Hyper-dual numbers を用いた Ogden 型超弾性モデルの定式化とその性能評価

藤川 正毅^{*1}, 田中 真人^{*2}, 井元 佑介^{*3}, 三目 直登^{*4}, 浦本 武雄^{*5}, 山中 脩也^{*6}

Formulation for an Ogden-type hyperelastic analysis with hyper dual numbers and its performance evaluation

Masaki FUJIKAWA^{*1}, Masato TANAKA^{*2}, Yusuke IMOTO^{*3}, Naoto MITSUME^{*4},
Takeo URAMOTO^{*5} and Naoya YAMANAKA^{*6}

^{*1} Faculty of Engineering Department of Mechanical Systems Engineering, University of the Ryukyus
1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, Japan

^{*2} Toyota Central R&D Labs., INC., 41-1 Yokomichi, Nagakute-shi, Aichi 480-1192, Japan

^{*3} Institute for Advanced Study, Kyoto University, Yoshida Knoe-cho, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan

^{*4} Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennodai, Tsukuba-shi, Ibaraki 305-8573, Japan

^{*5} Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University, Yoshida-nihonmatsu-cho, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan

^{*6} School of Information Science, Meisei University, 2-1-1 Hodokubo, Hino-shi, Tokyo 191-8506, Japan

Received: 25 June 2019; Revised: 27 October 2019; Accepted: 17 December 2019

Abstract

A numerical calculation scheme for stress and its consistent tangent moduli with hyper-dual numbers(HDN) for Ogden-type hyperelastic material model was proposed. The main advantage of this scheme is that once the framework is coded, any Ogden-type hyperelastic material model can be implemented by only re-coding the strain energy density function. In this scheme, the new differentiation method for eigenvalue and eigenvector of the symmetric matrices with HDN were proposed. The proposed method can calculate the eigenvalue and eigenvector in non-real part analytically by using the eigenvalue and eigenvector in real part, in case that all eigenvalues in real part are not multiple root. We implemented the Neo-Hookean model and the Ogden model with the proposed scheme, to confirm the effectiveness and robustness of this method, and applied it to some examples. As the results, it was confirmed that the numerical results of the proposed method showed good agreement with analytical ones.

Keywords : Eigenvalue-based hyperelastic material model, Hyper-dual numbers, Eigenvalues, Eigenvectors

1. 背景

学術および産業界において、有限要素法 (FEM) は固体力学の問題を数値的に解く必要不可欠のツールとなっている。近年の工業用製品の多様化や高度化に伴い、その強度や性能を予測する FEM の高精度化が望まれている。そのためには、材料固有の材料構成則の開発がしばしば必要になる。例えば、工業用ゴム材料の材料構成則については、これまでに様々な超弾性構成則が提案されている (Holzapfel, 2000)。また、近年の有限ひずみにおける弾塑性問題でも、超弾性構成則に基づくモデル化 (Simo, 1985)(Simo and Ortiz, 1985) が主流となっている。これは亜

No.19-00256 [DOI:10.1299/transjsme.19-00256], J-STAGE Advance Publication date : 26 December, 2019

^{*1} 正員, 琉球大学工学部工学科機械工学コース (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1)

^{*2} 正員, (株)豊田中央研究所 (〒480-1192 愛知県長久手市横道 41-1)

^{*3} 京都大学高等研究院ヒト生物学高等研究拠点 (〒606-8501 京都府京都市左京区吉田近衛町)

^{*4} 正員, 筑波大学システム情報系構造エネルギー工学域 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

^{*5} 京都大学大学院人間・環境学研究科 (〒606-8501 京都府京都市左京区吉田二本松町)

^{*6} 明星大学情報学部情報学科 (〒191-8506 東京都日野市程久保 2-1-1)

E-mail of corresponding author: fujikawa@eve.u-ryukyu.ac.jp

弾性構成則を用いるアプローチの本質的欠陥（アルゴリズム的な増分形式の構成式の客観性欠如、単調負荷時の応力の振動、弾性領域での散逸挙動など）を回避することが可能なことによる (de Souza Neto 他, 2012). 超弾性構成則を FEM に実装する場合、応力と応力に整合した接線剛性を算出して実装する必要がある。ここで、応力の計算精度は FEM の計算精度に関連しており、整合接線剛性は Newton-Raphson 法の収束挙動に影響を与える。ただし、これらの計算は時として複雑な関数をテンソルで微分する必要があるため、しばしば煩雑となる事が避けられない。そこでその煩雑さの低減を目的として、数値微分を利用したアプローチが、材料モデルの実装の簡略化に有用な手段となりえる。

近年では、数値微分手法として高精度な 2 階微分以上の数値微分が可能な超双対数 (Hyper-dual numbers : 以下, HDN) が注目されている (Fike, 2013). HDN は双対数 (Dual number) (Clifford, 1871) を拡張した仮想的な数で、自乗して 0 となる複数の元を用いて表される数である。Taylor 展開に基づいて実数空間の関数を HDN 空間へ拡張することで、関数の高階微分を HDN の係数から得ることができる。例えば Tanaka らは、HDN を用いた超弾性構成則の定式化を提案している (Tanaka et al., 2015). この方法によると、ひずみエネルギー密度関数を計算するプログラムを実装するだけで、異方性を含む様々な超弾性構成則を FEM 解析することが可能になる。また Tanaka らは、HDN を増分ポテンシャル法 (Incremental variational formulation) へ適用することで、大変形弾塑性問題への拡張法を示している (Tanaka et al., 2016). さらに Fohrmeister らは、gradient enhanced elastoplasticity への拡張した事例を報告している (Fohrmeister et al., 2018). また近年では、HDN の応用的研究として、計算分岐理論などへの応用 (藤井他, 2015)(Fujii et al., 2017)(田中他, 2017)(田中他, 2018) や、幾何学非線形問題における FEM の要素の定式化への応用 (藤川他, 2016) などが報告されている。

