逆均質化法と H^1 勾配法を用いた周期的マイクロ構造の
マルチスケール形状最適化加藤 匠^{*1}, 藤岡 みなみ^{*2}, 下田 昌利^{*3}Multi-scale shape optimization method for designing a macrostructure with
periodic-microstructures using inverse homogenization method and H^1 gradient methodTakumi KATO ^{*1}, Minami FUJIOKA ^{*2} and Masatoshi SHIMODA ^{*3}^{*1} Graduate School of Advanced Science and Technology, Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tempaku-ku, Nagoya 468-8511, Japan^{*2, *3} Department of Advanced Science and Technology, Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tempaku-ku, Nagoya 468-8511, Japan

Received: 15 July 2019; Revised: 1 November 2019; Accepted: 28 November 2019

Abstract

It is known that mechanical behavior of a composite structure is strongly influenced by not only the shape and properties of the macroscopic region but also the shape and properties of the micro region. In this study, we propose a multi-scale shape optimization method to design the shape of a periodic microstructure. The method consists of two-step optimization. At first, the material properties of a macrostructure are optimized using a size-optimization technique, where the components of the linear elastic tensor are set as the design variables. Objective function and the constraints are set according to design purpose. Next, the shapes of periodic-microstructures are determined to identify the material properties of the macrostructures obtained in the first step, where the inverse homogenization method and the H^1 gradient method are used. The shape optimization problem of a microstructure is formulated as a distributed-parameter optimization problem, in which the mass is set as an objective functional and the shape variation field is set as a design variable, as the constraints are the target macroscopic material properties and the homogenization equation. Through numerical calculation examples, we confirmed the effectiveness of the proposed method based on the inverse homogenization method and the H^1 gradient method.

Keywords : Multi-scale optimization, Homogenization, Inverse homogenization method, Shape optimization, H^1 gradient method

1. 緒 言

近年、工業製品に利用されている複合材料は軽量化を狙った孔を含む複数の異種材料から構成されるものが開発されてきており、その力学的挙動はマクロ領域だけでなくミクロ領域内での材料の特性、形状などに強く影響することが知られている。そのため、構造設計においてマクロ構造の力学的特性を引き出す、もしくは目的に合わせてコントロールできるような最適なミクロ構造の開発や実現への期待が高まっている。しかし、これらを材料実験だけで解決するには膨大な時間とコストが必要となり、さらに実験で得られたミクロ構造の最適性が保証されるわけではない。このような背景から、近年 CAE を活用した合理的な材料開発が進められるようになり、CAE と構造最適化手法を組み合わせた材料設計が主流になりつつある。本研究では、特にミクロとマクロの物性や挙動を連成させて解析を行うマルチスケール構造設計手法に注目する。マルチスケール構造の代表的な例とし

てマイクロラティス構造が挙げられる, この構造は非常に軽量であることに加えて強度を有するため宇宙開発・航空機などに応用できると注目されており, その生産性に関しても, 近年は 3D プリンターの登場によりこれまで製作が困難とされてきた複雑な形状でも一体造形を行うことが可能になってきている. Sun ら(2014)によれば, 金属のミクロ領域において結晶方位・結晶粒径を制御しながらマクロ構造を製作するための技術報告もいくつかなされている. これらの技術が確立されれば将来的にマルチスケール構造設計が 3D プリンターによって生産が可能であることが示唆されている.

マルチスケール構造設計において強力なツールとなるのが均質化法である. 均質化法では, 通常のマクロスケールに加え微視領域における材料の非均質さを表すことのできるミクロスケールを導入し, 両スケールに対応する 2 変数の境界値問題を解くことによって, 非均質構造物が周期性を持つ微視構造によって構成されている場合, 等価な均質化弾性定数が求められる. マルチスケール最適化にはミクロ-マクロの境界値問題を同時に解く手法(強連成)と予めマクロ構造の最適化問題を解き, 続いてミクロ構造の最適化を行う 2 段階手法(弱連成)が考えられる. 同時最適化手法の例として, Rodrigues ら(2002)はマクロ構造とミクロ構造の両方の挙動を考慮し, 両者のトポロジーを同時に最適化する手法を提案している. そこでは一つのマクロ構造の中に領域ごとに異なる複数のミクロ構造を求めている. Niu ら(2009)は均質化法による周期性条件を満たしながら低次固有振動数の最大化を行うミクロとマクロ構造両方のトポロジー同時最適化手法を提案している. この手法ではマクロ構造全体の中に一つのミクロ構造のみを考えている. 2 段階最適化手法の例として, Schury ら(2012)が最初に Free material optimization (FMO)を利用してマクロ構造を最適化し, 次に逆均質化法を使用してミクロ構造のトポロジーを設計するマクロとミクロスケールの設計を順次検討する手法を提案している.

逆均質化法は Sigmund(1994)によって提案されたもので, 均質化法とは逆に, 与えられた均質化弾性定数を実現する周期的ミクロ構造を求める手法である. 多くの報告が行われており, 例えば, Sigmund はトポロジー最適化を用いた逆均質化法によって所定の弾性テンソルを有する材料を設計できることを示している. Coelho ら(2016)は逆均質化法とトポロジー最適化を組み合わせる特定の特性を持った周期的な複合材料の最適設計手法の提案している. 加藤らは構造物の劣化の原因であるマイクロクラック(微細ひび割れ)を検出するため, 逆均質化法とトポロジー最適化を組み合わせるマイクロクラックの分布を予測する手法を提案している. Lipton ら(2006)は構造要素間の接合部や接合部付近の応力制御を行いながら傾斜微細構造を設計するために逆均質化法を利用している. また, Andreassen ら(2013)は逆均質化法とトポロジー最適化を組み合わせるオーセンチック材料の最適化を行い, 実際に 3D プリンターで最適化構造を作成し製造可能であることを示している. Nika ら(2019)は多層材料に対して, 逆均質化法とレベルセット法, 形状勾配関数を使用して, 形状が平滑化された最適なミクロ構造を得るための手法の提案を行っている. 更に, 複合材料を対象に逆均質化法を用いた研究も発表されている. Trofimov ら(2018)は複合材料成分の弾性および電気(熱)特性を評価する方法論を逆均質化法に基づいて提案し, FEM の結果と比較・検証を行っている.

