l_1 および l_2 が, $l_1=0.434$ m かつ $l_2=0.400$ m および $l_1=0.634$ m かつ $l_2=0.200$ m の場合について計算した. ここで, S_2 , S_3 はそれぞれダクト断面積と穴あき板の開口面積である.

2・2 応答解析の方法

応答解析では減衰の効果を考慮するために穴あき板の一個の穴の直径を用いて穴部のインピーダンスを計算した. そのため, 式 (1) の伝達マトリックスにおける穴部に関する行列である

$$\begin{bmatrix} \cos kl_3 & jZ_3 \sin kl_3 \\ j\frac{1}{Z_3} \sin kl_3 & \cos kl_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

を式 (7) で示す行列に置き換えて式 (8) により計算を行った.

$$\begin{bmatrix} 1 & Z_R + jZ_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kl_2 & jZ_2 \sin kl_2 \\ j\frac{1}{Z_2} \sin kl_2 & \cos kl_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_R + jZ_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos kl_1 & jZ_1 \sin kl_1 \\ j\frac{1}{Z_1} \sin kl_1 & \cos kl_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで $Z_R + jZ_i$ は穴あき板の音響インピーダンスを示している. Melling の研究 (Melling, 1973) によれば穴 1 個の特性インピーダンスは次式で与えられる.

$$Z' = \frac{l}{r_0} \sqrt{2\rho\mu\omega} + j\omega\rho l \left[1 + \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}} \right] \quad \text{for} \quad r_0 \sqrt{\omega\rho/\mu} > 10 \quad (9)$$

ここで r_0, l はそれぞれ穴の半径と長さ, ρ, μ はそれぞれ空気密度と粘性係数である. ω は角周波数である. 多くの穴があり, 互いに干渉が無い場合の特性インピーダンス $Z_R + jZ_i$ は

$$Z_R + jZ_i = Z' \frac{S}{S_3} = \frac{Z'}{\varphi} \quad (\varphi: \text{開口率}) \quad (10)$$

で与えられる. ここで S_3 は穴の面積, φ は開口率, $S (=S_1, S_2)$ はダクトの断面積である.

式 (8) において P_4 は境界条件, $U_1=1$, $U_4=0$ を考慮すると式 (11) で与えられる.

$$P_4 = \frac{-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}}{A_{21}} \quad (11)$$

式 (11) を計算しピークを与える波数 k より求めた周波数を共鳴周波数とした. ピークを与える周波数は式 (11) の分子が定数であるため A_{21} の絶対値を最小にする周波数である. ただし $A_{11} \sim A_{22}$ は以下の式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned}
 A11 &= \cos kl_2 \cos kl_1 - \frac{Z_i}{Z_1} \cos kl_2 \sin kl_1 - \frac{Z_2}{Z_1} \sin kl_2 \sin kl_1 + j \frac{Z_R}{Z_1} \cos kl_2 \sin kl_1 \\
 A12 &= Z_R \cos kl_2 \cos kl_1 + j [Z_1 \cos kl_2 \sin kl_1 + Z_i \cos kl_2 \cos kl_1 + Z_2 \sin kl_2 \cos kl_1] \\
 A21 &= -\frac{Z_R}{Z_1 Z_2} \sin kl_2 \sin kl_1 + j \left[\frac{1}{Z_2} \sin kl_2 \cos kl_1 - \frac{Z_i}{Z_2 Z_1} \sin kl_2 \sin kl_1 + \frac{1}{Z_1} \sin kl_1 \cos kl_2 \right] \\
 A22 &= \left[\cos kl_2 \cos kl_1 - \frac{Z_1}{Z_2} \sin kl_2 \sin kl_1 - \frac{Z_i}{Z_2} \sin kl_2 \cos kl_1 \right] + j \frac{Z_R}{Z_2} \sin kl_2 \cos kl_1
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. 実験方法

3・1 実験装置

穴あき板の開口率や穴の長さの音響固有周波数に及ぼす影響を明らかにするための実験装置を図2、図3に示す。穴あき板の設置位置は図2に示す2通りとした。また、図3にスピーカの設置位置を示す。スピーカの口径は65φ、Fostex (FE83-Sol)でダクト断面(200×200)の上部中央に設置して境界条件は閉とした。

Fig.2 Position of perforated plate.