ひずみエネルギー密度関数を用いて定義される超弾性体構成則は、大きく分類すると、右 Cauchy-Green テンソルの主不変量を用いる Mooney-Rivlin 型 (Invariant based hyperelastic material model : 以下, Inv-超弾性モデル) と、右 Cauchy-Green テンソルの主値 (もしくは伸長比) つまり、固有値を用いる Ogden 型 (Eigenvalue based hyperelastic material model : 以下, Eig-超弾性モデル) の 2 種類のモデルに分けられる。また、両者の混合型のモデルも数多く提唱されている。高分子材の材料設計・機能予測の高度化・高精度化の要求の高まりから、近年ひずみエネルギー密度関数の関数形はますます複雑化してきており、それと同時に解析解の導出やその実装は困難になってきている。特に、ひずみの主値を用いる Eig-超弾性モデルは、Inv-超弾性モデルに比べて広範囲なひずみレベルで高精度に実験値を再現することができる一方、主値が重根の場合には特別な処理が必要となり、実装に際して複雑な手続きが余分に要求される。Ogden 材料モデルに限定しただけでも、その定式化は数種類も提唱されており、それぞれにおいてその実装の効率性、安定性について議論されている。以下に代表的な Ogden 材料モデルの定式化についてまとめる。一般に、Ogden 材料モデルを用いて接線剛性を導く際、ひずみの主値が重根となった場合に、接線剛性が特異になる問題がある。この問題に対する対策として、一つ目は、ひずみの主値に対応した固有ベクトルを基底ベクトルとし、その基底ベクトルが張る空間座標の成分を用いて構成則を定式化する方法である (Holzapfel, 2000). この方法は最も一般的な Ogden 材料モデルの実装法である。重根の場合、接線剛性が特異になるが、ロピタルの定理を用いた極限処理により、これを回避する。二つ目は、一つ目の方法で使われたロピタルの定理の代わりに、充分小さな変動量を用いて重根時の構成則を近似的に求める摂動法である (Miche, 1995). この方法の利点は、主値が重根となった場合に、ロピタルの定理を用いて別途接線剛性を解析的に求める必要がなくなり、根が互いに異なるケースの構成式をそのまま使い回すことができるという点である。三つ目は、Ogden 材料モデルのひずみエネルギー密度関数を、予め、ひずみの主不変量を用いて解析的に書き直し、基底ベクトルによる座標変換等の数値的な操作を省いた basis free と呼ばれる定式化である (Basar and Itskov, 1998)(Feng et al., 2006)(田中, 野口, 2007). この方法は、Mooney-Rivlin 型の構成則を自然に拡張する形で定式化され、上の二つの方法で必要であった要素積分点ごとの座標変換を省略できる数値的に安価な方法である。以上の三つの方法は、ひずみの主値が全て異なる場合、二重根である場合、三重根である場合、の 3 つのケースに場合分けをして、それぞれに個別な構成則を用意しなければならない。数値解析上では、ある閾値を設けてこのような重根の判定を行って場合分けを行わなければならないが、その閾値の設定は経験的であり、問題によっては解析の途中に最適な閾値の値が変化して数値的な不安定性を誘発させることが指摘されている (田中, 野口, 2007). 四つ目の方法として、こうした重根の場合分けを必要としない実装法が吉田らによって提唱されている (吉田, 杉山, 2008). 物質対数ひずみテンソルの主不変量を用いてひずみの主値の累乗を Taylor 展開して近似する方法である。ただし、重根の場合分

けによる数値不安定性は回避できるものの、Taylor 展開で構成則を近似するため、精度は近似の次数に依存してしまい、打ち切り誤差が常に伴う。

本研究では、上の四つの方法とは異なる五つ目の定式化として、HDN の使用を考える。HDN を用いた超弾性体構成則への適用については著者らの既往の研究 (Tanaka et al., 2015) があるが、これらは全てひずみの主不変量を用いた Inv-超弾性モデルに限定されていた。現在における HDN の適用は、著者の知る限り、Inv-超弾性モデルのみである。

そこで本論文では、HDN を用いた固有系に対する微分の計算手法を開発し、Eig-超弾性モデルにも適用できるように定式化を行い、その有用性を確認する。特に、HDN の固有値・固有ベクトルを算出する計算方法を示すことで、解析解と同等程度の精度で応力と整合接線剛性が得られることを示す。なお、本論文の HDN を用いた固有値・固有ベクトルの算出法は、固有値が重解ではない場合に解析的に微分値を得るものである。そのため、重解の場合には充分小さな変動量を用いて重解を回避する。その点では Miehe の計算法 (Miehe, 1995) と類似しているが、Miehe の方法では応力と接線剛性も解析的に計算して実装しなければならない点が本法と異なる。本論文で示す Eig-超弾性モデルの定式化は、基本的にはひずみエネルギー密度関数のみに注意すればよく、応力と接線剛性は半自動的に計算される。ひずみの主値を用いた非常に複雑な構成則であっても、本手法で容易かつ高精度に実装可能となり、材料構成則の実装面で強力なツールになりうると考える。

本論文の構成は以下の通りである。2 章では、HDN における固有値・固有ベクトルの 1 階・2 階微分の計算手法を提案する。続く 3 章では、汎用 FEM ソフトウェア Abaqus/Standard を例にとり、HDN を用いて Eig-超弾性モデルを実装する方法を解説する。続く 4 章では、提案手法を Neo-Hookean モデルおよび Ogden モデルに適用し、提案手法の検証を行う。第 5 章では、本論文を総括する。

2. Hyper-dual numbers を用いた固有系に対する微分の計算手法

本章では 2 次の hyper-dual numbers を用いて、固有値および固有ベクトルの 1 階および 2 階微分の計算手法を提案する。まず、2 次の hyper-dual numbers の導入を行い、一般の関数に対する微分の計算手法を述べる。次に、その計算手法と固有系関数との対応を述べ、固有系に対する微分の計算手法を構築する。さらに、計算手法の適用範囲に関する定理を示す。なお、本章では N 次の行列に対する計算方法をまとめるが、3 章以降では、 $N = 3$ のひずみや応力テンソルに適用する。

2.1 2 次の hyper-dual numbers (Fike, 2013)

双対数 (Dual number) は Clifford によって提案された手法 (Clifford, 1871) であり、

$$\varepsilon^2 = 0 \quad (1)$$

を満たす元 ε を用いて、

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}_1 \varepsilon, \quad \mathbf{a}, \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^m (m \in \mathbb{N}) \quad (2)$$

で表される実数を拡張した数である。

また、2 次の hyper-dual numbers (HDN) は、双対数を拡張した仮想的な数で、

$$\varepsilon_1^2 = 0; \quad \varepsilon_2^2 = 0; \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2; \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 \neq 0 \quad (3)$$

を満たす元 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を用いて、

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}_1 \varepsilon_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_{12} \in \mathbb{R}^m (m \in \mathbb{N}) \quad (4)$$

で表される数である。 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ に対して、2 次の HDN の空間 $\mathbb{D}_2(\Omega)$ を

$$\mathbb{D}_2(\Omega) := \{\mathbf{a} + \mathbf{a}_1 \varepsilon_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mid \mathbf{a} \in \Omega, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_{12} \in \mathbb{R}^m\} \quad (5)$$

で定める。ここで、 $\mathbf{a} + \mathbf{a}_1 \varepsilon_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{D}_2(\Omega)$ の $\mathbf{a}$ を HDN の実数部 (0 次の係数) と呼ぶ。

次に, $m = 1$ とし, 無限階微分可能な一変数関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. このとき, $x = y$ のまわりでの f のテイラー級数展開は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k \quad (6)$$

で表される. ここに, $f^{(k)}$ は f の k 階微分である. ここで, 右辺に $x = a + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2$ および $y = a$ を代入すると, 式 (3) より,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2)^k = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2)^k \quad (7)$$

が成立するので, f の定義域を $\mathbb{D}_2(\Omega)$ へと拡張した関数 Tf を

$$Tf(a + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2) := \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2)^k \quad (8)$$

と定義する. ここで, $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{12} = 0$ とすると

$$Tf(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = f(a) + f^{(1)}(a)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + f^{(2)}(a)\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (9)$$

が成立する. したがって, $\Im_{\varepsilon}[\cdot]: \mathbb{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2\}$ の実数係数を取り出す関数とすると,

$$f^{(1)}(a) = \Im_{\varepsilon_1}[Tf(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)] = \Im_{\varepsilon_2}[Tf(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)], \quad (10)$$

$$f^{(2)}(a) = \Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}[Tf(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \quad (11)$$

が成立するので, 1 階および 2 階微分を $Tf(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ から得ることができる.