上記のように, 逆均質化法とトポロジー最適化を組み合わせた最適化手法は数多く提案され, マルチスケール構造設計問題へも応用されている. しかし, 著者らの調査の限りでは逆均質化法と形状最適化を組み合わせた最適化手法はまだ提案されていないようである. 本研究では, ミクロ構造の形状設計に逆均質化法と形状最適化を組み合わせた新たなマルチスケール構造設計手法を示す. 軽量化に有効な多孔質材料からなる構造体を対象にそのミクロ構造内の形状設計手法の提案を行う. マクロ構造を対象に, ある寸法最適化問題を材料特性を設計変数として先に解き, 得られたマクロな材料特性と等価な特性を持つミクロ構造を逆均質化法によって決定するといった 2 段階の弱連成最適化手法である. ミクロ構造の形状設計では面積を目的関数とし, H^1 勾配法を利用しマクロ構造の寸法最適化で決定された材料特性を制約条件とする. 両問題を定式化し, ミクロ構造最適化に関しては形状勾配関数(感度関数)と最適性条件を, 変分法および随伴変数法を適用することにより理論的に導出する. 導出された形状勾配関数を H^1 勾配法に適用することにより, 滑らかな最適形状を決定する. 最後に数値計算例を示し, 形状最適化のそれぞれの計算結果の比較を行い, 本研究の有効性を述べる.

2. マルチスケール構造最適化問題

本節では、区分的周期性マイクロ構造を有するマクロ構造のマルチスケール構造設計、すなわちマクロとマイクロ領域での最適化問題の定式化を行う。本研究で用いるマルチスケール構造設計はまずマクロ構造の寸法最適化問題を解き、続いて順次マイクロ構造の形状最適化を行う2段階最適化で行う。第一段階のマクロ構造の寸法最適化では設計目的に応じて各領域又は各要素の材料特性すなわち弾性テンソル成分の最適化を行う。第二段階では、マクロ構造の最適化で得られた各領域又は各要素の弾性テンソル成分を制約値として、逆均質化法により周期的マイクロ構造を形状最適化により求める。詳しいフローチャートは3.2項で示す。

図1には区分的周期性マイクロ構造を有するマクロ構造の概念図を示す。(a)のマクロ構造領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に物体力 $f \in \mathbb{R}^n$ が作用し、境界 $\partial\Omega = \Gamma$ の一部 Γ_1 では変位が拘束され、残りの境界 Γ_2 では表面力 $P \in \mathbb{R}^n$ が作用している状態を仮定する。 $\mathbb{R}$ は実数を表す($n=2,3$)。 $E(x) \in \mathbb{R}^{n^2}$ はマクロ構造における弾性テンソルを表す。(b)はマクロ構造内の区分的に周期的なマイクロ構造を、(c)は周期的なマイクロ構造におけるユニットセルを表している。 Y は周期(代表長さ)である。 $E^\varepsilon(x)$ はマイクロ構造材料の弾性テンソルを表す。

2・1 マクロ構造の寸法最適化問題

ここでは、区分的に均質化された異方性材料で構成される領域 Ω の2次元マクロ構造を考え、マルチスケール構造設計の第一段階であるマクロ構造の寸法最適化問題の定式化を行う。マクロ構造最適化の設計変数として、対称性を有する式(1)の異方性材料の6つの弾性テンソル成分を考える。また、式(1)は混乱のない範囲で式(2)の添字表記を適用することとする。

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1112} \\ & E_{2222} & E_{2212} \\ \text{sym.} & & E_{1212} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$[E_i] = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ & E_4 & E_5 \\ \text{sym.} & & E_6 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Fig.1 A multi-scale structure. (a) shows a macro structure (or a linear elastic continuum), (b) shows a periodic micro structure. (c) shows a unit cell with length Y .

マクロ構造におけるマイクロ構造の配置は設計目的によって任意に設定可能である。1種類の周期的マイクロ構造のみでマクロ構造を配置させる場合や領域を分割してそれぞれに異なった周期的マイクロ構造を配置させる場合等が想定される。全領域の至るところで異なった周期的マイクロ構造を構成させる場合は要素数分の領域が設定される。ここでは、領域数に設計変数の弾性テンソルを乗じたものがマクロ構造の寸法最適化問題の全設計変数の総数となる。

全マクロ領域が 1 種類の周期的マイクロ構造からなると仮定した場合、目的関数 W 、不等式と等式制約条件 g, h を用いると、寸法最適化問題は次のように表される。なお、目的関数と制約条件は設計目的に応じて設定される。

$$\begin{aligned} & \text{find : } [E_1] \quad I=1, \dots, 6, \\ & \text{minimize : } W(E_1, E_2, \dots, E_6), \\ & \text{subject to : } g(E_1, E_2, \dots, E_6) \leq 0, \\ & \quad h(E_1, E_2, \dots, E_6) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

このマクロ構造の寸法最適化問題を数理計画法を利用して解くことにより E_1 から E_6 の値を決定する。これを周期性マイクロ構造の形状最適化問題の制約条件として与え、逆均質化法により具体的なマイクロ構造の形状を求める。

2・2 均質化法と逆均質化法

マイクロ構造の形状最適化の定式化に先立ち、そこで用いる均質化法と逆均質化法について示す。数値解析における均質化法は 1970 年代から発展し (Bensoussan et al., 1978)、マイクロ構造の解析を通じてマクロ材料特性を導くための方法論として、構造全体で均質化または平均化された弾性テンソルを計算するために利用されている。

図 1(b), (c)で示した、ユニットセルによって周期的に埋め尽くされたマイクロ領域 Ω^ε を解析対象とし、微小変位の弾性問題を仮定する。ただし、上付きの ε はマクロな座標系とマイクロな座標系との比を表す。このとき、微小変位の平衡方程式の弱形式は次式で与えられる (Sigmund(1994))。

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v_l^\varepsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial\Omega^\varepsilon} t_i v_i^\varepsilon dS + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon d\Omega, \quad \forall v_i^\varepsilon \in H_0^1. \quad (4)$$

なお、 $\partial\Omega^\varepsilon$ は解析対象の境界、 E_{ijkl}^ε はマイクロ材料の弾性テンソルを表し、 u_k^ε は変位、 v_i^ε は仮想変位である。 H_0^1 は 1 階までの微分の 2 乗が有界可積分なヒルベルト空間 (許容変位空間) を表す。 t_i は表面力、 f_i^ε は物体力を表す。式(4)に漸近展開法を用いると均質化弾性テンソル E_{ijkl}^H は式(5)のように表される (Sigmund, 1994)。式(5)は大きさ 1 の初期ひずみをマイクロ構造に与え、そこで得られる応力の体積平均によって均質化弾性テンソルが計算されることを示しており、標準的な汎用 FEM コードで計算可能である。なお、均質化弾性テンソルもマクロ構造の弾性テンソルと同様、混乱のない範囲で式(1)と式(2)の添字表記の関係 $[E_{ijkl}^H] \rightarrow [E_i^H]$ を適用することとする。

