粒子法における移動サーフェスメッシュを用いた
表面張力の高精度計算と液滴の数値解析松永 拓也^{*1}, 越塚 誠一^{*2}, 保坂 知幸^{*3}, 石井 英二^{*4}Accurate calculation of the surface tension force and the droplet simulation
using a particle method with moving surface meshTakuya MATSUNAGA^{*1}, Seiichi KOSHIZUKA^{*2}, Tomoyuki HOSAKA^{*3} and Eiji ISHII^{*4}^{*1,*2} Department of Systems Innovation, The University of Tokyo
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan^{*3,*4} Hitachi Research Laboratory, Hitachi Ltd.,
832-2 Horiguchi, Hitachinaka-shi, Ibaraki 312-0034, Japan

Received: 27 April 2019; Revised: 15 July 2019; Accepted: 8 August 2019

Abstract

In this paper, we proposed a new particle method for numerical simulation of droplet dynamics. In the proposed method, the moving surface mesh is used to define interface between gas and liquid. The volume enclosed by the mesh represents the liquid droplet, and the outer domain is inactive gas with constant pressure. The incompressible liquid flow is calculated using a particle method, in which spatial derivatives are evaluated using an arbitrary high order accurate scheme. On the free surface, the surface stress balance equations, including surface tension and viscous stress, are adopted for the boundary conditions. Deformation of the gas-liquid interface is explicitly calculated by surface nodes that move in a Lagrangian fashion. Surface tension force is directly evaluated with high accuracy on each node utilizing the mesh shape. As numerical verification, simulations of three benchmark problems, namely circular patch test, Laplace pressure test and 2D droplet (liquid column) oscillation problems with different oscillation modes, have been carried out. The computation results were compared with the theoretical solutions, and excellent agreements were obtained. As a result, high accuracy and validity of the proposed computational method were confirmed.

Keywords : Computational fluid dynamics, Particle method, Free surface flow, Surface tension, Droplet oscillation, Laplace pressure, Moving surface mesh

1. 緒 言

気液界面を有する流れは自然界の至るところに存在すると同時に、工業上重要な問題体系としても知られている。液体の運動を主の着目対象とし、かつ気体の流れが受動的であると近似できる場合には、気相を無視した自由表面流れとして問題を単純化できる。自由表面流れの数値解法としては、有限体積法等の格子法をベースとした VOF (volume of fluid) 法 (Hirt and Nichols, 1981) や level-set 法 (Sussman et al., 1994) などがよく用いられる。また、飛沫の発生といった複雑な現象を伴う体系には SPH (smoothed particle hydrodynamics) 法 (Monaghan, 1992) や MPS (moving particle semi-implicit) 法 (Koshizuka and Oka, 1996) 等の粒子法を用いた解法が有効であり、ダム崩壊

(Colagrossi and Landrini, 2003), 碎波 (Gotoh and Sakai, 1999), スロッシング (Shao et al., 2012), 津波 (Murotani et al., 2014), 潤滑油のかきあげ (Yuhashi et al., 2016), 弾性体の着水衝撃 (Khayyer et al., 2018) など様々な問題に適用されている。

一方で、自動車用エンジンの燃料噴霧や、インクジェット印刷、超音波霧化を利用した表面塗布など、液滴の挙動が重要となる工業技術が多く存在する。液滴のように長さスケールが小さな体系では、気液界面に働く表面張力の影響が相対的に大きくなる。そのため、液滴挙動を数値計算によって再現・予測するには表面張力を正確に考慮することが重要となる。更に、液滴の生成・分裂・合体を伴う体系では、界面の大変形を安定かつ精度良く追跡することに加え、流体のトポロジー変化を考慮する必要がある。このような液滴を伴う流体現象を想定したときの既存手法におけるいくつかの問題点について以下に記す。

先に挙げた VOF 法や level-set 法では、各セルにおける液体の体積割合や界面までの距離をスカラー変数として定義し、輸送方程式を解くことで界面の移動を計算する。そのため、トポロジーが変化するような場合も特別な処理を必要としない。しかし、輸送方程式を解く際に数値拡散が発生し、界面が不明瞭化する問題がある。表面張力の計算には、CSF (continuum surface force) モデル (Brackbill et al., 1992) や CSS (continuum surface stress) モデル (Lafaurie et al., 1994) が一般に用いられる。これらのモデルでは表面張力を体積力等の形に変換してナビエ・ストークス方程式に組み込むため、計算上の取り扱いが単純である。しかし、界面近傍で spurious current (または parasitic current) と呼ばれる数値対流が発生し、静止液滴などの定常解が得られないことや場合によっては計算が破綻するといった問題がある (Harvie et al., 2006)。また、数値拡散に起因して解の空間解像度依存性が高く計算コストを要する。

マーカー点列によって界面を Lagrange 的に追跡する front-tracking 法 (Unverdi and Tryggvason, 1992) では、数値拡散なく界面移動を計算できるだけでなく、各マーカーに作用する表面張力を直接的に求めることができる (Tryggvason et al., 2011)。しかし、マーカー上で評価された表面張力は近傍の格子点に分配され、CSF モデル同様に、体積力として流れの計算に組み込まれる。そのため、spurious current が発生する。一方で、動的メッシュ (Cairncross et al., 2000) や境界適合座標 (Takagi et al., 1997) を用いる方法では、表面張力をメッシュ形状から直接計算できることに加え、これを自由表面での応力の釣り合いの式に導入し境界条件として与えることができる。しかし、界面の極めて大きな変形やトポロジー変化を考慮することが難しいという課題がある。

粒子法では、計算点 (粒子) が流れに追従して移動するため、界面形状は Lagrange 的に追跡される。加えて、メッシュを用いないためトポロジーの変化も特別な処理なく考慮することができる。表面張力の計算については、格子法に類似の定式化による CSF モデルや CSS モデルの適用 (Morris, 2000; Nomura et al., 2001; Hu and Adams, 2006) が行われている他、分子間力に似た粒子間ポテンシャル力としてモデル化する方法 (Tartakovsky and Meakin, 2005; Kondo et al., 2007) が提案されている。粒子法における表面張力モデルの開発は多数行われているが、ここでは全ての研究を網羅することは避け、参考文献 (Wang et al., 2016; Koshizuka et al., 2018) を挙げるにとどめる。