Fig.3 Experimental apparatus.

3・2 実験パラメータ

実験パラメータは穴あき板の開口率で1%, 4%, 16%および100% (穴あき板無し)で、各開口率に対し穴の長さ(穴あき板の厚み)は2.3 mm, 4.6 mm, 10 mm および 20 mm である。ここで用いた穴あき板は厚みが2.3 mm, 4.6 mm のものはこれまでの研究で用いた鋼製で穴径3 mm で千鳥配列のものであり、厚みが10 mm, 20 mm のものはアクリル製で穴径3 mm で正方配列のものである。これらの写真を図4に示す。

3・3 実験方法

図2に示すように長さ434 mmと400 mm または、634 mmと200 mmのダクトの間に穴あき板を設置し、パソコンからランダムノイズを出し、アンプで増幅したのちスピーカから音をダクトに与える。ダクト内の音を図3に示した位置に置かれたマイクロホンで拾い、その出力をFFTアナライザー(RION社製, SA78)に導き、周波数分析する。図5は周波数分析結果の一例であるが、このような図のピークとなる周波数を音響固有周波数とした。ここで周波数分解能は6.25 Hzである。また、ここでは平面波理論が成り立つ $f=c/2b=850$ Hzまでに存在する1次、2次および3次の音響固有周波数を求めた。ただし、 b はダクトの辺長(0.2 m)、 c は音速である。ちなみ

に穴あき板が無い場合の音響固有周波数は長さが 0.834 m の両端閉の境界条件の音響固有周波数であるから式 (13) で求められる。

Fig.4 Perforated plates used in this experiment.

$$f_{ni} = i \frac{c}{2l} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

ここで c , l はそれぞれ音速 (室温 20℃で 343.5 m/s) とダクト長さ (0.834 m) である。したがって 1 次, 2 次, 3 次の音響固有周波数はそれぞれ 205.9 Hz, 411.9 Hz, 617.8 Hz となる。一方実験値はそれぞれ 200.0 Hz, 425.0 Hz, 618.75 Hz であり周波数分解能 6.25Hz を考慮すると両者はほぼ一致していると言える。

Fig.5 Example of frequency analysis.

4. 実験結果と固有値解析値と応答解析値の比較および考察

図 6～図 11 にそれぞれ開口率が 1%, 4%, および 16% の場合の穴の長さに対する音響固有周波数の変化を示す。実線は固有値解析による結果 (以下固有解析値), 点線は応答解析による結果 (以下応答解析値), ○印は実験による結果 (以下実験値) を示している。また, 図 6～図 8 はスピーカより 434 mm の位置に穴あき板を設置した場合の結果であり, 図 9～図 11 はスピーカより 634 mm の位置に穴あき板を設置した場合の結果である。すべての図において実験値はいずれの解析値ともおおむね一致している。しかしながらより詳細にみると低次モード (1 次モード) では応答解析結果が, 高次モード (2, 3 次モード) では固有値解析結果が実験結果に近い。これら解析と実験の結果から穴の長さの音響固有周波数に及ぼす影響はこれらの結果から知ることができる。すなわち,

穴の長さが長くなるほど音響固有周波数は低下し、穴あき板の音響固有周波数へ及ぼす影響は開口率が大きくなるほど少なくなる点である。一般に開口率が約20%を超えると音響的には穴あき板がないのと同じであり(石原, 2017), そうであれば穴の長さの影響が少なくなるのは当然のことである。また, 図6の開口率が1%の結果に示すように3次モードのピークが穴の長さが0.02 mのとき生じていないことが分かる。これは穴あき板の設置位置が粒子速度モードの3次の腹になっていることから音響減衰比が大きくなったため3次モードが励起されにくいためである(石原他, 2018)。また図6～図8において2次モードの音響固有周波数が穴の長さが変わっても変化していない。これは穴あき板がダクトの2次の粒子速度モードの節に置かれているため、穴の影響が現れないためである。