次に, $m \geq 2$ の場合を考える. 無限階微分可能な多変数関数 $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ のまわりでのテイラー級数展開は

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha} g(\mathbf{y})}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\alpha} \quad (12)$$

で表される. ここに, α は m 次の多重指数である. また, $\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m)^T$ であり, ∂_i は i 方向の偏微分を表す. ここで, 右辺に $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_1\varepsilon_1 + \mathbf{a}_2\varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2$ および $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ を代入すると, 式 (3) より,

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha} g(\mathbf{a})}{\alpha!} (\mathbf{a}_1\varepsilon_1 + \mathbf{a}_2\varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\alpha} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \frac{\partial^{\alpha} g(\mathbf{a})}{\alpha!} (\mathbf{a}_1\varepsilon_1 + \mathbf{a}_2\varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\alpha} \quad (13)$$

が成立するので, g の定義域を $\mathbb{D}_2(\Omega)$ へと拡張した関数 Tg を

$$Tg(\mathbf{a} + \mathbf{a}_1\varepsilon_1 + \mathbf{a}_2\varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2) := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \frac{\partial^{\alpha} g(\mathbf{a})}{\alpha!} (\mathbf{a}_1\varepsilon_1 + \mathbf{a}_2\varepsilon_2 + \mathbf{a}_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\alpha} \quad (14)$$

と定義する. ここで, δ_i を i 番目の要素が 1 でそれ以外が 0 であるような m 次の実数ベクトルとすると,

$$Tg(\mathbf{a} + \delta_i\varepsilon_1 + \delta_j\varepsilon_2) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \frac{\partial^{\alpha} g(\mathbf{a})}{\alpha!} (\delta_i\varepsilon_1 + \delta_j\varepsilon_2)^{\alpha} \quad (15)$$

$$= g(\mathbf{a}) + \partial_i g(\mathbf{a})\varepsilon_1 + \partial_j g(\mathbf{a})\varepsilon_2 + \partial_i \partial_j g(\mathbf{a})\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (16)$$

が成立する. したがって,

$$\partial_i g(\mathbf{a}) = \Im_{\varepsilon_1}[g(\mathbf{a} + \delta_i\varepsilon_1 + \delta_j\varepsilon_2)], \quad (17)$$

$$\partial_j g(\mathbf{a}) = \Im_{\varepsilon_2}[g(\mathbf{a} + \delta_i\varepsilon_1 + \delta_j\varepsilon_2)], \quad (18)$$

$$\partial_i \partial_j g(\mathbf{a}) = \Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}[g(\mathbf{a} + \delta_i\varepsilon_1 + \delta_j\varepsilon_2)] \quad (19)$$

が成立するので, 1 階および 2 階偏微分を $g(\mathbf{a} + \delta_i \varepsilon_1 + \delta_j \varepsilon_2)$ から得ることができる.

作用素 T はその定義から明らかなように, 無限回微分可能な関数 $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, ($m \in \mathbb{N}$ によらず,) 以下の代数的性質を満たす:

$$T(f_1 + f_2) = Tf_1 + Tf_2; \quad (20)$$

$$T(f_1 \cdot f_2) = (Tf_1) \cdot (Tf_2); \quad (21)$$

$$T(f_1 \circ f_2) = (Tf_1) \circ (Tf_2). \quad (22)$$

2.2 HDN を用いた固有系に対する微分の計算手法の導出

N 次の $\mathbb{R}$ 上の正方行列の集合を $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$ とする. 行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_N(\mathbb{R})$ に対し, λ を $\mathbf{A}$ の固有値とする (なお, λ はこの章では固有値を表し, それ以降は主伸張比を表す). 固有値 λ および固有ベクトル $\mathbf{v}$ は固有方程式

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (23)$$

を満たすので, これらは $\mathbf{A}$ の成分 $a_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$ の関数, すなわち, N^2 次の多変数関数と考えることができる. 以下では, λ および $\mathbf{v}$ を $\mathbf{A}$ の関数と明記する必要があるときに限り $\lambda(\mathbf{A})$ および $\mathbf{v}(\mathbf{A})$ と記述する. ここで, N 次のベクトル値関数 $\mathbf{h}$ を

$$\mathbf{h}(\mathbf{A}) := \mathbf{A}\mathbf{v}(\mathbf{A}) - \lambda(\mathbf{A})\mathbf{v}(\mathbf{A}) \quad (24)$$

と定める. Δ_{ij} を i, j 成分が 1, それ以外が 0 であるような $N \times N$ の実数行列とする.

このとき, $\mathbf{h}$ が $\mathbf{A}$ のまわりで十分なめらかであるとする, 式 (14) より,

$$T\mathbf{h}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) = \mathbf{h}(\mathbf{A}) + \partial_{ij}\mathbf{h}(\mathbf{A})\varepsilon_1 + \partial_{kl}\mathbf{h}(\mathbf{A})\varepsilon_2 + \partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{h}(\mathbf{A})\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (25)$$

が成立する. ここに, $\partial_{ij} := \partial/\partial a_{ij}$ である. $\mathbf{h}$ は式 (23) より, 任意の $\mathbf{A}$ に対して $\mathbf{h}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ となるため, 任意の $1 \leq i, j, k, l \leq N$ に対して, $\partial_{ij}\mathbf{h}(\mathbf{A}) = \partial_{kl}\mathbf{h}(\mathbf{A}) = \partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{h}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ が成立する. したがって,

$$T\mathbf{h}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) = \mathbf{0} \quad (26)$$

が成立する. さらに, 式 (20) および (21) より,

$$\begin{aligned} T\mathbf{h}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) &= T(\mathbf{A}\mathbf{v}(\mathbf{A}) - \lambda(\mathbf{A})\mathbf{v}(\mathbf{A})) \\ &= (\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2)T\mathbf{v}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) - T\lambda(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2)T\mathbf{v}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) \end{aligned} \quad (27)$$

が成立する. ここで,

$$T\mathbf{v}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) = \mathbf{v} + \partial_{ij}\mathbf{v}\varepsilon_1 + \partial_{kl}\mathbf{v}\varepsilon_2 + \partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v}\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (28)$$

より,

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2)T\mathbf{v}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{v} + (\mathbf{A}\partial_{ij}\mathbf{v} + \Delta_{ij}\mathbf{v})\varepsilon_1 + (\mathbf{A}\partial_{kl}\mathbf{v} + \Delta_{kl}\mathbf{v})\varepsilon_2 + (\mathbf{A}\partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} + \Delta_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} + \Delta_{kl}\partial_{ij}\mathbf{v})\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (29)$$

が成立する. さらに,

$$T\lambda(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) = \lambda + \partial_{ij}\lambda\varepsilon_1 + \partial_{kl}\lambda\varepsilon_2 + \partial_{ij}\partial_{kl}\lambda\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (30)$$

より,

$$\begin{aligned} T\lambda(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2)T\mathbf{v}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) \\ = \lambda\mathbf{v} + (\partial_{ij}\lambda\mathbf{v} + \lambda\partial_{ij}\mathbf{v})\varepsilon_1 + (\partial_{kl}\lambda\mathbf{v} + \lambda\partial_{kl}\mathbf{v})\varepsilon_2 + (\partial_{kl}\lambda\partial_{ij}\mathbf{v} + \partial_{ij}\lambda\partial_{kl}\mathbf{v} + \partial_{ij}\partial_{kl}\lambda\mathbf{v} + \lambda\partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v})\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (31)$$

が成立する. したがって, 式 (26), (27), (29), (31) より,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\partial_{ij}\mathbf{v} + (\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (32)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\partial_{kl}\mathbf{v} + (\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (33)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} - \partial_{ij}\partial_{kl}\lambda\mathbf{v} + (\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda\mathbf{I})\partial_{kl}\mathbf{v} + (\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda\mathbf{I})\partial_{ij}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (34)$$

を得る.