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left\{ E_{ijkl}^\varepsilon - E_{ijpq}^\varepsilon \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right\} dY, \quad (5)$$

ここで、 Y は大きさ 1 の周期的なマイクロ構造領域を示す。 χ^{kl} は特性変位と呼ばれ、2 次元弾性体の場合は対称性を考慮すると $kl=11, 22, 12$ に対応するそれぞれ大きさ 1 の単位初期ひずみを与え、次式により計算される。

$$a(\chi^{kl} - Y^{kl}, v^{kl}) = 0 \quad \forall v^{kl} \in U_Y, \quad (kl=11, 22, 12) \quad (6)$$

ただし、双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ は式(7)を用いる。 Y^{kl} は kl 成分による初期ひずみによって生じる線形な基本変位場を表す。 U_Y は周期性の条件を満たす許容変位空間を表す。なお、表記を簡潔にするため、 $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ をそれぞれ u, v として表すこととする。添字表記では総和規約と空間座標に関する偏微分表記 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を用いる。

$$a(u, v) = \int_Y E_{ijkl}^\varepsilon u_{k,i} v_{l,j} dY, \quad (7)$$

$$U_Y = \left\{ v^{kl} \in H^1(Y; \mathbb{R}^n) \mid v^{kl} \text{ is } Y\text{-periodic in the unit cell } Y \right\}, \quad (kl=11, 22, 12). \quad (8)$$

孔付きのユニットモデルにそれぞれ単位初期ひずみを与えた際の 3 つの特性変位モードを図 2 に示す。

Fig.2 Characteristic displacements of a unit cell. They are calculated by applying the unit initial strains with respect to kl ($=11, 22, 12$), respectively.

逆均質化法は Sigmund(1994)によって提案されたもので、式(5)の均質化弾性テンソル E_{ijkl}^H の値を与え、それを実現する周期的なユニットセル構造を求める方法である。本研究では前述のように、マクロ構造の寸法最適化によって得られた均質化弾性テンソル成分を制約条件として与え、それを実現するミクロ構造の形状を求める逆均質化法を示す。次節ではミクロ構造を構成するユニットセルの形状最適化問題を定式化し、ラグランジュ乗数法を用いて形状勾配関数を導出する。

2・3 ミクロ構造の形状最適化問題

2次元線形弾性体の逆均質化法を用いた形状最適化問題は、周期的ミクロ構造のユニットセルの面積 A を目的関数とし、図3に示す形状変動場 $\mathbf{V}$ を設計変数とする形状最適化問題として次のように表される。 χ^{kl} 決定のためのミクロ構造の状態方程式に加え、均質化弾性テンソル E_{ijkl}^H (または E_I^H) の対称性を考慮した6成分に対して等式制約条件を与える (制約値を $\bar{E}_I^H$ とする)。双一次形式 $a^{(1)}(\cdot, \cdot)$ は対称性を考慮した場合、 $kl=11, 22, 12$ の3つの状態方程式からなるが、形状勾配関数導出の都合上、均質化弾性テンソル成分 E_I^H と状態方程式 $a^{(1)}(\chi^{kl} - \mathbf{Y}^{kl}, \mathbf{v}^{kl}) = 0$ を1対1に対応させ、重複を含めて6つとする。

$$\begin{aligned}
 & \text{find } \mathbf{V}, \\
 & \text{minimizes } A \left(= \int_Y dY \right), \\
 & \text{subject to } a^{(1)}(\chi^{kl} - \mathbf{Y}^{kl}, \mathbf{v}^{kl}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}^{kl} \in U_Y, \quad (I=1, \dots, 6), \\
 & \quad \bar{E}_I - E_I^H = 0, \quad (I=1, \dots, 6).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Fig.3 Shape variation field $\mathbf{V}$ on the design boundary Γ in a unit cell.

本問題におけるラグランジュ汎関数 L は $\mathbf{v}^{kl}$ を状態方程式制約に関するラグランジュ乗数関数 (ベクトル) と Λ^I を均質化弾性テンソルの制約条件におけるラグランジュ乗数 (スカラー) として次のように表される。

$$L = \int_Y dY - \sum_{I=1}^6 a^{(1)}(\chi^{kl} - \mathbf{Y}^{kl}, \mathbf{v}^{kl}) + \sum_{I=1}^6 \Lambda^I (\bar{E}_I - E_I^H), \tag{10}$$

また、上式で定義されるラグランジュ汎関数の物質導関数 $\dot{L}$ は $E'_{ijmn}=0$, $Y^{kl'}_{m,n}=0$ を考慮すると以下のように表される。なお、 $(\cdot)'$ は形状導関数、 $(\dot{\cdot})$ は物質導関数を表す(Choi and Kim, 2015)。

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \int_{\Gamma_Y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma_Y \\ &\quad - \sum_{I=1}^6 \int_Y \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl'} v_{i,j}^{kl} + E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl'} - E_{ijmn}^{\varepsilon} Y_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl'} \right]^{(I)} dY - \sum_{I=1}^6 \int_{\Gamma_Y} \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl} - E_{ijmn}^{\varepsilon} Y_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl} \right]^{(I)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma_Y \\ &\quad + \sum_{I=1}^6 \int_Y \Lambda^I \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl'} \right]^{(I)} dY - \sum_{I=1}^6 \int_{\Gamma_Y} \Lambda^I \left[E_{ijkl}^{\varepsilon} - E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} \right]^{(I)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma_Y + \sum_{I=1}^6 \Lambda^{I'} (\bar{E}_I - E_I^H) \\ &= - \sum_{I=1}^6 a^{(I)} (\chi^{kl} - Y^{kl}, \mathbf{v}^{kl'}) - \sum_{I=1}^6 a^{(I)} (\chi^{kl'}, \mathbf{v}^{kl}) + \sum_{I=1}^6 \int_Y \Lambda^I \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl'} \right]^{(I)} dY + \sum_{I=1}^6 \Lambda^{I'} (\bar{E}_I - E_I^H) \\ &\quad + \sum_{I=1}^6 \int_{\Gamma_Y} \left\{ \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} Y_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl} - E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl} \right]^{(I)} - \Lambda^I \left[E_{ijkl}^{\varepsilon} - E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} \right]^{(I)} \right\} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma_Y + \int_{\Gamma_Y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma_Y\end{aligned}\quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は境界 Γ_Y 上の外向き単位法線ベクトルを表す。 $[\cdot]^{(I)}$ は均質化弾性テンソルのI成分(式(2)参照)に関して求められる。