さらに, 図6～図11において固有値解析値と応答解析値は同様の傾向を示し, すべての解析条件において応答解析値の方がわずかに低い値となる傾向を示した。そして, 1次モードに着目するとわずかであるが, 応答解析値の方が固有解析値よりも実験値に近い値を示した。本研究における固有値解析値と応答解析値の違いは伝達マトリックス法における穴あき板に対応する行列の違いによるものであるが, 周波数と穴の長さの範囲によってはその違いはわずかなものとなることを以下で考察する。

Fig. 6 Comparison of experimental result with two analytical results ($l_1=434$ mm, $\phi=0.01$). The acoustic natural frequencies of 1st mode and 3rd mode decreased with increasing the length of the hole. But the effect of the hole length on that of 2nd mode was not observed.

Fig. 7 Comparison of experimental result with two analytical results ($l_1=434$ mm, $\phi=0.04$). The acoustic natural frequency of the 1st mode should be solved by the response analysis and that of the 3rd mode by the eigenvalue analysis in comparison the both analytical results with the experimental one.

Fig. 8 Comparison of experimental result with two analytical results ($l_1=434$ mm, $\phi=0.16$). The acoustic natural frequency of 3rd mode calculated by the eigenvalue analysis was closer to the experimental result than that calculated by the response analysis. And this tendency was remarkable as the hole length was longer.

Fig. 9 Comparison of experimental result with two analytical results ($l_1=634$ mm, $\phi=0.01$). The acoustic natural frequencies of 1st, 2nd and 3rd mode decreased with increasing of the hole length. The analytical results by the eigenvalue analysis and those by the response analysis were almost matched for all modes.

Fig. 10 Comparison of experimental result with two analytical results ($l_1=634$ mm, $\phi=0.04$). The acoustic natural frequency of 2nd mode calculated by the eigenvalue analysis was closer to the experimental result than that by the response analysis for every hole length.

Fig. 11 Comparison of experimental result with two analytical results ($l_1=634$ mm, $\phi=0.16$). The acoustic natural frequency of 2nd mode calculated by the eigenvalue analysis was closer to the experimental result than that calculated by the response analysis. And this tendency was remarkable as the hole length was longer.

5. 固有値解析値および応答解析値における伝達マトリックスの比較

今回、固有値解析結果、応答解析結果および実験結果はお互いによく一致した。この理由について以下に固有値解析および応答解析の伝達マトリックス法における行列の要素を比較し検討する。固有値解析による振動数方程式は式 (4) の絶対値を 0 とおいて得られるものであることを 2・1 節で示した。式 (4) は kl_3 が小さいとき $\cos kl_3 \approx 1$, $\sin kl_3 \approx kl_3$ または, $\frac{1}{Z_3} \sin kl_3 \approx 0$ であることから式 (14) で置き換えられる。

$$A_{21} = j \left(\frac{1}{Z_2} \sin kl_2 \cos kl_1 - \frac{Z_3}{Z_1 Z_2} kl_3 \sin kl_2 \sin kl_1 + \frac{1}{Z_1} \cos kl_2 \sin kl_1 \right) \quad (14)$$

一方、応答解析においてピークとなる振動数は式 (11) の分母の A_{21} を極小化する値である。式 (11) の A_{21} は式 (15) であり、これを A_{21}' とする。

$$A_{21}' = \frac{Z_R}{Z_1 Z_2} \sin kl_2 \sin kl_1 + j \left(\frac{1}{Z_2} \sin kl_2 \cos kl_1 - \frac{Z_i}{Z_1 Z_2} \sin kl_2 \sin kl_1 + \frac{1}{Z_1} \cos kl_2 \sin kl_1 \right) \quad (15)$$