粒子法を用いた解析では、数値拡散なく界面を追えるだけでなくトポロジー変化の考慮も容易であるため、基礎的な単一液滴の振動挙動の解析 (Hu and Adams, 2006; Adami et al., 2010) をはじめ、液滴分裂を含む複雑な流れの解析 (Adami et al., 2010; Shibata et al., 2004; Sirotkin and Yoh, 2012) についても報告がある。しかしながら、これまでの粒子法には計算精度に限界があることを指摘しなければならない。精度低下の要因として主に 2 つの問題点が挙げられる。1 つは空間離散化スキームに適合性 (consistency) がないことである。従来の空間離散化スキーム、例えば MPS 法の粒子間相互作用モデル、では粒子が格子状に均等に配置されていることを前提として導出されており、一般の乱雑な粒子配置においては計算精度が著しく低下する。これを改善する方法として、最小二乗法を用いる高精度スキーム (Khayyer and Gotoh, 2011; Tamai and Koshizuka, 2014) が考案されているが、自由表面が存在するときには数値的に不安定化しやすく、適用は極めて限定的である。

もう 1 つの問題点は界面の形状変化ならびに表面張力の計算精度が低いことである。粒子法では粒子が Lagrange 的に移動するため界面を正確に追跡できるとの見方もある。しかし、粒子が実際に追跡しているのは流体内部の代表点 (あるいは体積) であり、界面自体は陽的には追跡されない。更に、粒子数密度を一定に保つために粒子分布を補正する必要があり、これに伴って界面に非物理的な凹凸が現れることとなる。そのため、従来の表面張力モデルでは数値安定性のためカラー関数等を用いた界面の平滑化が行われるが、その副作用として微妙な界面形状の変化や小さな液滴の存在を正確に捉えることができない。また、spurious current の発生も確認されている (Krimi

Fig. 1 Schematic diagram of the proposed method. Moving surface mesh defines the interface between gas and liquid. Fluid particles are seeded in the liquid domain.

et al., 2018).

以上に述べたように、液滴の挙動を正確に再現しつつトポロジーの変化までを考慮に入れることのできる手法は見当たらない。そこで本研究では上記要件を満たす手法の構築を目指し、先に述べた粒子法の2つの問題点を克服できる「移動サーフェスメッシュ」を用いた計算手法を開発する。本稿では、2章にて提案手法の計算アルゴリズムを説明し、3章では単一液滴の振動問題を含む各種ベンチマーク問題に対し提案手法を適用し、数値検証によって妥当性を示す。

2. 提案手法

2.1 手法の概略

本研究で提案する「移動サーフェスメッシュ (moving surface mesh)」は界面位置に陽的に配置する表面メッシュである。ここでは二次元の問題体系のみを考えることとし、移動サーフェスメッシュを図1に示すように表面ノード (surface node) の点列として表す。移動サーフェスメッシュにより定義される閉じた領域を液相、それ以外の領域を気相とする。液相領域には流体粒子 (fluid particle) を配置し、各粒子に速度と圧力の変数を定義する。表面ノードはLagrange的に移動する計算点とし、速度と圧力の変数を定義する。すなわち、表面ノードは、流体粒子同様、独立な自由度を有する。

従来の粒子法の問題点は、界面形状を陽的に表す情報が存在しないことであった。対して提案手法では、移動サーフェスメッシュにより界面形状が明確に定義される。これにより形状情報そのものから直接的に表面張力を算出でき、また、表面張力を自由表面にかかる応力として厳密に境界条件に導入することができる。その他にも、流体体積を一定に保持することや粒子分布の均一性の制御が容易になる利点がある。従来の粒子法では、自由表面粒子の誤判定や自由表面付近での粒子同士の過剰接近がしばしば起こり、数値的な不安定化を引き起こす要因となっていた。特に高精度スキームには人工的な安定化項が加えられていないため、自由表面付近で不安定化が起こりやすい傾向があった。一方、提案手法では自由表面判定自体がなく、更に自由表面付近でも粒子分布を均一に保持することができるため、高精度スキームの不安定化を抑制できる。

自由表面の取り扱いを改善する過去の取り組みとして、気相側に仮想マーカーを配置し、自由表面の境界条件をより適切に付与する方法が提案されている (Tsuruta et al., 2015; Morikawa et al., 2019)。仮想マーカーは自由表面近傍の粒子から動的に作成されるので独立な自由度をもたないが、移動サーフェスメッシュの表面ノードは速度・圧力・位置に関する独立な自由度をもつため大きく異なる。

なお、本提案手法は液滴の生成や分裂を考慮するためのトポロジー変化への対応も視野に入れたものであるが、本報ではトポロジーが変化しない単一液滴の現象のみを扱い、分裂を伴う体系への拡張は今後の研究とする。

2.2 支配方程式

本研究ではニュートン流体の非圧縮性自由表面流れを解析対象とする。支配方程式として次に示す連続の式とナビエ・ストークス方程式を扱う。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (2)$$

ここで t は時間, $\mathbf{u}$ は速度, P は圧力, ρ は密度, ν は動粘性係数, $\mathbf{g}$ は重力加速度を表す。また, 粒子および表面ノードの位置を $\mathbf{r}$ とするときそれらの移動は次式により表される。

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_a \quad (3)$$

ここで $\mathbf{u}_a$ は計算点の移動速度である。 $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}$ と定義する場合には完全 Lagrange 型の解法となるが, 粒子分布を均一化するための位置修正を行うため一般には $\mathbf{u}_a \neq \mathbf{u}$ であり, 対流項を考慮することになる。ただし, 表面ノードに限り $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}$ として扱うものとする。そのため表面ノードでは対流項は現れない。

2.3 境界条件

自由表面では, 次に示す応力の釣り合いを境界条件として考える。

$$(P - P_{\text{gas}}) \mathbf{n} + \mathbf{f}_{\text{st}} = \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \mathbf{n} \quad (4)$$

ここで P_{gas} は周囲気圧, μ は粘性係数, $\mathbf{f}_{\text{st}}$ は表面張力ベクトル, $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを表す。なお, 本研究では気体密度が無視できるほど小さいと仮定し, $P_{\text{gas}} = 0$ (一定) として取り扱うものとする。表面張力ベクトル $\mathbf{f}_{\text{st}}$ の計算方法は 2.5 節で説明する。

2.4 時間進行法と空間離散化

時間進行法として, 対流項と粘性項と外力項を陽的に計算し, 圧力勾配項を陰的に計算する半陰的解法を採用する。すなわち, 式 (2) を時間方向に離散化すると次のようになる。

$$\frac{\mathbf{u}^* - \delta \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^k}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} \Big|_r^k + \mathbf{g} \quad (5)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \Big|_r^{k+1} \quad (6)$$

ここで Δt は時間刻み幅, $\delta \mathbf{u}$ は位置の修正に伴う速度の補正 (対流項) を表す。

各時間ステップにおける粒子位置の修正を $\delta \mathbf{r}$ とするとき, これに伴う速度変化はテイラー展開を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla)^m \mathbf{u} \Big|_r \quad (7)$$

ここでは 2 次の項までを考慮するものとし, $\delta \mathbf{u}^k$ を

$$\delta \mathbf{u}^k = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} \Big|_r^k + \frac{1}{2} (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla)^2 \mathbf{u} \Big|_r^k \quad (8)$$

として近似する.

