ラティスをコアとするサンドイッチ円筒の振動特性評価

高坂 恭平^{*1}, 牛島 邦晴^{*2}

Study on vibration characteristics of cylindrical sandwich tube with lattice core

Kyohei KOHSAKA^{*1} and Kuniharu USHIJIMA^{*2}^{*1} Graduate School of Engineering, Tokyo University of Science, 6-3-1 Nijuku, Katsushika-ku, Tokyo 125-8585, Japan^{*2} Faculty of Engineering, Tokyo University of Science, 6-3-1 Nijyuku, Katsushika-ku, Tokyo 125-8585, Japan

Received: 28 August 2019; Revised: 31 October 2019; Accepted: 11 December 2019

Abstract

In this study, the natural frequency of cylindrical sandwich tube with lattice core has been investigated using finite element method (FEM). In particular, effects of geometrical parameters such as the ratio of the diameter to length, unit-cell size and facesheet thickness on the natural frequency were discussed. It is revealed that the natural vibration frequency of the lattice sandwich tube can be predicted with a good accuracy in a wide range of tube length-to-diameter ratio L/D by substituting the equivalent material properties (initial stiffness E_{eq} and Poisson's ratio ν_{eq}) and relative density ρ_{eq} into the analytical equations for a straight tube of a continuum medium.

Keywords : Lattice, Vibration, Finite element method, Sandwich structure

1. 緒 言

サンドイッチ構造とは、複合材料の1つであり、軟質な材料をコア部材とし、その表面に対して剛性の高く薄い面板を接着することによって曲げ剛性を高めた構造である。サンドイッチ構造はその軽量でかつ高剛性な特徴を活かし、自動車や航空機といった輸送機械の基本構造部材として多く用いられている。また、サンドイッチ構造で造形した梁や平板、円板、筒状構造の機械的特性に関する研究も、これまで数多く報告されている (Allen, 1969)。

一方、コア部材にハニカムやラティスといった周期セル構造体を用いたサンドイッチ構造の研究も、近年数多くみられるようになった (Gibson and Ashby, 1997)(Wadley et al., 2003)(Deshpande and Fleck, 2001)。その背景には、近年の Additive Manufacturing 技術（以下では AM 技術と表現）の急速な発展が挙げられる。AM 技術の1つとして金属の粉末を利用した 3D プリンタが登場し、それにより直径が数百 μm オーダーのラティス構造が比較的容易に造形できるようになった。図 1 に著者らが実際に造形したラティス構造の一例を示す。ラティス構造とは、三次元的に梁を配置した周期セル構造体の一つである。内部のセル形状を自由に設計することで、軽量かつ優れた特性（剛性、強度、断熱性、吸音性、振動制御等）を持つサンドイッチ構造を造形できるようになった (Rahme, 2010)(Xiong et al., 2015)。

著者らはこれまで、ラティス構造単体の機械的特性（剛性、強度）について研究を行ってきた (Ushijima et al., 2013)。また、サンドイッチ構造のコア部材としてラティス構造を用いた場合の崩壊強度についても、同様に研究を行ってきた (Omachi et al., 2018, 2019)。このラティス構造をコアとするサンドイッチ構造の活用を考えた場合、強度や剛性の評価だけでなく、振動に関する問題、特に共振現象を解明することもまた、機械工学上の設計にお

いて重要であるといえる。

連続体の構造振動に関する研究は、これまで数多く行われてきた。例えば円筒の構造振動に着目すると、古くはレイリー卿 (Rayleigh, 2011) の著書に円筒の曲げ振動の理論解が報告されている。また、Flüge(Flüge, 1962) や Donnell(Donnell, 1933) によって導かれた薄肉円筒シェルの運動方程式を数値計算により近似的に解く計算手法が、長年にわたり数多く報告されている。古賀 (Koga, 1988) は過去の古典的な理論の総合とオーダー整理によって、様々な境界条件を持つ円筒の固有振動数を閉じた形で近似的に算出した。さらに、小松ら (小松, 戸田, 1977) は円筒シェルの梁状曲げ振動に着目して、実験と理論の比較を行っている。