A_{21} と A_{21}' の違いは A_{21}' に実部の $\frac{Z_R}{Z_1 Z_2} \sin kl_2 \sin kl_1$ があることと、虚部の第 2 項の係数が A_{21} において $\frac{-Z_3}{Z_1 Z_2} kl_3$ であり、 A_{21}' において $\frac{-Z_i}{Z_1 Z_2}$ であることである。そして、この係数の違いは分子の $Z_3 kl_3$ および Z_i が異なるのみである。また、 Z_i は式 (9) より

$$1 \gg \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}} \quad (16)$$

となる周波数の範囲において式 (17) の最右辺で近似できる。ここで、開口面積で除してあるのは体積速度に対する抵抗である事を考慮したためである。

$$Z_i = \frac{\omega \rho l_3}{S_3} \left[1 + \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}} \right] \approx \frac{\omega \rho l_3}{S_3} \quad (17)$$

一方, $Z_3 k l_3$ は式 (18) で表され, 式 (17) と一致することが分かる.

$$Z_3 k l_3 = \frac{\rho c}{S_3} \cdot \frac{\omega}{c} l_3 = \frac{\rho \omega l_3}{S_3} \quad (18)$$

式 (16) の右辺は周波数 f が 100 Hz, 穴の半径 r_0 が 1.5 mm, 空気の粘性率が 1.8×10^{-5} pa·s, 空気の密度が 1.2 kg/m^3 とすると,

$$\frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}} = \frac{1}{1.5 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \times 1.8 \times 10^{-5}}{1.2 \times 2 \times 3.14 \times 100}} \approx 0.146 \quad (19)$$

であり, 式 (16) の条件を満たすことが分かる. よって周波数が 100 Hz 以上では式 (15) の近似が可能であることが分かる.

そのため, A_{21}' の実部が大きくなるほど固有値解析と応答解析の結果に差が生じると予測される. この差は A_{21} と A_{21}' を複素平面に表示するとわかりやすい. 図 12 に A_{21} と A_{21}' の関係を示す. また, A_{21}' は複素数であり周波数, すなわち波数 k の変化によってその値は変化する. その軌跡を図 13 に示す. 図 13 より A_{21}' の実部は虚部に比べ十分小さく, 虚部が 0 になるとき実部もほぼ 0 となることが分かる. そのため, $|A_{21}|$ が 0 となるような周波数において $|A_{21}'|$ もほぼ 0 となり音響固有振動数はほぼ等しくなる. 次に図 14 に応答解析において音圧レベルの 1 次, 2 次, 3 次のピークに対応する A_{21}' の複素平面上の位置を示す. この図は図 13 の実軸を拡大して示したものである. 周波数が 0 のとき複素座標は原点にあって周波数が上がるにつれて図のような軌跡を描く. 一次モードに対応する位置を●, 2 次モードに対応する位置を▲, 3 次モードに対応する位置を■で示している. いずれの位置も A_{21}' の虚部がほぼ 0 となる位置である事が確認できる.

今回の実験と解析に用いたモデルにおいて, 二つの解析結果はほぼ等しい値を示し実験結果ともよく一致した. 本実験によって, 本研究に用いた穴あき板の穴の長さや開口率の範囲であれば固有値解析, 応答解析のどちらを用いても固有振動数を計算することが可能であることがわかった.

Fig. 12 Relationship of A_{21} and A_{21}' . The differences of the real part and the imaginary part between A_{21} and A_{21}' were indicated on the complex plane.

Fig. 13 Trajectory of A_{21}' by changing of frequency. The trajectory of A_{21}' with changing the frequency is indicated in figure 13. The real part of A_{21}' is very smaller than the imaginary part of A_{21}' .

Fig. 14 Position of A_{21}' corresponding to acoustic natural frequency. A_{21}' corresponding to the acoustic natural frequencies of 1st, 2nd and 3rd modes are indicated by ●, ▲, ■ respectively. It can be confirmed that the imaginary part of these A_{21}' is nearly zero.