次の式(12)、式(13)及び式(14)が満たされている場合、 $\dot{L}$ は式(15)のように表される。

$$a^{(I)} (\chi^{kl} - Y^{kl}, \mathbf{v}^{kl'}) = 0, \quad \forall \mathbf{v}^{kl'} \in U_Y, \quad (I=1, \dots, 6), \quad (12)$$

$$a^{(I)} (\chi^{kl'}, \mathbf{v}^{kl}) = \int_Y \Lambda^I \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl'} \right]^{(I)} dY, \quad \forall \chi^{kl'} \in U_Y, \quad (I=1, \dots, 6), \quad (13)$$

$$\bar{E}_I - E_I^H = 0, \quad (I=1, \dots, 6), \quad (14)$$

$$\dot{L} = \langle \mathbf{G}, \mathbf{V} \rangle = \int_{\Gamma_Y} \mathbf{G} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma_Y. \quad (15)$$

スカラー関数 G は形状勾配密度関数とよばれ、次のように表される。また、ベクトル関数 $\mathbf{G} (=G\mathbf{n})$ は形状勾配関数とよばれる。

$$\mathbf{G} = 1 + \sum_{I=1}^6 \left\{ \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} Y_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl} - E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl} \right]^{(I)} - \Lambda^I \left[E_{ijkl}^{\varepsilon} - E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} \right]^{(I)} \right\}. \quad (16)$$

なお、式(12)は χ^{kl} を決定するための状態方程式であり、式(13)は $\mathbf{v}^{kl}$ を決定するための随伴方程式である。式(14)は逆均質化弾性テンソル成分の等式制約を表している。

式(12)は次式のように表すことができ、

$$a^{(I)} (\chi^{kl}, \mathbf{v}^{kl'}) = \int_Y \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} Y_{m,n}^{kl} v_{i,j}^{kl'} \right]^{(I)} dY, \quad \forall \mathbf{v}^{kl'} \in U_Y, \quad (I=1, \dots, 6), \quad (17)$$

式(13)、式(17)から次の関係が得られる。

$$[\mathbf{v}^{kl}]^{(I)} = \Lambda^I [\chi^{kl}]^{(I)}, \quad (I=1, \dots, 6), \quad (18)$$

この関係を用いると、最終的な形状勾配密度関数は次のように表される。

$$\mathbf{G} = 1 + \sum_{I=1}^6 \Lambda^I \left[E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl} (Y_{i,j}^{kl} - \chi_{i,j}^{kl}) - (E_{ijkl}^{\varepsilon} - E_{ijmn}^{\varepsilon} \chi_{m,n}^{kl}) \right]^{(I)}. \quad (19)$$

導出された形状勾配関数を H^1 勾配法に適用することにより、最適形状変動量(または設計速度場)を決定する。

3. ミクロ構造の形状最適化手法

3・1 H^1 勾配法

H^1 勾配法（力法）は畔上ら（1994）によって線形弾性体の形状最適化問題への適用が示された． H^1 勾配法では図4のように形状勾配関数に比例した荷重を擬似弾性問題の外力として設計境界の法線方向へ作用させることにより速度場 $\mathbf{V}$ を求め、それを元の形状に重ね合わせることで、境界の滑らかさを保ちながら目的関数を減少させることを可能とする． $\mathbf{V}$ の支配方程式は次式のように表される．

$$a(\mathbf{V}, \mathbf{v}) = -\langle \mathbf{G}, \mathbf{V} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in C_0, \quad (20)$$

ここで、 C_0 は剛体変位や設計制約等の形状変動の拘束条件を満たす許容関数空間とする．

目的関数の減少は次のように証明されている．状態方程式(12)と随伴方程式(13)、及び制約条件式(13)がすべて満たされているとき、ラグランジュ汎関数の摂動展開は次のように表される．

$$\Delta L = \langle \mathbf{G}, \Delta s \mathbf{V} \rangle + O(|\Delta s|^2), \quad (21)$$

ここで、 Δs が十分小さいとき、式(21)は $\mathbf{E}^\varepsilon$ の正定値性に基づく $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ の正定値性を考慮すると以下のように表される．

$$\Delta L \approx \langle \mathbf{G}, \Delta s \mathbf{V} \rangle = -a(\mathbf{V}, \Delta s \mathbf{V}) < 0. \quad (22)$$

Fig.4 H^1 gradient method for shape design of a unit cell. The distributed traction force in the normal direction to the design boundary $-\mathbf{G}\mathbf{n}$ are applied to determine $\mathbf{V}$.

この関係は速度場 $\mathbf{V}$ を用いて領域を変形していけば、凸性が保証されている問題において、ラグランジュ関数 L は必ず減少する関係を与えている．

本論文のように複数の制約条件を考慮して H^1 勾配法を適用するにあたって、下田ら(1995)の複数荷重を考慮したラグランジュ乗数及び速度場 $\mathbf{V}$ の決定方法を適用した．具体的には、微小変動を仮定することによる変形の線形性を考慮し、力 $\Delta s \mathbf{G}$ を一様な力 $\Delta s \mathbf{G}'' \mathbf{n} = \Delta s \mathbf{n}$ と境界に分布する力 $\Delta s \mathbf{G}_1 \mathbf{n}$ に分けて与える．式(23)に力 $\mathbf{G}$ を分解した式を示す．式(24), (25)は境界に分布する力を6成分で表記し直したものである．

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}'' \mathbf{n} + \sum_{i=1}^6 \Lambda^i \mathbf{G}^i \mathbf{n}, \quad (23)$$