一方、ラティス構造をコアとするサンドイッチパネルの振動特性評価に関する研究も、近年いくつか報告されている。例えば Lou ら (Lou et al., 2012) は、ラティスサンドイッチ梁の曲げ振動について解析的研究を行い、ハミルトンの原理により誘導される運動方程式から求めた固有振動数が、有限要素法に基づく数値シミュレーション解析結果と対応することを示した。しかしながら、検討に用いたラティスサンドイッチ梁の幾何形状、ならびに境界条件は 1 種類のみであり、振動特性を十分検討したとは言い難い。著者らの一人もまた、既に矩形断面を持つラティス梁の曲げおよび振動解析を行い、均一な連続体との相違について検討している (牛島他, 2013)。一方、円筒構造にした場合、矩形断面の場合と比べラティスのユニットセル形状が台形状になり、直方体のユニットセルとして求めた物性値 (等価縦弾性係数や横弾性係数) がどこまで利用できるか不明である。特に、輸送機械には回転を伴う部品や回転体で構成された部品も数多く存在するため、薄肉円筒のような回転体をラティスサンドイッチパネルで造形したときの振動特性もまた、重要である。

そこで本研究では、ラティスをコアとするサンドイッチパネルを円筒状にした構造 (以下、サンドイッチ円筒と表現) の振動特性について、有限要素法に基づく数値シミュレーション解析を行い、円筒の幾何形状や境界条件が及ぼす固有振動数への影響を系統的に調べることを計画した。特に、連続体における固有振動数の理論解と比較しながら、予測可能性について検討した。

Fig. 1 Example of lattice structure fabricated by Additive Manufacturing technology.

2. 解 析 方 法

2.1 解析モデル及び条件

本数値シミュレーション解析には汎用有限要素法 (FEM) ソフト MSC.Marc.2017 を用いた。解析対象のラティスサンドイッチ円筒とユニットセルの FEM モデルの例を図 2 に示す。このように、ラティス構造をコア部材として、その外側と内側に面板を取り付けた 3 層のサンドイッチ構造となっている。

コア部材であるラティス構造は複数の真直な梁 (直径 d_c の円柱) で構成されており、図 2 (b) を便宜上 BCC 構造と呼ぶ。またコアの半径方向のセル数も変えながら検討を進める。面板には 4 節点シェル要素を用い、ラティスを構成する梁は 2 節点ビーム要素で 10 分割して作製した。またユニットセルの各幾何形状パラメータを表 1 に、材料物性値を表 2 に示す。ここで、この円筒は SUS630 ステンレス鋼で造形することを想定している。以降、特に断りがない場合にはこれらの値を用い、均質で等方性を有する弾性体と仮定する。

Fig. 2 Geometry of FE model for a cylindrical sandwich tube with lattice core.

Table 1 Geometric parameters of sandwich tube with lattice core.

Tube length	L : Variable	Lattice height	$\Delta R=2.50\text{mm}$
Tube diameter	$D = 37.5\text{mm}$	Inclination angle	$\Delta\theta=7.50\text{deg}$
Facesheet thickness	$t_f = 200\mu\text{m}$	Lattice length	$\Delta L=2.50\text{mm}$
Strand's diameter	$d_c = 200\mu\text{m}$		

Table 2 Material properties.