6. 応答解析による音響固有周波数が固有値解析によるそれより小さくなる理由

前章では固有値解析と応答解析による音響固有周波数の差はわずかであり、両者は実験値とよく一致することを示した。しかしながら4章において「図6～図11において音響固有周波数の固有値解析値と応答解析値は同様の傾向を示し、すべての解析条件において応答解析値の方がわずかに低い値となる傾向を示した。」と述べたので本章ではその理由について検討する。

はじめに式(4)を kl_3 が小さいとき、 $\cos kl_3 \approx 1$ 、 $\sin kl_3 \approx kl_3$ または、 $\frac{1}{Z_3} \sin kl_3 \approx 0$ として近似した式(14)と比較する。一例として $l_1=0.434\text{m}$ 、 $l_2=0.4\text{m}$ 、 $l_3=0.02\text{m}$ 、 $\phi=0.04$ についての計算結果を図15に示す。図15より式(4)と式(14)は全く重なっており近似による誤差は無視してよいことが明らかになった。このことはすべての条件で計算し確認している。すなわち式(4)と式(14)は同一とみなしてよい。

次に応答解析における式(11)の分子は数値解析的にも理論的にも-1となり、応答がピークとなる周波数は式(15)の絶対値が極小となるときのそれである。前章において式(15)は実数部と虚数部が存在し、応答が最大となるときの虚数部はほぼ0に近く、実数部も非常に小さいことを示した。そこで式(15)の虚数部を計算し、図

Fig. 15 Comparison of each expressions of eigenvalue equation. Eq.(4) and Eq.(14) are totally overlapping, it can be confirmed that Eq.(4) and Eq.(14) are match. On the other hand, the imaginary part of A_{21}' and Eq.(4) is not matched. And the intersection point of the imaginary part of A_{21}' with the frequency axis, these indicate the acoustic natural frequencies, are smaller than those of Eq.(4) for the 1st and 3rd modes.

15の上に示すと緑色で示す線のようになった．これをみると式(15)の虚数部は式(4)と式(14)とは異なっており，また周波数軸と交差する点(音響固有周波数)がその他の線が交差する点に比べて1次，3次モードで小さくなっていることがわかる．2次モードはほとんど同じである．このことは計算条件が同じである図7の結果と全く同じである．すなわちこの段階で音響固有周波数の応答解析値が固有値解析値より小さくなる理由が明らかになった．つまり応答解析による音響固有周波数が固有値解析によるそれより小さくなるのは式(15)の実数部の影響ではないと言える．したがって式(17)を導く際に用いた近似は誤差を生む原因となる．

減衰のある一次元音場の応答解析では式(15)の絶対値が極小値をとる周波数が音響固有周波数となる．式(15)は実部と虚部を有しており，その絶対値は $\sqrt{\text{Real}(A_{21})^2 + \text{Imag}(A_{21})^2}$ で与えられる．この極小値を解析的に求めるのは困難なのでここでは実数部の音響固有周波数へ及ぼす影響が無視できることを振動解析により示す．

一般に一次元ダクト音場は棒とみなせる．したがって棒の縦振動を考える．棒の縦振動の運動方程式は変位を u とすると，式(20)で与えられる．

$$-\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (20)$$

ここで ρ ， A ， E は棒のそれぞれ密度，断面積，ヤング率である．

この式に単位面積，単位長さ当たりの粘性係数を c ($\text{N} \cdot \text{S}/\text{m}^4$) を考慮すれば，

$$-\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - cA \frac{\partial u}{\partial t} + AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (21)$$

両辺を ρA で除すと，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ただし, } \gamma = \frac{c}{\rho}$$

ここで $a^2 = \frac{E}{\rho}$ とおけば，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

$u_i(x, t) = \varphi_i(x) \cdot q_i(t)$ (i : モードの次数) とおいて式(22)に代入すると

$$\varphi_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \gamma \varphi_i \frac{dq_i}{dt} - a^2 \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \cdot q_i = 0 \quad (23)$$