空間離散化スキームには, 任意の高次精度で離散化が可能な LSMPS スキーム (Tamai and Koshizuka, 2014) を採用する. ある関数 ϕ の空間微分は LSMPS スキームを用いて次のような離散式から計算される.

$$\partial \phi \Big|_{\mathbf{r}_i} = H_{r_s} M_i^{-1} \sum_{j \neq i, j \in \Lambda_F \cup \Lambda_S} w(|\mathbf{r}_{ij}|) \mathbf{p}_{ij} (\phi_j - \phi_i) \quad (9)$$

ここで $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, Λ_F は粒子の添字集合, Λ_S は表面ノードの添字集合, $\mathbf{p}_{ij}$ は粒子 i, j 間に定義される多項式基底ベクトル, H_{r_s} はスケーリング行列, M_i はモーメント行列, ∂ は微分作用素ベクトルを表す. 例えば, 2 次の多項式基底を用いる場合は,

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p} \left(\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_s} \right) = \left[\frac{x_{ij}}{r_s}, \frac{y_{ij}}{r_s}, \frac{x_{ij}^2}{r_s^2}, \frac{x_{ij}y_{ij}}{r_s^2}, \frac{y_{ij}^2}{r_s^2} \right]^\top \quad (10)$$

$$H_{r_s} = \text{diag} \left(\frac{1}{r_s}, \frac{1}{r_s}, \frac{2}{r_s^2}, \frac{1}{r_s^2}, \frac{2}{r_s^2} \right) \quad (11)$$

$$M_i = \sum_{j \neq i, j \in \Lambda_F \cup \Lambda_S} w(|\mathbf{r}_{ij}|) \mathbf{p}_{ij} \otimes \mathbf{p}_{ij} \quad (12)$$

$$\partial = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^\top \quad (13)$$

ここで r_s はスケーリング係数を表す. LSMPS スキームでは p 次の多項式基底を使用することで 1 階微分を p 次精度, 2 階微分を $p-1$ 次精度で求めることができる. 詳細については参考文献 (Tamai and Koshizuka, 2014) に譲る. 本研究では 2 次の基底を使用し, 1 階微分を 2 次精度, 2 階微分を 1 次精度で求めている. ただし, 圧力勾配に限り 1 次の基底を使用して 1 次精度で計算を行った. これは 2 次の基底を用いた場合に数値的な不安定化が確認されたためである.

空間離散化等に使用する重み関数は次のように定義する.

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 \leq r < r_e) \\ 0 & (r_e \leq r) \end{cases} \quad (14)$$

ここで r_e は影響半径である. 影響半径 r_e は次式に定義される代表粒子間距離 ℓ_0 の 3.1 倍とした.

$$\ell_0 = \left(\frac{|\Omega|}{N} \right)^{1/d} \quad (15)$$

ここで, $|\Omega|$ は流体体積, N は粒子数, d は空間次元数を表す.

2.5 表面張力

いま, 図 2 に示すように表面ノード $\{i-1, i, i+1\}$ が定義されているとする. このとき表面ノード i にかかる表面張力は

$$\mathbf{f}_{\text{st},i} = \frac{\sigma}{S_i} (\boldsymbol{\tau}_i^- + \boldsymbol{\tau}_i^+) \quad (16)$$

Fig. 2 Calculation of the surface tension force vector ($\mathbf{f}_{st,i}$) at surface node i .

で表すことができる (Tryggvason et al., 2011). ここで, σ は表面張力係数, S_i はノード i が占める表面積, $\boldsymbol{\tau}_i^-$ と $\boldsymbol{\tau}_i^+$ は隣接ノードへ向かう単位接線ベクトルである. これらは, ノード位置 $\{\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}\}$ を用いて,

$$S_i = \frac{|\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i| + |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|}{2} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i^- = \frac{\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i|} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i^+ = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|} \quad (19)$$

より求められる.

2.6 計算手順

以下に具体的な計算手順を示す.

まず, 粒子と表面ノードの仮速度 $\mathbf{u}^*$ を求める.

$$\mathbf{u}_i^* = \begin{cases} \mathbf{u}_i^k + \Delta t \left(\mathbf{v} \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^k + \mathbf{g} \right) + \delta \mathbf{u}_i^k & (i \in \Lambda_F) \\ \mathbf{u}_i^k + \Delta t \left(\mathbf{v} \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i^k + \mathbf{g} \right) & (i \in \Lambda_S) \end{cases} \quad (20)$$

ここで Λ_F は粒子の添字集合, Λ_S は表面ノードの添字集合である. なお, 表面ノードで粘性項を評価する際には, 速度のラプラシアン離散化に境界条件 (4) を拘束条件として考慮した Constraint LSMPS スキーム (Tamai and Koshizuka, 2014) を用いる. また, 対流項 $\delta \mathbf{u}_i^k$ の算出には位置の修正 $\delta \mathbf{r}_i^k$ が必要となる. $\delta \mathbf{r}_i^k$ は粒子間に働く仮想的な反発力を考えて次のように与える.

$$\delta \mathbf{r}_i^k = -\frac{\alpha \ell_0}{C_{\text{shift}}} \left[\sum_{j \neq i, j \in \Lambda_F} w(|\mathbf{r}_j^k - \mathbf{r}_i^k|) \frac{\mathbf{r}_j^k - \mathbf{r}_i^k}{|\mathbf{r}_j^k - \mathbf{r}_i^k|^2} + \frac{1}{C_V} \int_{\mathbf{x} \in \Omega_{\text{gas}}^k} w(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i^k|) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_i^k}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i^k|^2} dV \right] \quad (21)$$

ここで α は位置修正の強度を調整するためのチューニングパラメータで, 本研究では $\alpha = 0.1$ を用いた. C_{shift} は間隔 ℓ_0 で正方格子状に配置した粒子群に対し次式を適用して得られる定数である.

$$C_{\text{shift}} = \sum_{j \neq i} \frac{w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (22)$$

また, 式 (21) の体積積分の項は粒子の存在しない自由表面より外側の領域, すなわち気相領域を考慮するためのものであり, この項を考慮することで自由表面付近においても粒子配置を均一に保持することができる. 体積積

分の計算には解析積分 (Matsunaga et al., 2019; 松永他, 2018) を用いる. C_V は体積積分をスケールリングするための係数である. 具体的な体積積分の計算方法と C_V の定義については原著論文を参照されたい.