Young's modulus	$E_s=210\text{GPa}$
Poisson's ratio	$\nu=0.3$
Density	$\rho_s = 7930\text{kg/m}^3$

2.2 等価な物性値の算出

本研究ではラティスサンドイッチ円筒の固有振動数について、緒言でも触れたように FEM に基づく数値シミュレーション解析で求めるだけでなく、連続体における理論解を用いてラティスサンドイッチ円筒の振動数の予測可能性についても検討する。そのためラティスサンドイッチ円筒を等価な連続体とみなしたときの物性値が必要となる。そこで本研究では並列型の複合則 (Kaw, 1997) に則りそれらの物性値を求めた。

等価、母材、コア部材の物性値をそれぞれ下添え字 eq , s , co で表す。また、外側と内側の面板、およびラティスコア部材の XY 平面における断面積をそれぞれ A_{out} , A_{in} , A_{co} とすれば、等価な縦弾性係数 E_{eq} , ポアソン比 ν_{eq} , 横弾性係数 G_{eq} は次のように表される。

$$E_{eq} = \frac{(A_{out} + A_{in})E_s + A_{co}E_{co}}{A_{out} + A_{in} + A_{co}} \quad (1)$$

$$\nu_{eq} = \frac{(A_{out} + A_{in})\nu_s + A_{co}\nu_{co}}{A_{out} + A_{in} + A_{co}} \quad (2)$$

$$G_{eq} = \frac{E_{eq}}{2(1 + \nu_{eq})} \quad (3)$$

E_{co} , ν_{co} の導出の詳細は、著者らの文献 (Ushijima et al., 2013) を参照されたい。また、等価な密度 ρ_{eq} は、外側と内側の面、ラティスコア部材の体積をそれぞれ V_{out} , V_{in} , V_{co} として次のように表される。

$$\rho_{eq} = \frac{\rho_s(V_{co} + V_{out} + V_{in})}{\pi D(\Delta R + 2t_f)L} \quad (4)$$

3. 解析結果及び検討

3.1 扁平したラティス構造のヤング率 E_z の算出

本研究で用いたラティス構造のユニットセルは、軸対称に配置するという構造の制約上、円筒の中立面の外側と内側でラティス構造を構成する梁の長さが異なる扁平した形状を有する。本節ではそのようなラティス構造のヤング率 E_{co} を近似的に求める手法を提案し、FEM による数値シミュレーション解析結果と比較し、その妥当性を確かめる。なお、この近似手法は、ポアソン比 ν_{co} についても同様に用いて算出している。

図 3 に示すような直方体をユニットセルとする、8 本の梁からなる BCC 構造の 3 軸方向のヤング率 E_3 は次式で求められる (Ushijima et al., 2013)。

$$E_3 = \frac{3\pi E_s}{16} \left(\frac{d_c}{l} \right)^4 \frac{\cos \gamma_3}{\sin^2 \gamma_3 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2} \quad (5)$$

ここで、 E_s は母材のヤング率、 d_c はラティス梁の直径、 l はラティスを構成する梁一本の長さであり、 $\gamma_i (i=1,2,3)$ はユニットセル内部の梁とセルの稜線との間の角度を表す (図 3 参照)。すなわち、 $\gamma_i (i=1,2,3)$ は以下の式で定義される。

$$\begin{cases} \gamma_1 = \angle OAB = \angle OBA \\ \gamma_2 = \angle OAE = \angle OEA \\ \gamma_3 = \angle OAD = \angle ODA \end{cases} \quad (6)$$

Fig. 3 Definition of angles γ_1 , γ_2 and γ_3 in a BCC unit-cell.

Fig. 4 Definition of angles γ_1' , γ_2' and γ_3' in an alternative BCC unit-cell. Here, the dotted line in red corresponds to that in Fig.5(b).

次に、扁平したラティス構造を、図 3 の直方体をユニットセルとする BCC 構造へ近似することを考える。この手順を図 5 に示す。3 軸方向からラティスを平面的に見て上下の頂点をそれぞれ結び、それらの長さを b_1 , b_2 とする。 b_1 , b_2 の平均値をユニットセルの 1 軸方向の長さ L_1' と考えて長方形の対角線を結び、ユニットセルの 2 軸方向の長さ L_2' を決定する。3 軸方向の長さ L_3' は変化せず ΔL とする。以上の操作により扁平したユニットセルは、図 5(b) の赤線に示すような長方形の形状に近似することができ、この近似した長方形形状に合わせ、ユニットセルの形状が変わる。変更後のセルを 3 次元に表したものを図 4 に示す。