ここで、

$$\mathbf{G}^i = \left[E_{ijmn}^\varepsilon \chi_{m,n}^{kl} (Y_{i,j}^{kl} - \chi_{i,j}^{kl}) - (E_{ijkl}^\varepsilon - E_{ijmn}^\varepsilon \chi_{m,n}^{kl}) \right]^{(0)}, \quad (24)$$

$$\mathbf{G}'' = \mathbf{1}, \quad (25)$$

このとき、 $\Delta s \mathbf{G}'' \mathbf{n}$ を作用させて得られる形状の各均質化弾性テンソルの変化を $\Delta E_1'', \Delta E_2'', \dots, \Delta E_6''$ とし、同様に $\Delta s \mathbf{G}^i \mathbf{n}$ を作用させたときの j 番目の各均質化弾性テンソルの変化を ΔE_j^i ($i=1, \dots, 6, j=1, \dots, 6$) とする．各制約条件を満たすようなラグランジュ乗数 Λ^i は次の連立方程式を解くことにより決定される．

$$\begin{Bmatrix} \Delta E_1^u \\ \Delta E_2^u \\ \vdots \\ \Delta E_6^u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta E_1^1 & \Delta E_1^2 & \cdots & \Delta E_1^6 \\ \Delta E_2^1 & \Delta E_2^2 & \cdots & \Delta E_2^6 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta E_6^1 & \Delta E_6^2 & \cdots & \Delta E_6^6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda^1 \\ \Lambda^2 \\ \vdots \\ \Lambda^6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{E}^1 \\ \Delta \bar{E}^2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{E}^6 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

上式を簡潔にすると、次式のように表される。

$$[\Delta E_j^1] \{\Lambda^1\} = \{\Delta \bar{E}^1\} - \{\Delta E_j^u\}. \quad (27)$$

ここで、 $\{\Delta E_j^u\}$ は一様な力に対する感度ベクトル、 $[\Delta E_j^1]$ は分布力に対する感度行列、 $\{\Delta \bar{E}^1\}$ は制約値との偏差を表している。(26)式から得られたラグランジュ乗数を以下の式に代入することで、制約を考慮した領域変動量 V を求めることができる。

$$V = V^u + \sum_{I=1}^6 \Lambda^I V^I. \quad (28)$$

ここで、 V^u は一様な力 $\Delta s G^u n$ を与えたときの領域変動量、 V^I は分布する力 $\Delta s G^I n$ を与えたときの領域変動量を表している。

3・2 ミクロスケール形状最適化システムの流れ

図5にミクロスケール形状最適化システムの流れを用いた。まず、マクロ構造の寸法最適最適化を実行し、 $\bar{E}_I$ ($I=1, \dots, 6$) を求める。続くミクロ構造最適化では、まず状態解析を解析を行い、モデルの均質化弾性テンソルを求め、それとマクロ構造最適化から得られた制約値 $\bar{E}_I$ との偏差により、収束を判定する。収束しない場合は形状勾配関数を計算し、 H^I 勾配法に基づき式(24)と式(25)で示される一様な力 $\Delta s G^u n$ と境界に分布する力 $\Delta s G^I n$ ($I=1, \dots, 6$) の計7つを設計境界に独立に与えて速度場解析を行う。各速度場解析の結果 (V^u, V^I ($I=1, \dots, 6$)) を用いて一端、仮の形状更新を行い、7つの仮形状に対して状態解析を介して均質化弾性テンソルと制約値との偏差を求める。続いて、式(26)により等式制約を満たすためのラグランジュ乗数を求め、式(28)により最適設計速度場(形状変動場)を決定する。最後に、得られた設計速度場を元の形状に重ね合わせて形状を更新する。これらの一連の動作を収束するまで繰り返す。なお、マクロスケール最適化を含む青枠の部分の計算には汎用 FEM コードの MSC/NASTRAN を用いた。

4. 数値計算例

4・1 逆均質化法に基づく形状最適化手法の検証

最初に、逆均質化法と H^I 勾配法を適用した形状最適化手法の有効性を確認するために行った数値解析例を示す。準備した解析モデルに対する均質化弾性テンソル成分を事前に求め、それを正解(教師形状)として逆均質化法を適用した。最適化のための初期ミクロ構造モデル(ユニットセルモデル)を図6(a)に示す。この円孔を有するユニットセルの有限要素モデルは定ひずみ3角形要素で離散化し(要素数は672)、材料のヤング率を 3.0×10^4 (Pa)、ポアソン比を0.3とした。均質化弾性テンソルを求めるための状態方程式(式(12))を解くための周期性境界条件として、図6(b)に示すような拘束を与えた。正方形領域の各頂点には SPC (Single point constraint, 単点拘束) を与えた。なお、図中の番号の1, 2は x と y 方向の並進自由度番号を表す。向い合う同色の辺には MPC (Multi point constraint, 多点拘束) を与え、対応する辺上の節点の変位が等しくなるように拘束した。教師形状として、H型と十字の孔を有する2つを準備し、均質化弾性定数を求めた。教師形状と得られた均質化弾性テンソルを図7に示す。

逆均質化法の検証のため、図7の各均質化弾性テンソル成分を目標値として最適化を行った結果を図8に示す。目標とする弾性テンソルは達成されているが、最適形状は教師形状とは異なっていることがわかる。これはこの問題が複数の最適解（多峰性）を有することを示している。

Fig.5 Flowchart of microscale optimization.

Fig.6 Initial model of micro-structure. (a) shows the periodic unit cell with a hole. (b) shows the periodic boundary condition (Single point constraint and Multi point constraint) of the unit cell.

	Reference model	Homogenized elastic moduls
(a)		$\begin{bmatrix} 1.21 & 0.21 & 0.00 \\ & 1.18 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.14 \end{bmatrix}$
(b)		$\begin{bmatrix} 0.91 & 0.17 & 0.00 \\ & 0.91 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.19 \end{bmatrix}$

Fig. 7 Unit cell models and their homogenized elastic tensors calculated.

	Target Value	Homogenized elastic moduls after optimization	Shape of moduls after optimization
(a)	$\begin{bmatrix} 1.21 & 0.21 & 0.00 \\ & 1.18 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.21 & 0.21 & 0.00 \\ & 1.18 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.14 \end{bmatrix}$
(b)	$\begin{bmatrix} 0.91 & 0.17 & 0.00 \\ & 0.91 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.91 & 0.17 & 0.00 \\ & 0.91 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.19 \end{bmatrix}$

Fig. 8 Optimal shapes and the homogenized elastic modulus obtained for (a) and (b). Comparing with Fig. 7, the elastic tensors obtained are satisfied with the target values, but the optimal shapes are different from the reference models.