次に, 粒子と表面ノードの位置をそれぞれ次のように更新する.

$$\mathbf{r}_i^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{r}_i^k + \Delta t \mathbf{u}_i^k + \delta \mathbf{r}_i^k & (i \in \Lambda_F) \\ \mathbf{r}_i^k + \Delta t \mathbf{u}_i^k & (i \in \Lambda_S) \end{cases} \quad (23)$$

ここでは仮速度 $\mathbf{u}^*$ ではなく前の時刻の速度 $\mathbf{u}^k$ を使用することに注意する. なお, 表面ノードの移動に伴ってノード間距離は次第に変化することとなる. そこでノードの追加や削除の処理を行う. 詳しくは 2.7 節で説明する.

続いて, 圧力ポアソン方程式

$$\langle \nabla^2 P \rangle_i^{k+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i^* \quad (i \in \Lambda_F) \quad (24)$$

を陰的に解くことで圧力 P^{k+1} を求める. ただし, 表面ノードでは式 (4) に式 (5) を代入して得られる

$$P_i^{k+1} + \frac{2\mu\Delta t}{\rho} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \langle (\nabla \otimes \nabla) P \rangle_i^{k+1} = 2\mu \mathbf{n} \cdot [\langle \nabla \mathbf{u} \rangle_i^* \mathbf{n}] - \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_{st,i}^{k+1} \quad (i \in \Lambda_S) \quad (25)$$

を適用する. これは導出からも明らかなように, 次の時刻 ($k+1$) において自由表面に作用する応力が釣り合うための条件となっている. ちなみに, 非粘性 ($\mu = 0$) の流れでは式 (25) は

$$P_i^{k+1} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_{st,i}^{k+1} \quad (i \in \Lambda_S) \quad (26)$$

という単純なディリクレ境界条件となる.

最後に, 式 (6) に基づき, 粒子と表面ノードの速度をそれぞれ次のように修正する.

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P \rangle_i^{k+1} & (i \in \Lambda_F) \\ \mathbf{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P \rangle_i^{k+1} + \varepsilon \mathbf{n} & (i \in \Lambda_S) \end{cases} \quad (27)$$

ここで ε は移動サーフェスメッシュの体積を保存するための補正速度を表す. ε の計算方法は 2.7 節で述べる.

2.7 表面メッシュの修正

表面ノードは完全 Lagrange 的に移動するため時間進行に伴ってノード間の距離は際限なく変化する. よって, ノード同士が極端に近づいたり離れたりすることによって数値不安定化や計算精度の低下が起こることが考えられる. そこで, ノード同士があるしきい値を超えて接近した場合はノードの削除を, 距離が開いた場合にはノードの追加を行うものとする.

具体的には隣接する 2 つの表面ノード $\{i, j\}$ について,

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| < \beta_1 \ell_0 \quad (28)$$

を満たす場合には, ノード $\{i, j\}$ のどちらか一方を削除する. 削除するノードは角度によって決定するものとし, 外角がより小さいものを優先して削除する. ここでしきい値 β_1 は正の実数値で, 本研究では $\beta_1 = 0.5$ を使用した. 対して,

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| \geq \beta_2 \ell_0 \quad (29)$$

を満たすときには、ノード $\{i, j\}$ の中間に 1 つ新たなノードを追加する。新しいノードの位置は近傍の 4 つのノードを用いた多項式補間 (Farin, 1996) により決定した。本研究では $\beta_2 = 1.5$ とした。

式 (27) の補正速度 ε の計算方法を以下に示す。流体体積 V の時間変化率は

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (30)$$

で与えられる。連続の式 (1) を満たすとき式 (30) 右辺は解析的にはゼロとなるが、計算上は数値誤差を含むため移動サーフェスメッシュの体積は厳密には保存しない。特に、長時間に渡って振動し続けるような極低粘性の液滴振動問題では時間の経過と共に体積誤差が蓄積し続ける恐れがある。そこで体積誤差を打ち消すような補正を加える。式 (30) を時間方向に離散化すると、

$$\frac{V^{k+1} - V^k}{\Delta t} = \int_{\partial\Omega^k} \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} dS \quad (31)$$

式 (27) を代入し、 $V^{k+1} = V^0$ として扱うと、

$$\frac{V^0 - V^k}{\Delta t} = \int_{\partial\Omega^k} \left(\left(\mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P \rangle^{k+1} \right) \cdot \mathbf{n} + \varepsilon \right) dS \quad (32)$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{1}{|\partial\Omega^k|} \left(\frac{V^0 - V^k}{\Delta t} - \int_{\partial\Omega^k} \left(\mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P \rangle^{k+1} \right) \cdot \mathbf{n} dS \right) \quad (33)$$

を得る。ここで $|\partial\Omega|$ は移動サーフェスメッシュの表面積を表す。なお、 ε は一般に実界面速度に比べて数オーダー小さな値を取るため、流れ場に与える非物理的な効果は極めて小さい。

3. 数 値 検 証

提案手法の妥当性を検証するため、以下に示す 3 つの問題の数値解析を行った。第 1 の問題では表面張力と粘性を無視し、非圧縮性流れの非定常解析の妥当性を検証する。第 2 の問題では表面張力と粘性を考慮し、液滴の運動が定常解に収束するか、また定常解において表面張力と内部圧力が正しく釣り合うかを検証する。最後に、液滴の振動問題に適用したときの妥当性を検証する。

3.1 円形パッチテスト

原点を中心とする初期半径 R_0 の円形液滴に対して、初期速度分布

$$\mathbf{u}_0(x, y) = \begin{bmatrix} A_0 x \\ -A_0 y \end{bmatrix} \quad (34)$$

を与えたときの液滴の伸張を数値計算する。本ベンチマーク問題は非粘性かつ表面張力無し のとき、理論解が以下のように与えられることが知られている (Colagrossi, 2005)。

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{bmatrix} Ax \\ -Ay \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$P(x, y, t) = \frac{\rho}{2} [\dot{A}(x^2 - y^2) - A^2(x^2 + y^2) - a^2(\dot{A} - A^2)] \quad (36)$$

$$\dot{a} = -aA, \quad a(0) = R_0 \quad (37)$$

$$\dot{b} = bA, \quad b(0) = R_0 \quad (38)$$

Fig. 3 Calculation result of the circular patch test. A droplet stretches in the horizontal direction. Color indicates pressure.

$$\ddot{A}A - 4\dot{A}^2 + 2A^4 = 0, \quad A(0) = A_0, \quad \dot{A}(0) = 0 \quad (39)$$

ここで a は液滴の短半径, b は長半径を表す.