両辺に φ_j を掛けて $0 \sim l$ まで積分すると

$$\int_0^l \varphi_i \varphi_j \cdot dx \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \gamma \int_0^l \varphi_i \varphi_j \cdot dx \frac{dq_i}{dt} - a^2 \int_0^l \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \cdot \varphi_j \cdot dx \cdot q_i = 0$$

$$\text{モードの直交性より } \int_0^l \varphi_i \varphi_j \cdot dx = \begin{cases} i \neq j & 0 \\ i = j & A \end{cases} \quad (24)$$

また、部分積分を行い境界条件 $\varphi_i(0)=\varphi_i(l)=0$ を考慮すると

$$\int_0^l \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \cdot \varphi_j \cdot dx = \left. \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \varphi_j \right|_0^l - \int_0^l \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx = - \int_0^l \left(\frac{d\varphi_i}{dx} \right)^2 dx = -B$$

したがって

$$A_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \gamma A_i \frac{dq_i}{dt} + a^2 B_i \cdot q_i = 0$$

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + \gamma \frac{dq_i}{dt} + a^2 \frac{B_i}{A_i} \cdot q_i = 0 \quad (25)$$

ここで $a^2 \frac{B_i}{A_i} = \omega_i^2$, $\gamma = 2\zeta_i \omega_i$ とおけば

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + 2\zeta_i \omega_i \frac{dq_i}{dt} + \omega_i^2 \cdot q_i = 0 \quad (26)$$

式 (26) の解は

$$q_i = \exp(-\zeta_i \omega_i t) \sin \omega_{di} t \quad (27)$$

となり減衰付固有円振動数は

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (28)$$

となる．一般に ζ_i は $10^{-1} \sim 10^{-2}$ のオーダーであるから式 (28) から $0.995 \sim 0.99995$ となり、減衰の固有振動数に及ぼす影響は無視できると言える．

7. 結 言

一次元音場における固有音響周波数の解析方法について、伝達マトリックス法を用いて固有値解析と応答解析を比較した．その結果以下の知見を得た．

- (1) 固有値解析により計算した音響固有周波数と応答解析により計算したそれはほぼ一致しており、どちらの解析結果も実験結果とよく一致することが分かった．しかしながらより詳細にみると低次モード（1次モード）では応答解析結果が、高次モード（2, 3次モード）は固有値解析結果が実験結果に近いことが言える．
- (2) 応答解析に Melling が導出した音響インピーダンスを適応した場合、伝達マトリックスの非対角要素に実部を含む複素数が現れるがその実部は非常に小さいため、固有値解析によって求められる音響固有周波数とほぼ一致する．したがっていずれの解析方法も一次元音場における音響固有周波数の推定に用いることが可能である．
- (3) また応答解析による音響固有周波数 f_n' が固有値解析による f_n よりすべての条件で小さく現れる点に着目して検討を加えた．その結果 $f_n' < f_n$ となるのは応答の式において分子が -1 となりしたがって分母が極小値をとる周波数が f_n' となるが、その差は $Z_3 k l_3$ を Z_1 に置き換えたために生じたものであることが明らかになった．