次に, 関数 G を

$$G(\mathbf{A}) := \mathbf{v}(\mathbf{A})^T \mathbf{v}(\mathbf{A}) - 1 \quad (35)$$

と定義する. ここに, $\mathbf{v}(\mathbf{A})^T$ は $\mathbf{v}(\mathbf{A})$ の転置である. $\mathbf{v}(\mathbf{A})$ は単位ベクトルであることを仮定していたので, $G(\mathbf{A}) = 0$ となる. すなわち, 任意の $1 \leq i, j, k, l \leq N$ に対して, $\partial_{ij}G(\mathbf{A}) = \partial_{kl}G(\mathbf{A}) = \partial_{ij}\partial_{kl}G(\mathbf{A}) = 0$ となるので,

$$TG(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) = 0 \quad (36)$$

が成立する. さらに, $\mathbf{v}^2 = 1$, 式 (20), (21), (28) より,

$$\begin{aligned} TG(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) &= (T\mathbf{v}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2))^T T\mathbf{v}(\mathbf{A} + \Delta_{ij}\varepsilon_1 + \Delta_{kl}\varepsilon_2) - 1 \\ &= 2\mathbf{v}^T \partial_{ij}\mathbf{v}\varepsilon_1 + 2\mathbf{v}^T \partial_{kl}\mathbf{v}\varepsilon_2 + 2(\mathbf{v}^T \partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} + \partial_{ij}\mathbf{v}^T \partial_{kl}\mathbf{v})\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (37)$$

が成立する. したがって,

$$\mathbf{v}^T \partial_{ij}\mathbf{v} = 0, \quad (38)$$

$$\mathbf{v}^T \partial_{kl}\mathbf{v} = 0, \quad (39)$$

$$\mathbf{v}^T \partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} = -\partial_{ij}\mathbf{v}^T \partial_{kl}\mathbf{v} \quad (40)$$

を得る.

以上より, 式 (32)–(34) および式 (38)–(40) を用いれば,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{ij}\mathbf{v} \\ \partial_{ij}\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta_{ij}\mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{kl}\mathbf{v} \\ \partial_{kl}\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta_{kl}\mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} \\ \partial_{ij}\partial_{kl}\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda\mathbf{I})\partial_{kl}\mathbf{v} + (\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda\mathbf{I})\partial_{ij}\mathbf{v} \\ \partial_{ij}\mathbf{v}^T \partial_{kl}\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (43)$$

が成立する. ここで, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ より,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) & -1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

が成立するので、式 (41)–(43) より、

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T(A - \lambda I) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{ij}\mathbf{v} \\ \partial_{ij}\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (A - \lambda I)\Delta_{ij}\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T\Delta_{ij}\mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T(A - \lambda I) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{kl}\mathbf{v} \\ \partial_{kl}\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (A - \lambda I)\Delta_{kl}\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T\Delta_{kl}\mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T(A - \lambda I) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} \\ \partial_{ij}\partial_{kl}\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (A - \lambda I)((\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda I)\partial_{kl}\mathbf{v} + (\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda I)\partial_{ij}\mathbf{v}) - \partial_{ij}\mathbf{v}^T\partial_{kl}\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T((\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda I)\partial_{kl}\mathbf{v} + (\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda I)\partial_{ij}\mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (47)$$

が成立する。したがって、

$$((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\partial_{ij}\mathbf{v} = -(A - \lambda I)\Delta_{ij}\mathbf{v}, \quad (48)$$

$$((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\partial_{kl}\mathbf{v} = -(A - \lambda I)\Delta_{kl}\mathbf{v}, \quad (49)$$

$$((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} = -(A - \lambda I)\{(\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda I)\partial_{kl}\mathbf{v} + (\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda I)\partial_{ij}\mathbf{v}\} + (\partial_{ij}\mathbf{v}^T\partial_{kl}\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (50)$$

および

$$\partial_{ij}\lambda = \mathbf{v}^T\Delta_{ij}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T(A - \lambda I)\partial_{ij}\mathbf{v} \quad (51)$$

$$\partial_{kl}\lambda = \mathbf{v}^T\Delta_{kl}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T(A - \lambda I)\partial_{kl}\mathbf{v} \quad (52)$$

$$\partial_{ij}\partial_{kl}\lambda = \mathbf{v}^T(\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda I)\partial_{kl}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T(\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda I)\partial_{ij}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T(A - \lambda I)\partial_{ij}\partial_{kl}\mathbf{v} \quad (53)$$

を得る。ゆえに、 $\det((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \neq 0$ であれば式 (48)–(50) および式 (51)–(53) は可解である。特に、正則行列 $A \in \mathbb{M}_N(\mathbb{R})$ が対称行列 $A = A^T$ のときは、 $\mathbf{v}^T(A - \lambda I) = \mathbf{0}$ より、

$$\partial_{ij}\lambda = \mathbf{v}^T\Delta_{ij}\mathbf{v}, \quad (54)$$

$$\partial_{kl}\lambda = \mathbf{v}^T\Delta_{kl}\mathbf{v}, \quad (55)$$

$$\partial_{ij}\partial_{kl}\lambda = \mathbf{v}^T(\Delta_{ij} - \partial_{ij}\lambda I)\partial_{kl}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T(\Delta_{kl} - \partial_{kl}\lambda I)\partial_{ij}\mathbf{v} \quad (56)$$

が成立する。

2.3 計算手法の適用範囲

第 2.2 節の計算手法の適用範囲を考える。前節より、行列 $((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)$ が正則であれば、固有値 λ および固有ベクトル $\mathbf{v}$ の 2 階以下の偏微分は一意に存在する。そこで、次の定理を示す。

定理 1. 正則行列 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ およびその固有系の組 $(\lambda, \mathbf{v})$ に対して、行列 $((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)$ が正則とならないときは、行列 A の固有値が重解を持ち、 λ がその重解の 1 つとなるときに限る。

Proof. 正則行列 A の固有値が重解を持ち、 λ がその重解の 1 つとする。固有値 λ に対する単位固有ベクトルを $\mathbf{v}$ とする。 λ は重解の固有値なので、 $(A - \lambda I)^2\mathbf{w} = \mathbf{0}$ および $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0$ を満たす広義固有ベクトル $\mathbf{w}$ ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) が存在する。したがって、

$$((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{w} = (A - \lambda I)^2\mathbf{w} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (57)$$

となるベクトル $\mathbf{w}$ が存在するので、 $\det((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) = 0$ となり、行列 $((A - \lambda I)^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)$ は正則でない。

次に, $((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)$ は正則でない, すなわち, $\det((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) = 0$ とする. このとき, あるベクトル $\mathbf{u}$ が存在して,

$$((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (58)$$

が成立する. $\mathbf{v}^T \mathbf{u} = 0$ のとき, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$ となることから, $\mathbf{u}$ は λ の広義固有ベクトルである. したがって, λ は $\mathbf{A}$ の重解の固有値の 1 つである. $\mathbf{v}^T \mathbf{u} \neq 0$ のとき,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{u} = (\mathbf{v}^T \mathbf{u}) \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad (59)$$

が成立するので, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, すなわち $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ である. ここで, $\mathbf{u}' := (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u} / (\mathbf{v}^T \mathbf{u})$ とすると,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u}' = \mathbf{v} \quad (60)$$

が成立する. したがって, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{u}' = \mathbf{0}$ を満たすので, $\mathbf{u}'$ は λ の広義固有ベクトルである. ゆえに, λ は $\mathbf{A}$ の重解の固有値の 1 つである. $\square$

定理 1 より, 正則行列 $\mathbf{A}$ の固有値が重解でなければ第 2.2 節の計算手法は解を持つ.