この方法をまとめると式 (7) となる。

Fig. 5 Alternative rectangular unit-cell for a shallow BCC cell.

$$\begin{cases} L_1' = \frac{b_1 + b_2}{2} \\ L_2' = \Delta R \cos \frac{\Delta\theta}{2} \\ L_3' = \Delta L \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 R を円筒中立面の半径とすれば、 b_1 , b_2 は以下の式で求まる。

$$\begin{cases} b_1 = (D + \Delta R) \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ b_2 = (D - \Delta R) \sin \frac{\Delta\theta}{2} \end{cases} \quad (8)$$

一方、図3における γ_i に相当する扁平したラティス構造での角度 $\gamma_i' (i=1,2,3)$ は、その幾何学的な関係から式(9)のように求まる。

$$\gamma_i' = \arccos \left(\frac{L_i'}{\sqrt{L_1'^2 + L_2'^2 + L_3'^2}} \right) \quad (i=1,2,3) \quad (9)$$

式(9)を式(5)に代入し、1, 2, 3 軸方向をそれぞれ θ , r , z 方向とみなせば、扁平したラティスの z 軸方向の初期剛性 E_z は次式で算出できる。

$$E_z = \frac{3\pi E_s}{16} \left(\frac{d_c}{l'} \right)^4 \frac{\cos \gamma_3'}{\sin^2 \gamma_3' \cos \gamma_1' \cos \gamma_2'} \quad (10)$$

図6に開き角度 $\Delta\theta$ を変えたときの z 軸方向の等価縦弾性係数 E_z の変化を示す。ここで、FEM による解析結果は、ラティスのみによって構成される円筒に強制変位 u_z を与え、得られた反力 F_z との比を用いて以下の式で求めた。

$$E_z = \frac{F_z / (2\pi R \Delta R)}{u_z / L} = \frac{F_z}{u_z} \frac{L}{\pi D \Delta R} \quad (11)$$

図6より、等価縦弾性係数 E_z は両結果とも $\Delta\theta$ の増加に伴い減少していることが分かる。ここで「 $\Delta\theta$ が増加」とは円周方向に配置したラティスの個数が少なくなり、また、図5に示すようにユニットセルがより扁平した形状 (b_1 と b_2 の差が大きくなる形状) を意味している。その結果、円筒の長手方向の縦弾性係数が小さくなる。また、扁平が大きい形状、例えば $\Delta\theta = 15.0\text{deg}$, $D = 37.5\text{mm}$ の場合では $b_1 = 5.22\text{mm}$, $b_2 = 4.56\text{mm}$ と差が大きいため近似

精度が悪くなると予想されたが、実際には検討した範囲では FEM による解析値と理論値の相対誤差は全て 1.00% 未満となった。すなわち、 $\Delta\theta$ が予測精度に与える影響は比較的小さく、式 (10) の妥当性が確認された。しかしながら、 $\Delta\theta$ が極端に大きいと近似したラティスの交点がコア部分の外にはみ出してしまうため、 $\Delta\theta$ の設定には注意する必要がある。

Fig. 6 Equivalent initial stiffness E_z along the longitudinal direction for a lattice sandwich tube by changing the diameter D and angle $\Delta\theta$. The stiffness E_z agrees well with its estimated value regardless of the diameter D and inclination angle $\Delta\theta$.