$R_0 = 1 \text{ m}$, $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $A_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ として, 粒子数 12868 ($\ell_0 \approx 1.5625 \times 10^{-2} \text{ m}$) で計算を行ったときの液滴形状と圧力分布の時間発展の様子を図 3 に示す. 更に, 図 4 に中心点圧力, 短半径 (a), 長半径 (b) の時間発展を理論解と比較して示す. これらの結果からわかるように計算結果は理論解と極めて良い一致を示している. また, 比較的計算誤差が大きい長半径の結果について, 粒子数が 3217 のとき (coarse) と, 51472 のとき (fine) の計算結果との比較を行い, 空間解像度依存性について検証を行った. その結果, より高い空間解像度では理論解との差異がより小さくなっており, 理論解への収束性を示した. 以上より, 表面張力と粘性を無視した基本的な非圧縮性流れの解析が妥当に行われていると判断する.

3.2 ラプラス圧

初期状態において辺長 L の正方形の静止液滴を無重力, 粘性有り, 表面張力有りの条件で時間発展させ, 定常解を求めた. 理論上, 定常状態における二次元液滴の内圧は一樣かつ以下のラプラス圧に一致する.

$$P = \frac{\sigma}{R} \quad (40)$$

ここで R は定常状態での液滴半径を表し, 体積一定の条件から以下のように求められる.

$$R = \frac{L}{\sqrt{\pi}} \quad (41)$$

$L = 2 \text{ mm}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Pas}$, $\sigma = 10^{-2} \text{ N/m}$ として, 粒子数 1024 ($\ell_0 \approx 6.25 \times 10^{-2} \text{ mm}$) で計算を行った. このときの理論ラプラス圧は 8.862 Pa である. 計算によって得られた液滴形状ならびに圧力分布の時間発展の様子を図 5 に示す. 表面張力を駆動力として液滴の振動現象が起こる様子と, 粘性散逸によって振動が減衰し最終的には液滴が円形となって落ち着くことがわかる. また, 定常状態と思われる $t = 2 \text{ s}$ では液滴の内部圧力は一樣で, かつ理論値に近い 8.860 Pa となっている. 比較対象として, 従来の粒子間ポテンシャル力に基づく表面張力モデル (Kondo et al., 2007) を適用した MPS 法を用いて同一の問題を数値計算した. その結果を図 6 に示

Fig. 4 Time evolution of pressure, semi-minor and semi-major axes. Excellent agreement to the theory is shown. In the right panel of (c), the calculation results with different spatial resolutions indicate convergence to the theory.

す。従来手法では流体の非物理的な挙動が顕著に現れ、定性的な振動挙動すら再現されなかった。また、時間と共に運動エネルギーが増幅する傾向を示し、定常解は得られなかった。加えて、液滴の内部圧力はおよそ 300 Pa と理論値より極めて高い値を示しており、表面張力が正しく評価されていないことがわかる。

流体体積の保存性を検証するため、移動サーフェスメッシュによって定義される液相領域面積の時間変化を取得した。その結果を図 7 に示す。ここで式 (27) の補正速度 ε による効果を調査するため、補正を行わない場合 ($\varepsilon = 0$) の結果と比較を行っている。補正速度 ε を考慮した場合の相対誤差は最大で -9.0×10^{-5} と非常に小さく、更に定常状態ではマシンゼロに近いオーダー (10^{-15}) に収束した。よって、流体体積は高い精度で保存していると言える。一方、補正を考慮しない場合には界面の変形と共に体積が次第に減少し、定常状態では初期体積に比べ約 3% (半径に換算すると約 1.5%) 縮小した。なお、補正を考慮しない場合について空間解像度を変えて計算を行ったところ、図 7 に示すように、空間解像度の向上に伴い体積誤差が減少する傾向を示したことから流体体積について収束性を有することが確認された。

定常解への収束を確認するため、中心点の圧力ならびに次式に定義される運動エネルギー E_k [J/kg] の時間変化

Fig. 5 Calculation result of the initially square droplet oscillation. The oscillation settles down due to viscous dissipation, and steady circular shape and homogeneous pressure distribution are obtained at $t = 2s$.

Fig. 6 Calculation result of the initially square droplet oscillation obtained using the conventional method (the MPS method with a potential force-based surface tension model). The solid line indicates droplet shape obtained by the present method. The conventional method fails to simulate the droplet oscillatory motion. Furthermore, unphysical high pressures and severe numerical fluctuations are observed.

Fig. 7 Time evolution of fluid volume defined by the moving surface mesh. With the correction technique, the volume is conserved accurately. Without the correction technique, the volume slightly shrinks while the error is reduced as spatial resolution increases.

Fig. 8 Time evolution of pressure and kinetic energy. The pressure fluctuation reduces as time progress. The kinetic energy settling down indicates free of spurious current and a steady state solution is obtained.

を観測した。

$$E_k = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i|^2 \quad (42)$$

その結果を図 8 に示す。中心点における圧力振動は急速に減衰しており、時刻 $t = 0.1\text{s}$ では既に微小となっていることがわかる。また圧力の収束値は式 (40) によって得られる理論値とよく一致している。運動エネルギーについても粘性散逸によって時間と共に減衰しており、時刻 $t = 2\text{s}$ 前後で定常解に落ち着いていることが読み取れる。

空間解像度依存性を調査するため、更に粒子数 256, 4096, 16384 で同様の解析を行い、中心点における定常圧力値を取得した。その結果を図 9 に示す。空間解像度の増加に従って、圧力の計算値は理論解に収束していくことが示されている。

続いて、表面張力係数 σ を様々な値に設定してそれぞれの場合の定常圧力値を求め、理論値との比較を行った。

Fig. 9 Pressure at the steady state obtained with different spatial resolutions. Convergence to the theoretical Laplace pressure is observed.