3. HDN を用いた超弾性構成則の定式化

本章では, Abaqus/Standard を対象として, HDN を用いた超弾性構成則の定式化および実装法についてまとめる. なお Abaqus/Standard への実装には, 任意の材料構成則を実装可能な user subroutine UMAT を用いる. UMAT では, 現時刻の変形勾配テンソル $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ が入力として与えられる. ユーザは, ひずみエネルギー密度関数 ψ より計算される「Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 」と「Jaumann 速度を用いた整合接線剛性 $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3}$ 」を出力する計算プログラムを実装することとなる. 3.1 節では, 通常の手続きとして, 解析解を導出して実装する方法をまとめる. 続く 3.2 節では, HDN を用いた定式化についてまとめる.

3.1 通常の定式化について

3.1.1 ひずみエネルギー密度関数 ψ から応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の計算

等方性超弾性構成則の場合, ひずみエネルギー密度関数 $\psi \in \mathbb{R}$ は次のどちらかで表される.

$$\psi = \psi(I_1, I_2, I_3), \quad (61)$$

$$\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (62)$$

ここで, I_1, I_2, I_3 は右 Cauchy–Green テンソル $\mathbf{C} (= \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ の第 1, 2, 3 不変量, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は $\mathbf{C}$ の固有値の平方根であり, 主伸長比である (ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$). ψ から Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の計算は, 以下の手続きより得ることができる.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T, \quad (63)$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (64)$$

なお, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は第 2Piola–Kirchhoff 応力, $J (= \det(\mathbf{F})) \in \mathbb{R}$ は体積変化率である.

3.1.2 接線剛性 $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}}$ の計算

Kirchhoff 応力を $\boldsymbol{\tau} (= J \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ とすると, Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\tau}}^{\nabla \text{MJ}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ と接線剛性 $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}}$ の関係は次式で表される.

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^{\nabla \text{MJ}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{W} = J \mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}} : \mathbf{D} \quad (65)$$

ここで、 $\dot{\cdot}$ は物質時間微分、 $:$ はテンソルの二組の基底に対する縮約を表すものとしている。また $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は連続体スピンテンソルであり変形速度テンソル $\mathbf{L}(=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ の反対称成分、 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は変形速度テンソルであり $\mathbf{L}$ の対称成分である。

以上を整理すれば、 $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}}$ は次式で得られる。

$$(\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}})_{ijkl} = (\mathbf{C}^{\text{TK}})_{ijkl} + \frac{1}{2} (\tau_{il}\delta_{jk} + \tau_{jl}\delta_{ik} + \tau_{ik}\delta_{jl} + \tau_{jk}\delta_{il}) \quad (66)$$

ここで、

$$(\mathbf{C}^{\text{TK}})_{ijkl} = F_{iA}F_{jB}F_{kC}F_{lD}(\mathbf{C})_{ABCD} \quad (67)$$

$$(\mathbf{C})_{ijkl} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad (68)$$

である。また式 (67) における下付きの A, B, C, D は、アインシュタインの総和規約のダミーインデックスである。

3.1.3 Neo-Hookean モデルの定式化

3.1.1 項と 3.1.2 項の具体的な計算例として、最も一般的な超弾性モデルの 1 つである Neo-Hookean モデルの場合を紹介する。Neo-Hookean モデルのひずみエネルギー密度関数 ψ は次式のようなものである。

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = c_1 \left(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2 - 3 \right) + \frac{1}{d} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)^2 \quad (69)$$

ここで、 $\bar{\lambda}_1^2, \bar{\lambda}_2^2, \bar{\lambda}_3^2$ は $\mathbf{C}$ の等容変形成分 $\bar{\mathbf{C}}(=\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ の固有値、 $\bar{\mathbf{F}}(=J^{-1/3} \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は $\mathbf{F}$ の等容変形成分、 c_1 と d は材料定数である。3.1.1 項と 3.1.2 項より、 $\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}}$ は次式のように計算される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} c_1 \left(\bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \text{trace}(\bar{\mathbf{B}}) \mathbf{I} \right) + \frac{2}{d} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1) \mathbf{I} \quad (70)$$

$$(\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}})_{ijkl} = \frac{2}{J} c_1 \left(\frac{1}{2} (\delta_{ik} \bar{B}_{jl} + \bar{B}_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \bar{B}_{jk} + \bar{B}_{il} \delta_{jk}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{B}_{kl} - \frac{2}{3} \bar{B}_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \bar{B}_{mm} \right) + \frac{2}{d} (2J - 1) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (71)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は左 Cauchy–Green テンソル $\mathbf{B}(=\mathbf{F}\mathbf{F}^T) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ の等容変形成分である。

以上の様に、 ψ の式が単純な場合でも、 $\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}}$ の計算式はそれぞれ 2 階のテンソルと 4 階のテンソルとなることから、その導出やプログラムへの実装が煩雑となる。近年の超弾性構成則の開発ではその高度化が進み、ひずみエネルギー密度関数がさらに複雑となる。その場合、式 (70) や (71) の導出やその実装も煩雑となることが避けられない。

3.2 HDN を用いた固有値型超弾性構成則の定式化

本節では、HDN を用いた応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と接線剛性 $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}}$ の算出方法について示す。また、2 章で導入した HDN の固有値と固有ベクトルの具体的な計算プログラムについてまとめる。

3.2.1 HDN による超弾性構成則の応力と接線剛性の算出

超弾性構成則を対象として、HND を用いた応力と接線剛性の計算方法をまとめる。 ψ の定義域を $\mathbb{D}_2(\Omega)$ へと拡張した関数 $T\psi$ を用いれば、Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と接線剛性 $\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}}$ は、文献 (Tanaka et al., 2015) より次式で得られる。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} \mathfrak{S}_{\varepsilon_1} \left[T\psi \left(\mathbf{F} + \varepsilon_1 \Delta \mathbf{F}^{(ij)}(\mathbf{F}) + \varepsilon_2 \Delta \mathbf{F}^{(kl)}(\mathbf{F} + \varepsilon_1 \Delta \mathbf{F}^{(ij)}) \right) \right] \quad (72)$$

$$(\mathbf{C}^{\nabla \text{MJ}})_{ijkl} = \frac{1}{J} \mathfrak{S}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[T\psi \left(\mathbf{F} + \varepsilon_1 \Delta \mathbf{F}^{(ij)}(\mathbf{F}) + \varepsilon_2 \Delta \mathbf{F}^{(kl)}(\mathbf{F} + \varepsilon_1 \Delta \mathbf{F}^{(ij)}) \right) \right] \quad (73)$$

ここで、

$$\Delta \mathbf{F}^{(ij)}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{F}, \quad (74)$$

$\mathbf{e}$ は基底ベクトルである．以上の計算フローチャートを図 1 に示す．

提案手法の特徴は，図 1 の計算プログラムを一度準備しさえすれば， ψ を計算するプログラムのみを変更するだけで任意の超弾性構成則を実装できる点である．つまり，FEM に必要となる σ と $\mathbf{C}^{\text{VMJ}}$ は自動的に計算される（例えば Neo-Hookean モデルの場合では，式 (69) のみを実装するだけで FEM 解析が可能になる：式 (70) と (71) の導出やプログラムの実装は不要となる）．

Fig. 1 Flow chart of computations of the Cauchy stress and tangent moduli with HDN.