3.2 L/D に対する固有振動数の変化

本節では、ラティスサンドイッチ円筒の軸方向長さ L と円筒の平均径 D との比 L/D が、円筒に生じる固有振動数や振動モードに与える影響を調べ、同時に等価な物性値を用いて均一な連続体とみなすことで、この円筒の固有振動数を予測可能かを検討する。この検討において、直径 D を一定とし軸方向の長さ L を変化させ、均質な連続体の円筒における固有振動数の理論値と FEM による解析値を比較した。更に、境界条件としては、一端固定、両端自由、両端支持の 3 条件を用い、理論値の算出には式 (12)(Timoshenko, 1937)、式 (13)(Koga, 1988) を用いた。

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E_{eq} I}{\rho_{eq} A}} \quad (12)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_{eq}}{\rho_{eq} R^2 (1 - \nu_{eq}^2)}} \sqrt{\frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} \left\{ \frac{(2t_f + \Delta R)^2}{3D^2} + \frac{(1 - \nu_{eq}^2) \xi^4}{(n^2 - 1)^2} \right\}} \quad (13)$$

ここで、 n は円周方向波数であり、各 n に対応する振動モード形状は、XY 平面における断面において図 7 のようになる。ただし、 $n = 1$ は梁状の振動モードを指すため、この場合固有振動数は式 (12) によって評価し、 n が 2 以上の場合には式 (13) を用いて評価する。また、 A 、 I はそれぞれコア部分を完全に密な連続体とみなした場合の断面積、および断面二次モーメントである。

$$A = \frac{\pi}{4} \left\{ (D + \Delta R + t_f)^2 - (D - \Delta R - t_f)^2 \right\} \quad (14)$$

$$I = \frac{\pi}{64} \left\{ (D + \Delta R + t_f)^4 - (D - \Delta R - t_f)^4 \right\} \quad (15)$$

Fig. 7 Observed vibration mode shapes corresponding to the number of circumferential waves n . The red line indicates cross-sectional shape of the cylinder in X-Y plane before deformation.

式 (12),(13) 中のパラメータ λ , ξ は境界条件の影響を受けるパラメータであり, それぞれの条件下で成り立つ関係式から算出される. 例えば一端固定境界条件下の場合,

$$\begin{cases} \cosh \lambda \cos \lambda - 1 = 0 \\ \xi = \frac{R\lambda}{nL} \end{cases} \quad (16)$$

が成り立つ. 同様に, 両端単純支持境界条件下の場合,

$$\begin{cases} \sin \lambda = 0 \\ \xi = \frac{R\lambda}{nL} \end{cases} \quad (17)$$

が成り立ち, 両端自由境界条件下の場合,

$$\begin{cases} \cosh \lambda \cos \lambda + 1 = 0 \\ \xi = 0 \end{cases} \quad (18)$$

が成り立つ.

図 8 より, 連続体における理論値と FEM による本解析結果は概ね傾向が一致していることが分かる. また, 全ての境界条件下において, 円筒の全長の直径の比 L/D が小さくなるにつれて, $n \geq 2$ の断面が図 7 のように変形する振動モードが $n=1$ の振動モードよりも低周波数帯で生じやすくなる傾向がみられるが, 最も低い固有振動数 ($n=1$ あるいは $n=2$ の振動モード) であれば, 広範囲の L/D に対し, 式 (12) あるいは式 (13) を用いての予測が可能であるといえる. 一方, n が大きくなるにつれ理論値と FEM による解析結果の間の誤差は大きくなる傾向にある. n が増すと図 7 に示すように円周に対する波の数が大きくなり, 面外への曲げ変形に対するせん断変形の影響が無視できなくなるためだと考えられる. また, 円筒がある程度短く梁状の振動 ($n=1$) をする場合においても, 固有振動数の予測値は FEM による解析値よりも高い結果となる. この範囲は円筒の面内曲げ振動がせん断変形の影響を受ける領域と考えられ, その範囲の大きさは境界条件によっても異なる. この点については後の 3.4 節で検討する.

Fig. 8 Relationship between the natural frequency and length-to-diameter ratio L/D for a lattice sandwich tube under three kinds of boundary conditions (clamped-free, free at both ends and simply-supported). As the number of circumferential waves n increases and as the length of the tube becomes shorter, Eqs.(12) and (13) overestimate the numerical results, which is due to the effect of shear deformation observed in a tube.