Fig. 10 Calculated droplet pressures for various surface tension coefficients. Calculation results agree well with the theory.

Fig. 11 Initial configuration of the 2D droplet (liquid column) oscillation problem for $n = 2$.

その結果を図 10 に示す。なおここでは、上で述べた最も高い空間解像度 (粒子数 16384) を用いて計算を行った。式 (40) に示されるように液滴半径 (R) 一定では理論ラプラス圧は表面張力係数 σ と比例の関係にある。本計算においても $\sigma = 10^{-3} \sim 10^{-1}$ [N/m] の広い範囲でこの傾向が再現され、またその絶対値も理論値に極めて良く一致する結果となった。

3.3 液滴振動

単一液滴の振動問題の解析を行う。初期の液滴形状は図 11 に示すように半径 R_0 の真円に最大振幅 a の変形を加えた形状とした。このとき、半径 r は以下のような関数で表される。

$$r(\theta) = R_0 + a \cos(n\theta) \quad (43)$$

ここで n は波数を表す正の整数で、 $n = 2$ のとき図のような楕円形状を得る。この問題は液滴振動の代表的なベンチマーク問題であり、振幅 a と流体の粘度が十分に小さいとき、表面張力を駆動力とする液滴振動の振動周期は

Fig. 12 Typical pressure distributions for the 2D droplet oscillation problem with different n . Color indicates pressure.

Lamb の理論解 (Lamb, 1932) により次式で与えられる.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma n(n^2 - 1)}} \quad (44)$$

本検証では理論との整合性を考慮し非粘性流れ ($\mu = 0$) として解析を行う. 非粘性流れでは粘性による振動の減衰がないため, 界面の変形量 Δr は次式で表される.

$$\Delta r(\theta, t) = r(\theta, t) - R_0 = a \cos(n\theta) \cos(\omega t) \quad (45)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\sigma n(n^2 - 1)}{\rho R_0^3}} \quad (46)$$

その他の計算パラメータは $R_0 = 1 \text{ mm}$, $a = 10^{-2} \text{ mm}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 10^{-2} \text{ N/m}$ に設定した. 初期液滴形状ならびに振動モードを支配する波数 n を様々な値に設定し, そのとき計算によって得られる界面の振動挙動を理論解 (45) と比較する.

$n = 2 \sim 9$ の液滴形状について, 粒子数約 13000 ($\ell_0 \approx 1.56 \times 10^{-2} \text{ mm}$) を用いて計算を行ったときの振動の様子を表す典型的な圧力分布を図 12 に示す. 続いて, $n = \{2, 3, 6, 9\}$ の場合について, 計算によって得られた界面変形の時間軌跡を図 13 に理論解 (45) と比較して示す. なお, ここでは界面変形 Δr を $\theta = 0$ の位置にある表面メッシュから取得し, 振幅 a で無次元化している. 式 (46) からわかるように n の増加と共に振動周波数は増大する関係にあり, 計算においてもその傾向が正確に再現され理論解との極めて良好な一致を示している. また, 異なる 3 つの粒子数を用いた計算を比較し解像度依存性についても検証している. より低い解像度 (coarse) として粒子数約 3000, より高い解像度 (fine) として粒子数約 51000 を用いた結果を示している. 解像度の増加に従い界面変形の計算誤差が減少していく傾向を示しており, 理論解への収束性が示される結果となった.

なお, 図 13 右側の拡大図を見るとわかるように, $n = \{2, 3\}$ の条件では高解像度を使用した場合の無次元振幅が 1 を超える結果となっており, 厳密には理論解に収束していない. これはここで用いた理論解が体積保存を満

Fig. 13 Time history of surface displacement at $\theta = 0$. Calculation results show excellent agreement with Lamb's theory.

たしておらず、厳密な解でないことが原因として挙げられる。式 (45) を仮定したとき液滴の体積は

$$V_{\text{theory}}(t) = \pi \left(R_0^2 + \frac{a^2}{4} (1 + \cos^2(2\omega t)) \right) \quad (47)$$

という時間依存の関数となる。一方で、数値計算では初期の体積

$$V_0 = \pi \left(R_0^2 + \frac{a^2}{2} \right) \quad (48)$$

を保存しようとするから、理論解とは整合しないことがわかる。更に、平衡状態における液滴半径は

$$r_{\text{eq}} = \sqrt{R_0^2 + \frac{a^2}{2}} \quad (49)$$

となるから、界面変形量 Δr の定義において R_0 を基準半径として用いることも振幅を評価する上で誤差になって

(c) $n = 6$ (d) $n = 9$

Fig. 13 (continued)

いると考えられる。

4. 結 言

本研究では、液滴挙動の数値解析における粒子法の計算精度を改善するための新たな手法として「移動サーフェスメッシュ」を用いる方法を提案した。移動サーフェスメッシュとは界面位置に陽的に配置する表面メッシュであり、各表面ノードをLagrange的に移動することで界面変形を高精度に追跡する。界面形状が明確に定義されることにより形状情報そのものから直接的に表面張力を算出でき、また、表面張力を自由表面にかかる応力として厳密に境界条件に導入することができる。その他にも、空間離散化を行う際の高精度スキームの不安定化を抑制できる利点などがある。

提案手法の妥当性を検証するための数値実験として、各種ベンチマーク問題の数値計算を実施し理論解との比較を行った。円形パッチテストでは、非粘性・表面張力なしとしたときの円形液滴の伸張を計算した。中心点圧力、短半径、長半径の時間発展について理論解との良好な一致が確認され、基本的な流れの計算の妥当性が示された。正方形を初期液滴形状としたときの流れの計算を行い、定常状態における内部圧力値について理論解(ラプラス圧)との比較を行った。その結果、定常解への収束と内部圧力値が理論解と一致することを確認し、表面張力計算の妥当性が示された。最後に、非粘性条件での液滴振動問題を解析し、表面張力を駆動力とする界面の振動現象を解析した。様々な振動モードに対して、界面変形の振動挙動についてLambの理論解との比較を行った。その結果、界面の振動周期は理論解とよく一致し、提案手法の妥当性が示された。