4・2 マルチスケール構造最適化

4・2・1 マクロスケール寸法最適化

マクロ構造の寸法最適化問題を先に解き、得られたマクロな材料特性と等価な特性を持つマイクロ構造を逆均質化法によって決定する二段階のマルチスケール最適化の検証例を示す。使用するマクロ構造の初期モデルとして図9に示すような長さ40mm、高さ10mm（要素数400）の片持ちはりを用いた。自由端の上頂点に $P=100\text{N}$ の集中荷重を与え、左端の全節点を完全拘束した。マクロ構造の寸法最適化問題は式(29)のように設定した。問題設定として、目的関数には使用材料の和がコストや重量に相当すると仮定し、弾性テンソル成分の総和 W （最小化）を用い、負荷点の負荷方向変位 u_{force} が4.0mm以下になることを挙動制約条件として与えた。また、弾性テンソルが $0 < E_1^n \leq 1.0 \times 10^4 \text{Pa}$ の範囲で変動するように側面制約条件を与えた。マクロ構造中で異なるマイクロ構造を有する領域数を N とし、 $E_1^{(n)}$ は n 番目の領域での弾性テンソルのI成分を表す。今回は弾性テンソルの4成分（ $I=1,2,4,6$ ）を設計変数とし、初期値を $E_1 = E_4 = 1.0 \times 10^4 \text{Pa}$, $E_2 = 2.8 \times 10^3 \text{Pa}$, $E_6 = 3.6 \times 10^3 \text{Pa}$ とした。領域の数と配置は設計目的に応じて決定されるが、今回は2つのケースについて計算を行った。

1つ目ケースとして、要素ごとに異なるマイクロ構造を許容する、すなわち全要素の均質化弾性テンソルを設計変数として（合計400領域）寸法最適化を行った。最適化後の各弾性テンソルの分布図を図10に示す。図10(a)より、片持ちばりの上下表面の要素（領域）の E_1 成分の剛性が大きくなっており、他の3成分に比べて支配的であることがわかる。 E_4 は負荷点近傍を除きほぼゼロである。

$$\begin{aligned}
 & \text{find : } E_1^{(n)} \quad (I = 1, 2, 4, 6), (n = 1, \dots, N), \\
 & \text{minimizes : } W = \sum_{n=1}^N \sum_{I=1,2,4,6} E_1^{(n)}, \\
 & \text{subject to : } 0 < E_1^{(n)} \leq 1.0 \times 10^4, \quad (I = 1, 2, 4, 6), (n = 1, \dots, N), \\
 & \quad u_{\text{force}} \leq 4.0.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Fig.9 Initial cantilever model of macro structure. A downward force ($P = 100\text{N}$) is applied to the right upper end.

Fig.10 Distributions of elastic moduli optimized for 400 design region. Since a vertical load is applied, the value of E_4 is close to zero.

2つの目のケースとして、図 11 のように同一のマイクロ構造を有する領域を 9 つ配置し、ケース 1 と同様の計算を行った。最適化後の各弾性テンソルの分布図を図 12 に示す。図 10 の分布と概ね同じ傾向を示していることが分かる。表 1 に 2 つのケースでの目的関数の変化と減少率を示す。予想どおりではあるが、400 領域（ケース 1）方が設計変数自由度が大きいため、目的関数の減少率が大きくなっていることが確認される。

Fig.11 Design problem with 9 design region.

Fig.12 Distribution of elastic moduli by optimization (9 design region). It shows the same tendency as the distribution in Fig.10.

Table 1 Comparison of objective functions. The decrease rate of Case 1 is larger than Case 2 because of the number of the total design variables.

	Initial objective function	Final objective function	Decrease rate of objective function
400 design region	1.056×10^7	1.237×10^6	88.29%
9 design region	2.370×10^5	4.186×10^4	82.34%

4・2・2 ミクロスケール形状最適化

次に、マクロ構造の最適化で得られた弾性テンソルを目標値としてミクロ構造の最適化を行った。まず、ミクロ構造最適化手法の確認を目的とするため、今回は図 11 の 9 つの設計領域の内、(a)と(b)の部分の要素のマクロ構造最適化の結果を目標値とした。それぞれの弾性テンソルを $[\bar{E}]^{(a)}$ 、 $[\bar{E}]^{(b)}$ として式(30)に示す。なお、ミクロ構造の初期モデルは図 6 のユニットセルを用いた。

$$[\bar{E}]^{(a)} = \begin{bmatrix} 0.86 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.05 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad [\bar{E}]^{(b)} = \begin{bmatrix} 0.22 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.06 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (30)$$

$[\bar{E}]^{(a)}$ を制約値として得られた最適化形状とその収束履歴を図 13 に、目的関数の履歴を図 14 に示す。収束履歴は横軸を反復回数、縦軸を目標値と各均質化弾性テンソル成分との差 $(\bar{E}^I - E^H)$ を誤差として表す。 ΔE^3 と ΔE^5 の値はゼロであるので省略した。同様に、 $[\bar{E}]^{(b)}$ を制約値とし得られた最適化形状と収束履歴を図 15 に、目的関数の履歴を図 16 に示す。両最適化計算における収束時の弾性テンソルを式(32)に示す。図 13 と図 15 を比較すると、(a)の方が平均的に剛性が大きいため、孔が小さくなっていることが確認される。目的関数はいずれも減少しており、(a)では初期から 58%、(b)では 83%の減少となった。周期的ミクロ構造をイメージするため、図 17 に $[\bar{E}]^{(a)}$ を制約値とした最適化形状の連続図を、図 18 に $[\bar{E}]^{(b)}$ を制約値とした最適化形状の連続図を表す。式(30)と式(31)の結果を比較すると、 $[E^H]^a$ の E_4 成分を除き目的とする値とほぼ一致した結果が得られていることがわかる。 $[E^H]^a$ の E_4 成分が目標値 0 に達しない原因としては、(1)マクロスケールの寸法最適化における異方性弾性テンソル成分を独立な設計変数としているため、ミクロスケールの形状最適化において達成できない弾性テンソル成分の組み合わせが解として得られる場合があること、(2)目標弾性テンソルを達成するために不要領域は小さくなっていくが、ゼロにはならず、メッシュが潰れて計算不能になること、の 2 つが考えられる。これは本提案手法の短所と今後への課題を示している。

$$\begin{bmatrix} E^H \end{bmatrix}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 & 0.00 \\ 0.04 & 0.28 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.06 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad \begin{bmatrix} E^H \end{bmatrix}^{(b)} = \begin{bmatrix} 0.22 & 0.01 & 0.00 \\ 0.01 & 0.19 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.03 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (31)$$

Fig.13 Iteration histories and optimized structures of Ex.2-(a).