3.3 ユニットセルの幾何形状と固有振動数の関係

本節では、ラティスサンドイッチ円筒の幾何パラメータと固有振動数の関係の一般的な傾向の確認、及びそれらが固有振動数の予測精度に与える影響について検討を行う。尚、解析対象は $L/D=10$ と十分長く、境界条件は一端固定とし、理論値の算出には前述した式 (12) を用いて 1 次の梁状曲げ振動モードのみを取り扱う。

3.3.1 ラティスを構成する梁の直径 d_c の影響

ラティスを構成する梁の直径 d_c を $100 \sim 800 \mu\text{m}$ の範囲で変化させた際の固有振動数の変化を図 9 に示す。図 9 より、検討した範囲では d_c が大きくなるにつれ固有振動数が減少していくことが分かる。 d_c が増加することでラ

ティスコア部材の縦弾性係数は大きくなり、その結果円筒の曲げ剛性 $E_{eq}I$ は大きくなる一方、 d_c の増加とともに単位長さ当たりの質量 $\rho_{eq}A$ は大きくなる。式 (17) からわかるように、曲げ剛性 $E_{eq}I$ の増加と単位長さあたりの質量 $\rho_{eq}A$ の増加は、固有振動数 f に対し相反する影響を及ぼす。今回検討に用いた BCC ラティスサンドイッチ円筒では、 d_c の増加する際に生じた剛性の上昇よりも単位長さあたりの質量の増加が常に上回ったため、上述の傾向を示したと考えられる。また、図中には内側の面板のみ ($t_f=200\mu\text{m}$) の固有振動数も併記した。ラティス層が存在しない場合 ($d_c=0$)、内側の面板の固有振動数が最低次となる。また、FEM による解析値と式 (12) による理論値は良く一致しており、相対誤差は最大でも 2.22% であり、等価な連続体としての評価の有効性が確認された。

Fig. 9 Effect of the strand's diameter d_c on the natural frequency f . As the diameter d_c becomes small, the frequency increases and approaches to the value for a inner tube.

3.3.2 面板の厚さ t_f の影響

面板の厚さ t_f を $0 \sim 800\mu\text{m}$ の範囲で変化させた際の固有振動数の変化を図 10 に示す。図 10 より、検討した範囲では面板の厚さの増加に伴い、固有振動数が単調に増加していくことが分かる。これは前述の d_c の検討と同様に、曲げ剛性 $E_{eq}I$ と質量 $\rho_{eq}A$ との比が主な原因であり、 t_f を増加させることによる剛性の増加が大きいことを意味している。また、FEM による解析値と理論値の傾向は良く一致しており、連続体とみなした評価の有効性が確認された。

3.3.3 ラティスの層数 N_R の影響

前節までは、図 2 (a) に示すように、ラティスコア部材のユニットセルを半径方向に 1 層設けたサンドイッチ円筒についての検討であった。本節では、図 11 に示すように複数の層を有するサンドイッチ円筒の固有振動数について検討を行う。最も外側のラティスコアを第 1 層と考え、内側へ層数を増やしていく。この時、層数を表すパラメータを N_R で表す。また、 f の予測で用いる等価縦弾性係数には、以下の式を用いた。

$$E_{eq} = \frac{(A_{out} + A_{in})E_s + \sum_{i=1}^{N_R} A_i E_i}{A_{out} + A_{in} + \sum_{i=1}^{N_R} A_i} \quad (19)$$

ここで、 A_{out} 、 A_{in} はそれぞれ XY 平面における外側と内側の面板の断面積である。

層数 N_R を 1 から 4 まで変化させたときの固有振動数 f を図 12 に示す。図 12 より、層数が多いほど固有振動数は低下する傾向にあり、FEM による解析値と式 (12) による近似値との差は大きくなる。これは、 ΔR および $\Delta \theta$ を一定に取っているため、内側にあるラティス層ほど扁平が大きくなり、予測精度が悪くなったと考えられる。しかし

Fig. 10 Effect of the facesheet thickness t_f on the natural frequency f . The estimations for f obtained by Eq.(12) agree well with numerical results regardless of the thickness t_f .