3.2.2 HDN の固有値・固有ベクトルの計算

HDN を用いて Eig-超弾性モデルを FEM に実装する場合， ψ の計算には HDN からなる $\mathbf{C}$ の固有値 λ^2 （と固有ベクトル）の算出が必要となる．なお，本論文で扱う 2 階のテンソルは行列とみなせるため，2 章の議論を適用することができる．ただし，定理 1 より実数部の固有値が重解ではない場合に限定される．そこで今回は，実数部の固有値が重解の場合に摂動を与えて重解を避ける計算方法（図 2）を使用する．なお本章では，テンソルと行列を区別するため，行列をアンダーラインの太字（例： $\underline{\mathbf{C}}$ ）で記すようにする．

この演算方法では，まず $\mathbf{C}$ の実数部のみを対象として Jacobi 法により固有値・固有ベクトルを計算する．そして，得られた固有値の重解か否かの検査をする目的で， $\lambda_\varepsilon = \min(|C_{ii} - C_{jj}|)$ を取り出す． λ_ε が tol_3 以上の場合，重解ではないと判断する（本計算では $tol_3 = 10^{-6}$ とする）． λ_ε が tol_3 より小さい場合には重解と判断し，次式の摂動を与える．

$$C_{11} \leftarrow (1 + \alpha) C_{11}, \quad C_{22} \leftarrow (\alpha + 1)^{-1} C_{22}. \quad (75)$$

ここで，式中の“ $\leftarrow$ ”は右辺から左辺への代入を表すものとする．また， α は任意の摂動定数であるが，今回は 10^{-6} とした．そして (75) で更新した結果を用いて，改めて Jacobi 法により実数部の固有値・固有ベクトルを計算する．

以上の作業を $\lambda_\varepsilon \geq tol_3$ となるまで繰り返す。

Fig. 2 Flow chart of Jacobi method algorithm for computations of eigenvalue and eigenvectors in real part.

4. 例題への適用

本章では、提案手法の実用性と応用性を評価する目的で、解析解 (Analytical) で実装した解析と、提案手法（以下、HDN）で実装した解析結果を比較する。各解析は Abaqus のユーザーサブルーチン UMAT で実装した。なお各解析の評価は、ひずみエネルギーと Newton-Raphson 法の収束履歴でおこなう。ここで、前者は 1 階微分（応力）の計算精度、後者は 2 階微分（接線剛性）の計算精度に関連する評価となる。なお本章の目的は提案手法の有効性の確認であることから、特に単位は指定せず示すこととする。

4.1 Neo-Hookean モデルへの適用

提案手法の実用性と応用性を評価する目的で、3 種の例題（4.1.1 立方体モデルのせん断（伸長比が重解でない問題）、4.1.2 立方体モデルの単軸引張（伸長比が重解となる問題）、4.1.3 大変形接触問題）に適用する。材料モデルは Neo-Hookean モデルとして、材料定数は $c_1 = 1.0$, $d = 0.01$ とする（初期ヤング率 $E_0 = 5.98$, 初期ポアソン比 $\nu_0 = 0.495$ ）。なお、Neo-Hookean モデルは Inv-超弾性モデル形式で表すことも可能であるが、提案手法の有

効性を確認する目的で Eig-超弾性モデル形式（式 (69)）で実装する。

4.1.1 せん断解析への適用（立方体 1 要素モデル）

本節では、図 3 に示すような $1 \times 1 \times 1$ の立方体ハイブリッド要素 (Abaqus/standard の C3D8H 要素、以下 C3D8H) のせん断解析を行う。ここでは境界条件として、節点 1,2,3,4 の x 方向と y 方向、節点 3,4,7,8 の z 方向の変位を拘束して、節点 5,6,7,8 からなる面の x 方向に 2 の荷重を負荷する。また 1 ステップ目で最終ステップに到達するものとした。

最終変形状態のひずみエネルギーを表 1 に、Newton-Raphson 法の収束履歴を図 4 に示す。その結果、HDN のひずみエネルギーの結果および Newton-Raphson 法の収束履歴は、解析解の結果と一致した。

Fig. 3 Shear problem of 3D cubic block.

Table 1 The strain energy of shear problem at final step by Neo-Hookean model. The result from the HDN method shows good agreement with analytical one.

	Strain energy
Analytical	1.006660
HDN	1.006660

Fig. 4 Largest residual force of shear problem in Newton-Raphson iteration at the first step by Neo-Hookean model. The values of the residuals are identical for the HDN method compared with the ones resulting from an analytic implementation.

4.1.2 単軸引張解析への適用（立方体 1 要素モデル）

本節では、図 5 に示すような $1 \times 1 \times 1$ の立方体ハイブリッド要素 (C3D8H) の引張解析を行う。ここでは境界条件として、節点 1,4,5,8 の x 方向、節点 1,2,3,4 の y 方向、節点 3,4,7,8 の z 方向の変位を拘束して、節点 2,3,6,7 からなる面の x 方向に 1.6 の荷重を負荷する。また 1 インクリメント目で最終ステップに到達するものとした。

最終変形状態のひずみエネルギーを表 2 に、Newton-Raphson 法の収束履歴を図 6 に示す。本例題では右 Cauchy-Green テンソルの主値が重解となる。そのため摂動を与える処理の影響により、解析解と HDN の結果には約 1×10^{-3} %の相対誤差が生じた。ただし微差であると言え、また収束履歴には影響をほとんど与えていないことから、実用上では問題にならない程度であると言える。

Fig. 5 Uniaxial tension (UT) problem of 3D cubic block.

Table 2 The strain energy of the UT problem at final step by Neo-Hookean model. Although, due to the perturbation processing for $\mathbf{C}$ in eq.(75), the slight different between with the analytical and HDN solutions is observed, the value of the strain energy from the HDN method almost agreement with analytical one.

Strain energy	
Analytical	0.306060
HDN	0.306057

Fig. 6 Largest residual force of UT problem in Newton-Raphson iteration at the first step by Neo-Hookean model. The values of the residuals are almost identical for the HDN method compared with the ones resulting from an analytic implementation.