Fig.14 Iteration history of objective function of Ex.2-(a). The weight decreases by 58% compared to the initial value.

Fig .15 Iteration histories and optimized structures of Ex.2-(b). The horizontal axis represents the number of iterations, and the vertical axis represents the difference between the target value and each homogenized elastic tensor component. Since the values of E_1 and E_4 are close, the optimized structure is almost symmetrical.

Fig .16 Iteration history of objective function of Ex.2-(b). The weight decreases by 83% compared to the initial value.

Fig.17 Optimized set of micro-structures of Ex.2-(a).

Fig.18 Optimized set of micro-structures of Ex.2-(b).

初期形状への依存性を確認するため、初期形状を図 6 とは異なる図 19 に示す 2 種類の形状(1),(2)を用いて同様の最適化を試みた。その結果を図 19 に示す。なお、制約値は式(30)の $[\bar{E}]^{(a)}$ とした。図 19(1)(2)と図 13 を比較すると、4.1 節の結果とは異なり、3 者は形状、均質化弾性定数成分ともほぼ一致しており、この条件下では初期形状の影響は認められなかった。

	Initial model	Shape of moduls after optimization	Homogenized elastic moduls after optimization
(1)			$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.06 & 0.00 \\ & 0.36 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.08 \end{bmatrix}$
(2)			$\begin{bmatrix} 0.82 & 0.06 & 0.00 \\ & 0.37 & 0.00 \\ \text{sym.} & & 0.08 \end{bmatrix}$

Fig. 19 Results of micro-scale optimization for different initial models. Comparing Fig. 19 and Fig. 15, the optimized results (1) and (2) due to the difference in initial shape did not change much.

5. 結 言

本研究では、マルチスケール構造設計に注目し、マクロ構造の構造特性を最適化するための周期的マイクロ構造の具体的な形状を求める手法を提示した。まず、マクロ構造を対象に、異方性の弾性テンソル成分をを設計変数とする寸法最適化問題を解き、その結果をマイクロ構造のユニットセルの形状設計の制約条件に適用した。マイクロ構造の形状最適化問題では、均質化方程式と均質化弾性定数成分を制約条件に、孔を含むユニットセルの形状変動を設計変数とする面積最小化問題を定式化し、形状勾配関数を理論的に導出した。得られた結果を H^1 勾配法に適用し、最適化なユニットセル構造を決定した。数値計算例を通して、制約条件として与えた弾性テンソルを概ね実現するマイクロ構造（ユニットセル）が得られ、マイクロ構造の形状設計を含むマルチスケール構造最適化手法としての本手法の有効性が確認された。

今後、顕在化した本手法の課題、すなわち(1)マクロスケールの寸法最適化において、ミクロスケールの形状最適化では達成できない弾性テンソルの目標値が算出される場合があること、及び(2)ミクロスケール最適化でのメッシュ潰れが発生する場合があること、への対応を進めていく。(1)に関しては異方性弾性テンソル成分間の関連付け、等式制約条件から不等式制約条件への緩和が考えられる。(2)に関しては、要素のリメッシュを導入し、残存する要素を取り除いた後に計算を継続する方法やトポロジー最適化との同時最適化も対策方法として考えられる。

謝 辞

本研究の一部には JSPS 科研費 18K03853 の助成を受けました。ここに記して厚く感謝の意を表します。

文 献

Andreassen, E., Lazarov, B. S. and Sigmund, O., Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure, *mechanics of Materials*, Vol.69, No.1 (2014), pp.1-10.

- 畔上秀幸, 吳志強, 線形弾性問題における領域最適化解析(力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 A 編, 60, No.578 (1994), pp. 2312-2318.
- Bensoussan, A., Lios, J.-L. and Papanicolaou, G., Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford (1978).
- Choi, K. K. and Kim, N. H., Structural sensitivity analysis and optimization 1, Springer (2005).
- Coelho, P. G., Amiano, L. D., Guedes, J. M. and Rodrigues, H. C., Scale-size effects analysis of optimal periodic material microstructures designed by the inverse homogenization method, Computers and Structures, Vol.174 (2016), pp.21-32.
- Coelho, P. G., Guedes, J. M. and Cardoso, J. B., Topology optimization of cellular materials with periodic microstructure under stress constraints, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.59 (2019), pp.633-645.
- 加藤準治, 河西亮輔, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 逆均質化法を用いたマイクロクラック分布の同定, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.72, No. 1 (2016a), pp.27-37.
- 加藤準治, 谷也大舜, 西澤峻祐, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 超弾性複合材料の分離型マルチスケールトポロジー最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2016 (2016b), 20160001.
- 小泉雄一郎, 孫世海, 齋藤毅, 黒須信吾, 千葉晶彦, 電子ビーム積層造形による Co-Cr-Mo 合金製ゼンマイばねの試作, 粉体および粉末冶金, Vol.61, No.5 (2014), pp.243-249.
- Lipton, R. and Stuebner, M., Inverse homogenization and design of microstructure for pointwise stress control, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 59 (2006), pp.131-169.
- Lipton, R. and Stuebner, M., Optimal design of composite structures for strength and stiffness: an inverse homogenization approach, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.33, No.4-5 (2007), pp.351-362.
- Lukasiak, T., Macroscopically isotropic and cubic-isotropic two-material periodic structures constructed by the inverse-homogenization method, WCSMO 2017: Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization (2017), pp.1333-1348.
- Nika, G. and Constantinescu, A., Design of multi-layer materials using inverse homogenization and a level set method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 346, No.1 (2019), pp.388-409.
- Niu, B., Yan, J. and Chen, G., Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.39, No.2 (2009), pp. 115-132.
- Rodrigues, H., Guedes, J.M. and Bendsoe, M.P., Hierarchical optimization of material and structure, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.24, No.1 (2002), pp. 1-10.
- Schury, F., Stingl, M. and Wein, F., Efficient two-scale optimization of manufacturable graded structures, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol.34, No.6 (2012), pp.711-733.
- 下田昌利, 畔上秀幸, 井原久, 桜井俊明, 複数荷重を考慮した線形弾性体の形状最適化(力法による体積最小設計), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.61, No.587 (1995), pp.1545-1552.
- Sigmund, O., Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem, International Journal of Solids Structures, Vol.31, No.17 (1994), pp.2313-2329.
- Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Matsumoto, H. and Chiba, A., Build direction dependence of micro structure and high-temperature tensile property of Co-Cr-Mo alloy fabricated by electron beam melting, Acta Materialia, Vol.64 (2014a), pp.154-168.
- Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Matsumoto, H. and Chiba, A., Effect of phase transformation on tensile behavior of Co-Cr-Mo alloy fabricated by electron-beam melting, Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy, Vol.61, No.5 (2014b), pp. 234-242.
- Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Matsumoto, H. and Chiba, A., Phase and grain size inhomogeneity and their influences on creep behavior of Co-Cr-Mo alloy additive manufactured by electron beam melting, Acta Materialia, Vol.86 (2015), pp.305-318.
- Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, Vol.93, No.3 (1991), pp.291-318.