謝 辞

本研究は日本学術振興会の科学研究費助成金 (JSPS 科研費) 若手研究 19K20283 の助成を受けたものである。

文 献

- Adami, S., Hu, X.Y. and Adams, N.A., A new surface-tension formulation for multi-phase SPH using a reproducing divergence approximation, *Journal of Computational Physics*, Vol.229 (2010), pp.5011–5021.
- Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Zemach, C., A continuum method for modeling surface tension, *Journal of Computational Physics*, Vol.100 (1992), pp.335–354.
- Cairncross, R.A., Schunk, P.R., Baer, T.A., Rao, R.R. and Sackinger, P.A., A finite element method for free surface flows of incompressible fluids in three dimensions. Part I. Boundary fitted mesh motion, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.33 (2000), pp.375–403.
- Colagrossi, A. and Landrini, M., Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol.191 (2003), pp.448–475.
- Colagrossi, A., A meshless Lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation (2005), PhD Thesis, University of Rome, La Sapienza.
- Farin, G., *Curves and surfaces for computer aided geometric design* (1996), Academic Press.
- Gotoh, H. and Sakai, T., Lagrangian simulation of breaking waves using particle method, *Coastal Engineering Journal*, Vol.41 (1999), pp.303–326.
- Harvie, D.J.E., Davidson, M.R. and Rudman, M., An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.30 (2006), pp.1056–1066.
- Hirt, C.W. and Nichols, B.D., Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, Vol.39 (1981), pp.201–225.
- Hu, X.Y. and Adams, N.A., A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows, *Journal of Computational Physics*, Vol.213 (2006), pp.844–861.
- Khayyer, A. and Gotoh, H., Enhancement of stability and accuracy of the moving particle semi-implicit method, *Journal of Computational Physics*, Vol.230 (2011), pp.3093–3118.
- Khayyer, A., Gotoh, H., Falahaty, H. and Shimizu, Y., An enhanced ISPH-SPH coupled method for simulation of incompressible fluid-elastic structure interactions, *Computer Physics Communications*, Vol.232 (2018), pp.139–164.
- Kondo, M., Koshizuka, S., Suzuki, K. and Takimoto, M., Surface tension model using inter-particle force in particle method, *Proceedings of the FEDSM2007* (2007), Paper No.FEDSM2007-37215.
- Koshizuka, S. and Oka, Y., Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123 (1996), pp.421–434.
- Koshizuka, S., Shibata, K., Kondo, M. and Matsunaga, T., *Moving particle semi-implicit method* (2018), Academic Press.
- Krimi, A., Rezoug, M., Khelladi, S., Nogueira, X., Deligant, M. and Ramírez, L., Smoothed particle hydrodynamics: a consistent model for interfacial multiphase fluid flow simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol.358 (2018), pp.53–87.
- Lafaurie, B., Nardone, C., Scardovelli, R., Zaleski, S. and Zanetti, G., Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER, *Journal of Computational Physics*, Vol.113 (1994), pp.134–147.
- Lamb, H., *Hydrodynamics* (1932), Cambridge University Press.
- 松永拓也, 柴田和也, 越塚誠一, MPS 法における境界積分を用いたポリゴン壁境界表現, *日本機械学会論文集*, Vol.84, No.864 (2018), DOI:10.1299/transjsme.18-00197.
- Matsunaga, T., Yuhashi, N., Shibata, K. and Koshizuka, S., A wall boundary treatment using analytical volume integrations in a particle method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, under review (2019).
- Monaghan, J.J., Smoothed particle hydrodynamics, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol.30 (1992), pp.543–574.

- Morikawa, D., Asai, M., Idris, N., Imoto, Y. and Isshiki, M., Improvements in highly viscous fluid simulation using a fully implicit SPH method, *Computational Particle Mechanics* (2019), DOI:10.1007/s40571-019-00231-6.
- Morris, J.P., Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.33 (2000), pp.333–353.
- Murotani, K., Koshizuka, S., Tamai, T., Shibata, K., Mitsume, N., Yoshimura, S., Tanaka, S., Hasegawa, K., Nagai, E. and Fujisawa, T., Development of hierarchical domain decomposition explicit MPS method and application to large-scale tsunami analysis with floating objects, *Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering*, Vol.1 (2014), pp.16–35.
- Nomura, K., Koshizuka, S., Oka, Y. and Obata, H., Numerical analysis of droplet breakup behavior using particle method, *Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol.38 (2001), pp.1057–1064.
- Shao, J.R., Li, H.Q., Liu, G.R. and Liu, M.B., An improved SPH method for modeling liquid sloshing dynamics, *Computers & Structures*, Vol.100 (2012), pp.18–26.
- Shibata, K., Koshizuka, S. and Oka, Y., Numerical analysis of jet breakup behavior using particle method, *Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol.41 (2004), pp.715–722.
- Sirotkin, F.V. and Yoh, J.J., A new particle method for simulating breakup of liquid jets, *Journal of Computational Physics*, Vol.231 (2012), pp.1650–1674.
- Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, Vol.114 (1994), pp.146–159.
- Takagi, S., Matsumoto, Y. and Huang, H., Numerical analysis of a single rising bubble using boundary-fitted coordinate system, *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, Vol.40 (1997), pp.42–50.
- Tamai, T. and Koshizuka, S., Least squares moving particle semi-implicit method, *Computational Particle Mechanics*, Vol.1 (2014), pp.277–305.
- Tartakovsky, A. and Meakin, P., Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodynamics, *Physical Review E*, Vol.72 (2005), 026301.
- Tryggvason, G., Scardovelli, R. and Zaleski, S., *Direct numerical simulations of gas-liquid multiphase flows* (2011), Cambridge University Press.
- Tsuruta, N., Khayyer, A. and Gotoh, H., Space potential particles to enhance the stability of projection-based particle methods, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol.29 (2015), pp.100–119.
- Unverdi, S.O. and Tryggvason, G., A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows, *Journal of Computational Physics*, Vol.100 (1992), pp.25–37.
- Wang, Z.-B., Chen, R., Wang, H., Liao, Q., Zhu, X. and Li, S.-Z., An overview of smoothed particle hydrodynamics for simulating multiphase flow, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.40 (2016), pp.9625–9655.
- Yuhashi, N., Matsuda, I. and Koshizuka, S., Calculation and validation of stirring resistance in cam-shaft rotation using the moving particle semi-implicit method, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol.11 (2016), DOI:10.1299/jfst.2016jfst0018.