4.1.3 大変形接触問題への適用

本節では、図7に示すような直方体形状の変形体が剛体球と接触する問題の解析を行う。直方体の形状は $4 \times 4 \times 2$ であり、剛体球の直径は4としている。解析は対称性を考慮して1/4モデルとする。そして境界条件として、直方体底の変位を完全拘束して、剛体球を1.5押し込むものとする。変形体は6面体ハイブリッド要素(C3D8H)で要素分割し、節点数は1,265、要素数960とした。本解析は全工程のうち1/10を初順の時間増分として与え、あとはAbaqus/standardの自動時間増分機能を用いて解析した。

最終変形状態のひずみエネルギーを表3に、初期ステップのNewton-Raphson法の収束履歴を図8に示す。その結果、HDNのひずみエネルギーの結果およびNewton-Raphson法の収束履歴は、解析解の結果と一致した。

Fig. 7 Large deformation contact problem.

Table 3 The strain energy of the contact problem at final step. The result from the HDN method shows good agreement with analytical one.

	Strain energy
Analytical	3.42298
HDN	3.42298

Fig. 8 Largest residual force of the contact problem in Newton–Raphson iteration at the first step. The values of the residuals are identical for the HDN method compared with the ones resulting from an analytic implementation.

4.2 Ogden モデルへの適用

提案手法の汎用性を評価する目的で、代表的な Eig-超弾性モデルの一つである Ogden モデルを実装する。そして、3 種の例題（4.2.1 立方体モデルのせん断、4.2.2 立方体モデルの単軸引張、4.2.3 Cook’s membrane 問題）に適用する。Ogden モデルのひずみエネルギー密度関数は次のようである。

$$\psi = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2 \quad (76)$$

ここで、 μ_i , α_i は材料定数である。なお、代表的な材料定数として $N = 3$, $\mu_1 = 6.3$, $\alpha_1 = 1.3$, $\mu_2 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\alpha_2 = 5.0$, $\mu_3 = -0.1$, $\alpha_3 = -2.0$, $d = 1 \times 10^{-4}$ がある (Ogden, 1972)。本報告でもこの材料物性を用いることとする。なお解析解 (Analytical) の実装には、主値が重解の場合にロピタルの定理を利用する Ogden 材料モデルの最も一般的な実装方法 (Holzapfel, 2000) を採用した。

4.2.1 せん断解析への適用

本節では、立方体 1 要素によるせん断解析を行う。なお解析条件等については、4.1.1 項を参照されたい。最終変形状態のひずみエネルギーを表 4 に、初期ステップの Newton–Raphson 法の収束履歴を図 9 に示す。その結果、HDN のひずみエネルギーの結果および Newton–Raphson 法の収束履歴は、解析解の結果と一致した。

Table 4 The strain energy of shear problem at final step by Ogden model. The result from the HDN method shows good agreement with analytical one.

	Strain energy
Analytical	0.327464
HDN	0.327464

Fig. 9 Largest residual force of shear problem in Newton–Raphson iteration at the first step by Ogden model. The values of the residuals are identical for the HDN method compared with the ones resulting from an analytic implementation.

4.2.2 単軸引張解析への適用

本節では、立方体 1 要素による引張解析を行う。なお解析条件等については、4.1.2 項を参照されたい。最終変形状態のひずみエネルギーを表 5 に、初期ステップの Newton–Raphson 法の収束履歴を図 10 に示す。本解析は右 Cauchy–Green テンソルの主値が重解となる。そのため摂動を与える処理の影響により、解析解と HDN の結果にはひずみエネルギーで約 2×10^{-3} %の相対誤差が生じた。ただし 4.1.2 項の結果と同様に微差であり、また収束履歴には影響をほとんど与えていないことから、実用上では問題にならない程度であると言える。

Table 5 The strain energy of the UT problem at final step by Ogden model. Although, due to the perturbation processing for $\mathbf{C}$ in eq.(75), the slight different between with the analytical and HDN solutions is observed, the value of the strain energy from the HDN method almost agreement with analytical one.

	Strain energy
Analytical	0.078959
HDN	0.078961

Fig. 10 Largest residual force of UT problem in Newton–Raphson iteration at the first step by Ogden model. The values of the residuals are almost identical for the HDN method compared with the ones resulting from an analytic implementation.

4.2.3 Cook's membrane 問題への適用

本節では、図 11 に示すような Cook's membrane 問題の解析を行う。本解析では、左面の変形を完全固定して、右面の y 方向に一樣な圧力となるように負荷した（総荷重 $F = 40.0$ ）。なお 6 面体ハイブリッド要素 (C3D8H) を採用し、節点数は 10,788、要素数は 8,550 で要素分割した。また時間増分として、1step で最終変形状態になるように設定した。

最終変形状態のひずみエネルギーを表 6 に、最終ステップの Newton–Raphson 法の収束履歴を図 12 に示す。その結果、ひずみエネルギーと Newton–Raphson 法の収束履歴の結果の両方で、解析解と HDN が一致することを確認した。

Fig. 11 Cook's membrane problem.

Table 6 The strain energy of Cook's membrane problem at final step. The result from the HDN method shows good agreement with analytical one.

Strain energy	
Analytical	165.391
HDN	165.391

Fig. 12 Largest residual force of Cook's membrane problem in Newton-Raphson iteration at the first step. The values of the residuals are identical for the HDN method compared with the ones resulting from an analytic implementation.

5. 結 論

HDN による固有値型-超弾性構成則の定式化を提案した。また、その際に必要となる HDN の固有値・固有ベクトルの演算方法について議論した。得られた知見を以下に示す。

- HDN における固有値・固有ベクトルに対する微分の計算手法を提案した。提案手法は、固有値が重解ではない場合に、固有値・固有ベクトルの 1 階および 2 階微分を解析的に算出できるものである。
- HDN を用いた固有値・固有ベクトルの計算プログラムを提案した。本プログラムでは、まず Jacobi 法を利用して実数部の固有値・固有ベクトルを計算する。実数部が重解の場合には摂動を与えることで実数部が重解となることを回避する。この例外処理と先述の微分の計算手法を組み合わせることにより、HDN の固有値・固有ベクトルの計算プログラムとした。
- 上記の計算プログラムを用いて代表的な超弾性モデルである Neo-Hookean モデルと Ogden モデルを Abaqus/Standard に適用した。そして、4 つの例題（1 要素のせん断、単軸引張、大変形接触、Cook's membrane 問題）に適用して解析解の結果と比較した。その結果、右 Cauchy-Green テンソルの固有値が重解となる引張り試験を除いて、本解析は解析解の結果と一致することを確認した。また単軸引張解析についてもそのひずみエネルギーの相対誤差は、今回の例題の範囲では 2×10^{-3} % 程度以下であり、また収束履歴にほとんど影響を与えない。以上より、大変形問題の演算方法としては、実用上で問題ないと考える。

本論文で示した HDN の固有値・固有ベクトルに対する微分の計算は、3 階微分以上への拡張も可能である。本報告を足掛かりとして、4 階以上の微分を必要とする非線形材料構成則の増分ポテンシャル法 (Tanaka et al., 2016) への拡張を今後に進める予定である。また併せて、固有値が重解の場合でも計算精度が低下しない、新しい計算方法についても検討したいと考えている。

謝 辞

本研究は JST CREST JPMJCR14D4 の助成支援を受けた。また著者の一人は、東北大学情報科学研究科重点プロジェクトの助成を受けた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- Basar, Y. and Itskov, M., Finite element formulation of the Ogden material model with application to rubber-like shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.42 (1998), pp.1279-1305.
- Clifford, M.A., Preliminary sketch of biquaternions, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.1-4, No.1 (1871), pp.381-395.
- de Souza Neto, E.A., Perić, D. and Owen, D.R.J., 寺田賢二郎 (監訳), 非線形有限要素法：弾塑性解析の理論と実践, 森北出版 (2012).