- Trofimov, A., Abaimov, S. and Sevostianov, I., Inverse homogenization problem: Evaluation of elastic and electrical (thermal) properties of composite constituents, *International Journal of Engineering Science*, Vol.129 (2018), pp.34-46.
- 牛島邦晴, 秋吉宗, Dai-Heng CHEN, 中原健志, Wesley James CANTWELL, 3次元マイクロラティスで構成された梁の曲げ特性評価(第1報 数値解析に基づく検討), *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.79, No.801 (2013), pp.620-632.
- Zhou, M. and Rozvany, G. I. N., DCOC: An optimality criteria method for large systems, Part2: algorithm, *Structural optimization*, Vol.6, No.4, (1993), pp.12-25.

References

- Andreassen, E., Lazarov, B. S. and Sigmund, O., Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure, *mechanics of Materials*, Vol.69, No.1 (2014), pp.1-10.
- Azegami, H. and Wu, Z. C., Domain optimization analysis in linear elastic problems: Approach using traction method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.60, No.578 (1994), pp. 2312-2318 (in Japanese).
- Bensoussan, A., Lios, J.-L. and Papanicolaou, G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford (1978).
- Choi, K. K. and Kim, N. H., *Structural sensitivity analysis and optimization 1*, Springer (2005).
- Coelho, P. G., Amiano, L. D., Guedes, J. M. and Rodrigues, H. C., Scale-size effects analysis of optimal periodic material microstructures designed by the inverse homogenization method, *Computers and Structures*, Vol.174 (2016), pp.21-32.
- Coelho, P. G., Guedes, J. M. and Cardoso, J. B., Topology optimization of cellular materials with periodic microstructure under stress constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.59 (2019), pp.633-645.
- Kato, J., Kasai, R., Kyoya, T. and Terada, K., Evaluation of micro-crack distribution using inverse homogenization method, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Series A2*, Vol.72, No. 1 (2016a), pp.27-37 (in Japanese).
- Kato, J., Yachi, D., Nishizawa, S., Takase, S., Terada, K. and Kyoya, T., Topology optimization of microstructures for hyperelastic composites based on a decoupling multi-scale analysis, *The Japan Society for Computational Engineering and Science*, Vol.2016 (2016b), 20160001 (in Japanese).
- Koizumi, Y., Sun, S.-H., Saito, T., Kurosu, S. and Chiba, A., Prototyping of Co-Cr-Mo alloy flat spiral spring by electron beam melting, *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, Vol.61, No.5 (2014), pp. 243-249 (in Japanese).
- Lipton, R. and Stuebner, M., Inverse homogenization and design of microstructure for pointwise stress control, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 59 (2006), pp.131-169.
- Lipton, R. and Stuebner, M., Optimal design of composite structures for strength and stiffness: an inverse homogenization approach, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.33, No.4-5 (2007), pp.351-362.
- Lukasiak, T., Macroscopically isotropic and cubic-isotropic two-material periodic structures constructed by the inverse-homogenization method, *WCSMO 2017: Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization* (2017), pp.1333-1348.
- Nika, G. and Constantinescu, A., Design of multi-layer materials using inverse homogenization and a level set method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 346, No.1 (2019), pp.388-409.
- Niu, B., Yan, J. and Chen, G., Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.39, No.2 (2009), pp. 115-132.
- Rodrigues, H., Guedes, J.M. and Bendsoe, M.P., Hierarchical optimization of material and structure, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.24, No.1 (2002), pp. 1-10.
- Schury, F., Stingl, M. and Wein, F., Efficient two-scale optimization of manufacturable graded structures, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.34, No.6 (2012), pp.711-733.

- Shimoda, M., Azegami, H. and Sakurai, T., Shape optimization of linear elastic structures subject to multiple loading conditions (A traction method approach to minimum volume design), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.61, No.587 (1995), pp.1545-1552 (in Japanese).
- Sigmund, O., Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem, International Journal of Solids Structures, Vol.31, No.17 (1994), pp.2313-2329.
- Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Matsumoto, H. and Chiba, A., Build direction dependence of micro structure and high-temperature tensile property of Co-Cr-Mo alloy fabricated by electron beam melting, Acta Materialia, Vol.64 (2014a), pp.154-168.
- Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Matsumoto, H. and Chiba, A., Effect of phase transformation on tensile behavior of Co-Cr-Mo alloy fabricated by electron-beam melting, Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy, Vol.61, No.5 (2014b), pp. 234-242.
- Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Matsumoto, H. and Chiba, A., Phase and grain size inhomogeneity and their influences on creep behavior of Co-Cr-Mo alloy additive manufactured by electron beam melting, Acta Materialia, Vol.86 (2015), pp.305-318.
- Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, Vol.93, No.3 (1991), pp.291-318.
- Trofimov, A., Abaimov, S. and Sevostianov, I., Inverse homogenization problem: Evaluation of elastic and electrical (thermal) properties of composite constituents, International Journal of Engineering Science, Vol.129 (2018), pp.34-46.
- Ushijima, K., Akiyoshi, T., Chen, D.-H., Nakahara, T. and Cantwell, W. J., Estimation of bending behaviour for beams composed of three-dimensional micro-lattice cells (Part 1 Based on Numerical Analysis), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.79, No.801 (2013), pp.620-632 (in Japanese).
- Zhou, M. and Rozvany, G. I. N., DCOC: An optimality criteria method for large systems, Part2: algorithm, Structural optimization, Vol.6, No.4, (1993), pp.12-25.