References

- Adami, S., Hu, X.Y. and Adams, N.A., A new surface-tension formulation for multi-phase SPH using a reproducing divergence approximation, *Journal of Computational Physics*, Vol.229 (2010), pp.5011–5021.
- Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Zemach, C., A continuum method for modeling surface tension, *Journal of Computational Physics*, Vol.100 (1992), pp.335–354.
- Cairncross, R.A., Schunk, P.R., Baer, T.A., Rao, R.R. and Sackinger, P.A., A finite element method for free surface flows of incompressible fluids in three dimensions. Part I. Boundary fitted mesh motion, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.33 (2000), pp.375–403.
- Colagrossi, A. and Landrini, M., Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol.191 (2003), pp.448–475.

- Colagrossi, A., A meshless Lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation (2005), PhD Thesis, University of Rome, La Sapienza.
- Farin, G., Curves and surfaces for computer aided geometric design (1996), Academic Press.
- Gotoh, H. and Sakai, T., Lagrangian simulation of breaking waves using particle method, Coastal Engineering Journal, Vol.41 (1999), pp.303–326.
- Harvie, D.J.E., Davidson, M.R. and Rudman, M., An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations, Applied Mathematical Modelling, Vol.30 (2006), pp.1056–1066.
- Hirt, C.W. and Nichols, B.D., Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, Journal of Computational Physics, Vol.39 (1981), pp.201–225.
- Hu, X.Y. and Adams, N.A., A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows, Journal of Computational Physics, Vol.213 (2006), pp.844–861.
- Khayyer, A. and Gotoh, H., Enhancement of stability and accuracy of the moving particle semi-implicit method, Journal of Computational Physics, Vol.230 (2011), pp.3093–3118.
- Khayyer, A., Gotoh, H., Falahaty, H. and Shimizu, Y., An enhanced ISPH-SPH coupled method for simulation of incompressible fluid-elastic structure interactions, Computer Physics Communications, Vol.232 (2018), pp.139–164.
- Kondo, M., Koshizuka, S., Suzuki, K. and Takimoto, M., Surface tension model using inter-particle force in particle method, Proceedings of the FEDSM2007 (2007), Paper No.FEDSM2007-37215.
- Koshizuka, S. and Oka, Y., Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, Nuclear Science and Engineering, Vol.123 (1996), pp.421–434.
- Koshizuka, S., Shibata, K., Kondo, M. and Matsunaga, T., Moving particle semi-implicit method (2018), Academic Press.
- Krimi, A., Rezoug, M., Khelladi, S., Nogueira, X., Deligant, M. and Ramírez, L., Smoothed particle hydrodynamics: a consistent model for interfacial multiphase fluid flow simulations, Journal of Computational Physics, Vol.358 (2018), pp.53–87.
- Lafaurie, B., Nardone, C., Scardovelli, R., Zaleski, S. and Zanetti, G., Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER, Journal of Computational Physics, Vol.113 (1994), pp.134–147.
- Lamb, H., Hydrodynamics (1932), Cambridge University Press.
- Matsunaga, T., Shibata, K. and Koshizuka, S., Boundary integral based polygon wall representation in the MPS method, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.84, No.864 (2018), DOI:10.1299/transjsme.18-00197.
- Matsunaga, T., Yuhashi, N., Shibata, K. and Koshizuka, S., A wall boundary treatment using analytical volume integrations in a particle method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, under review (2019).
- Monaghan, J.J., Smoothed particle hydrodynamics, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol.30 (1992), pp.543–574.
- Morikawa, D., Asai, M., Idris, N., Imoto, Y. and Isshiki, M., Improvements in highly viscous fluid simulation using a fully implicit SPH method, Computational Particle Mechanics (2019), DOI:10.1007/s40571-019-00231-6.
- Morris, J.P., Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.33 (2000), pp.333–353.
- Murotani, K., Koshizuka, S., Tamai, T., Shibata, K., Mitsume, N., Yoshimura, S., Tanaka, S., Hasegawa, K., Nagai, E. and Fujisawa, T., Development of hierarchical domain decomposition explicit MPS method and application to large-scale tsunami analysis with floating objects, Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering, Vol.1 (2014), pp.16–35.
- Nomura, K., Koshizuka, S., Oka, Y. and Obata, H., Numerical analysis of droplet breakup behavior using particle method, Journal of Nuclear Science and Technology, Vol.38 (2001), pp.1057–1064.
- Shao, J.R., Li, H.Q., Liu, G.R. and Liu, M.B., An improved SPH method for modeling liquid sloshing dynamics, Computers & Structures, Vol.100 (2012), pp.18–26.
- Shibata, K., Koshizuka, S. and Oka, Y., Numerical analysis of jet breakup behavior using particle method, Journal of Nuclear Science and Technology, Vol.41 (2004), pp.715–722.
- Sirotkin, F.V. and Yoh, J.J., A new particle method for simulating breakup of liquid jets, Journal of Computational Physics,

Vol.231 (2012), pp.1650–1674.

- Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, Vol.114 (1994), pp.146–159.
- Takagi, S., Matsumoto, Y. and Huang, H., Numerical analysis of a single rising bubble using boundary-fitted coordinate system, *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, Vol.40 (1997), pp.42–50.
- Tamai, T. and Koshizuka, S., Least squares moving particle semi-implicit method, *Computational Particle Mechanics*, Vol.1 (2014), pp.277–305.
- Tartakovsky, A. and Meakin, P., Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodynamics, *Physical Review E*, Vol.72 (2005), 026301.
- Tryggvason, G., Scardovelli, R. and Zaleski, S., *Direct numerical simulations of gas-liquid multiphase flows* (2011), Cambridge University Press.
- Tsuruta, N., Khayyer, A. and Gotoh, H., Space potential particles to enhance the stability of projection-based particle methods, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol.29 (2015), pp.100–119.
- Unverdi, S.O. and Tryggvason, G., A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows, *Journal of Computational Physics*, Vol.100 (1992), pp.25–37.
- Wang, Z.-B., Chen, R., Wang, H., Liao, Q., Zhu, X. and Li, S.-Z., An overview of smoothed particle hydrodynamics for simulating multiphase flow, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.40 (2016), pp.9625–9655.
- Yuhashi, N., Matsuda, I. and Koshizuka, S., Calculation and validation of stirring resistance in cam-shaft rotation using the moving particle semi-implicit method, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol.11 (2016), DOI:10.1299/jfst.2016jfst0018.