文 献

- 石原国彦, ボイラ管群ダクトで発生する大音響騒音の穴あき板を利用した対策法に関する研究(限界開口率の把握と空洞部体積の抑制効果に及ぼす影響), 日本機械学会論文集, Vol. 83, No. 848 (2017), DOI: 10.1299/transjsme. 16-00456.
- 石原国彦, 工藤哲, 穴あき板で仕切られた一次元音場の共鳴周波数に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol.85, No.871(2019), DOI:10.1299/transjsme.18-00305.
- 石原国彦, 工藤哲, 榎本貴之, 森正明, 穴あき板で仕切られた 1 次元音場の共鳴周波数(解析と実験の比較), 日本機械学会中国四国支部第 55 期総会・講演会講演論文集(2017), ID: K1114.
- 石原国彦, 工藤哲, 榎本貴之, 森正明, 穴あき板で仕切られた 1 次元音場の共鳴周波数と音圧モードに関する研究, 日本機械学会論文集, Vol.84, No.857(2018), DOI:10.1299/transjsme. 17-00365.
- 石原国彦, 中岡正典, 西岡幹人, ボイラ管群ダクトで発生する大音響騒音の対策法としての穴あき板の利用に関する研究(開口率 1%以上の場合), 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 841(2016), DOI: 10.1299/transjsme. 16-00179.
- 木村康正, 山口善三, 坂谷亨, 圧縮機用多孔板型消音器, 神戸製鋼技報, Vol.59, No.3 (2009), pp.13-16.
- 工藤哲, 石原国彦, 穴あき板で仕切られた 1 次元音場の共鳴周波数に及ぼす穴あき板の影響, 日本機械学会第 27 回環境工学総合シンポジウム講演論文集(2017), ID: 111.
- 工藤哲, 石原国彦, 穴あき板の設置位置が 1 次元音場の共鳴周波数に及ぼす影響, 日本機械学会第 28 回環境工学総合シンポジウム講演論文集(2018), ID: 128.
- Melling, T. H., The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels, Journal of Sound and Vibration, Vol.29, No.1 (1973), pp.1-65.
- 次橋一樹, 山極伊知郎, 菊池政寛, 微細多孔吸音板を含む音場のシミュレーション技術と製品開発への適用, 神戸製鋼技報, Vol.64, No.2(2014), pp.90-95.

References

- Ishihara, K., Study on a countermeasure for high level sound generated from boiler tube bank duct using walls made of perforated plate (Grasp critical aperture ratio and influence of cavity volume on suppression effect), Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.83, No.848 (2017), DOI: 10.1299/transjsme. 16-00456.
- Ishihara, K. and Kudo, S., Study on acoustic natural frequency of one dimensional sound field partitioned by perforated plate, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.85, No.871 (2019), DOI:10. 1299/transjsme. 18-00305.
- Ishihara, K., Kudo, S., Masumoto, T. and Mori, M., Acoustic natural frequency of one dimensional sound field partitioned by perforated plate (comparison between analysis and experiment), Proceedings of the 55th Annular Meeting in Chugoku-Shikoku (2017), ID: K1114 (in Japanese).
- Ishihara, K., Kudo, S., Masumoto, T. and Mori, M., Study on acoustic natural frequency and its mode of one dimensional sound field partitioned by perforated plate, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.84, No.857 (2018), DOI:10. 1299/transjsme. 17-00365.
- Ishihara, K., Nakaoka, M. and Nishioka, M., Study on a countermeasure for high level sound generated from boiler tube bank duct using walls made of perforated plate (In case of aperture ratio being more than 1%), Transactions of the J SME (in Japanese), Vol.82, No.841 (2016), DOI: 10.1299/transjsme. 16-00179.
- Kimura, Y., Yamaguchi, Z. and Sakatani, T., Perforated panel type silencer for screw compressors, Kobe Steel Engineering Reports, Vol.59, No.3 (2009), pp.13-16(in Japanese).
- Kudo, S. and Ishihara, K., Effect of perforated plate on acoustic natural frequency of one dimensional sound field partitioned by perforated plate, 27th Environment engineering symposium paper (2017), ID: 111(in Japanese).
- Kudo, S. and Ishihara, K., Effect of set position of perforated plate on acoustic natural frequency of one dimensional sound field, 28th Environment engineering symposium paper (2018), ID: 128(in Japanese).
- Melling, T. H., The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels, Journal of Sound and Vibration, Vol.29, No.1 (1973), pp.1-65.
- Tsugihashi, K., Yamagiwa, I. and Kikuchi, M., Research on numerical analysis technique for sound fields including perforated plate, Kobe Steel Engineering Report, Vol.64, No.2(2014), pp.90-95(in Japanese).