- Feng, Z.-Q., Peyraut, F. and He, Q.-C., Finite deformations of Ogden's materials under impact loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.41 (2006), pp.575–585.
- Fike, J.A., Multi-objective optimization using hyper-dual numbers, Stanford University, Ph.D. Thesis (2013).
- Fohrmeister, V., Bartels, A. and Mosler, J., Variational updates for thermomechanically coupled gradient-enhanced elastoplasticity — Implementation based on hyper-dual numbers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.339 (2018), pp.239–261.
- 藤井文夫, 池田清宏, 田中真人, 藤川正毅, 計算分岐理論における 2-mode 漸近展開の検証 (微分演算ツール HDN の導入の前に), *日本機械学会論文集*, Vol.81, No.830 (2015), DOI:10.1299/transjsme.15-00419.
- Fujii, F., Tanaka, M., Sasagawa, T. and Omote, R., Computational two-mode asymptotic bifurcation theory combined with hyper dual numbers and applied to plate/shell buckling, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.325 (2017), pp.666–688.
- 藤川正毅, 石川清貴, 真壁朝敏, 田中真人, 笹川崇, 表竜二, Hyper-dual numbers を用いた高精度一階・二階数値微分法に基づく幾何学非線形有限要素法の定式化, *日本機械学会論文集*, Vol.82, No.834 (2016), DOI:10.1299/transjsme.15-00454.
- Holzappel, G.A., *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*, Wiley (2000).
- Miehe, C., Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials, *European journal of mechanics, A. Solids*, Vol.14 (1995), pp.697–720.
- Ogden, R.W., Large deformation isotropic elasticity — on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.326, No.1567 (1972), pp.565–584.
- Simo, J.C., On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity, *Mechanics of Materials*, Vol.4 (1985), pp.439–451.
- Simo, J.C. and Ortiz, M., A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.49 (1985), pp.221–245.
- 田中真人, 野口裕久, 主不変量を用いた Ogden 材料モデルの実装と数値解の収束性の評価, *日本計算工学会論文集* (2007), No.20070008.
- Tanaka, M., Sasagawa, T., Omote, R., Fujikawa, M., Balzani, D. and Schröder, J., A highly accurate 1st- and 2nd-order differentiation scheme for hyperelastic material models based on hyper-dual numbers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.283 (2015), pp.22–45.
- Tanaka, M., Balzani, D. and Schröder, J., Implementation of incremental variational formulations based on the numerical calculation of derivatives using hyper dual numbers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.301 (2016), pp.216–241.
- 田中真人, 笹川崇, 表竜二, 藤井文夫, 超双対数を用いた 2-mode 漸近展開法と有限要素座屈解析への応用, *日本計算工学会論文集* (2017), DOI:10.1142/jscs.2017.20170017.
- 田中真人, 笹川崇, 表竜二, 藤井文夫, 頂上分岐および多重分岐解析に適用可能な計算漸近分岐理論の構築, *日本機械学会論文集*, Vol.84, No.868 (2018), DOI:10.1299/transjsme.18-00346.
- 吉田純司, 杉山俊幸, ゴム材料のための Ogden モデルの近似計算法, *土木学会論文集 A*, Vol.64, No.2 (2008), pp.217–222.

References

- Basar, Y. and Itskov, M., Finite element formulation of the Ogden material model with application to rubber-like shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.42 (1998), pp.1279–1305.

- Clifford, M.A., Preliminary sketch of biquaternions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol.1-4, No.1 (1871), pp.381–395.
- de Souza Neto, E.A., Perić, D. and Owen, D.R.J., Terada, K. (Translation supervisor), *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, Morikita Publishing Co., Ltd. (2012) (in Japanese).
- Feng, Z.-Q., Peyraut, F. and He, Q.-C., Finite deformations of Ogden's materials under impact loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.41 (2006), pp.575–585.
- Fike, J.A., Multi-objective optimization using hyper-dual numbers, *Stanford University, Ph.D. Thesis* (2013).
- Fohrmeister, V., Bartels, A. and Mosler, J., Variational updates for thermomechanically coupled gradient-enhanced elastoplasticity — Implementation based on hyper-dual numbers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.339 (2018), pp.239–261.
- Fujii, F., Ikeda, K., Tanaka, M. and Fujikawa, M., Validating a 2-mode asymptotic expansion in computational bifurcation theory (Before introducing HDN for differential operation), *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol.81, No.830 (2015), DOI:10.1299/transjsme.15-00419.
- Fujii, F., Tanaka, M., Sasagawa, T. and Omote, R., Computational two-mode asymptotic bifurcation theory combined with hyper dual numbers and applied to plate/shell buckling, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.325 (2017), pp.666–688.
- Fujikawa, M., Ishikawa, K., Makabe, C., Tanaka, M., Sasagawa, T. and Omote, R., Geometrically nonlinear finite element implementation based on highly accurate 1st and 2nd numerical derivative scheme using hyper-dual numbers, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol.82, No.834 (2016), DOI:10.1299/transjsme.15-00454.
- Holzappel, G.A., *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for Engineering*, Wiley (2000).
- Miehe, C., Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials, *European journal of mechanics, A. Solids*, Vol.14 (1995), pp.697–720.
- Ogden, R.W., Large deformation isotropic elasticity — on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.326, No.1567 (1972), pp.565–584.
- Simo, J.C., On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity, *Mechanics of Materials*, Vol.4 (1985), pp.439–451.
- Simo, J.C. and Ortiz, M., A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.49 (1985), pp.221–245.
- Tanaka, M. and Noguchi, H., The Implementation of Ogden material model using invariants of strains and the assessment of its numerical convergence, *Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science* (2007), No.20070008 (in Japanese).
- Tanaka, M., Sasagawa, T., Omote, R., Fujikawa, M., Balzani, D. and Schröder, J., A highly accurate 1st- and 2nd-order differentiation scheme for hyperelastic material models based on hyper-dual numbers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.283 (2015), pp.22–45.
- Tanaka, M., Balzani, D. and Schröder, J., Implementation of incremental variational formulations based on the numerical calculation of derivatives using hyper dual numbers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.301 (2016), pp.216–241.
- Tanaka, M., Sasagawa, T., Omote, R. and Fujii, F., A Two-mode asymptotic expansion method using hyper-dual numbers and applied to finite element buckling analysis, *Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science* (2017), DOI:10.11421/jscs.2017.20170017 (in Japanese).
- Tanaka, M., Sasagawa, T., Omote, R. and Fujii, F., Formulation of a computational asymptotic bifurcation theory

applicable to hill-top branching, and multiple bifurcation analyses, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.84, No.868 (2018), DOI: 10.1299/transjsme.18-00346.

Yoshida, J. and Sugiyama, T., An approximated formulation of Ogden model for rubber-like solids, Journal of Japan Society of Civil Engineers, Series A, Vol.64, No.2 (2008), pp.217–222 (in Japanese).