ながら、4層構造でも10.0%未満の誤差で近似出来ているのは、BCC構造の場合面板の振動が支配的となり、ラティス層の扁平化による剛性や質量の影響は小さいと考えられる。

Fig. 12 Effect of the number of layers N_R on the natural frequency f .

Fig. 11 Cross section of lattice sandwich tube with different number of layers N_R .

3.4 せん断変形，回転慣性を考慮した梁状曲げ振動

前節までの結果から、円筒の固有振動モードには軸方向の長さによらず直線梁の曲げ振動モードが存在することが分かった。また、 L/D 比が比較的小さい円筒において、直線梁の曲げ振動モードは高次モードとして存在し、

式 (12) では近似精度が良くないことも確認された。しかしながら、短い円筒においても外力の受け方により梁状の曲げ振動を低次モードで起こしうることが容易に想像でき、広範囲の L/D に対し、曲げ振動時の固有振動数の予測は重要といえる。従って、ここでは式 (12) の他に、せん断変形や回転慣性を考慮した理論式（式 (20)(戸部, 1951), (21)(小松, 戸田, 1977)）を加え、FEM による解析結果と比較する。また、式 (20), (21) 中の k' はせん断修正係数を表し、0.5 とした。なお、境界条件は一端固定とした。

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E_{eq} I}{\rho_{eq} A}} \left\{ 1 - 2.52 \frac{I}{AL^2} \left(1 + \frac{E_{eq}}{k' G_{eq}} \right) \right\} \quad (20)$$

$$f = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{k' G_{eq} A}{\rho_{eq} A}} \quad (21)$$

図 13(a) に円筒の長さ と直径の比 L/D に対する固有振動数の変化を示す。この図からわかるように、円筒が短くなるにつれ、曲げ振動に及ぼすせん断変形の影響は大きくなり、固有振動数 f は式 (21) による解に近づく。また、誤差 10%未滿を基準とすれば、式 (21) は約 $L/D < 1$ 、式 (20) や (12) は約 $L/D > 3$ の範囲で FEM と良く一致する。さらに、式 (20) と式 (12) の適用範囲を明らかにするため、図 13(b) に図 13(a) の拡大図を示す。この結果からわかるように、FEM 解析で得られる固有振動数 f は常に式 (20) と式 (12) による近似解の間にはさまれ、およそ $3 < L/D < 8$ の範囲で式 (20) による近似解の精度が式 (12) によるそれよりも高い。

以上をまとめると、今回検討したラティスサンドイッチ円筒の固有振動数は、解析対象を均一な連続体と置き換え、その等価な物性（曲げ剛性、せん断剛性ならびに単位長さあたりの質量）を用いて、予測することが可能である。ただし、適用可能な近似式は、円筒の長さ と直径の比 L/D によっておおよそ分類できる。円筒が十分短い場合（ $L/D < 1.0$ ）であれば、円筒のせん断剛性を考慮した解（式 (21)）、円筒がある程度長い梁（ $3 < L/D < 8$ ）であれば、円筒の曲げ剛性とせん断剛性や回転慣性を考慮した解（式 (20)）、円筒が十分長い梁（ $8 < L/D$ ）であれば、円筒の曲げ剛性のみを考慮した解を用い、固有振動数を高精度に予測可能である。

なお、本検討では表 2 に示す材料物性値を用いたが、固有振動数 f はこれら物性値に依存するため、各近似式の適用可能な L/D の範囲にも影響しうる。ただし、本研究は SUS630 の金属粉末でラティス円筒を積層造形することを前提としていること、また、ヤング率 E のみを変えた場合において、先に述べた L/D による近似誤差への影響は同程度であったため、近似式の適用可能範囲は前述の通り結論づける。

3.5 結言

本研究では、周期セル構造体の一つであるラティス構造をコア部材とし、外側と内側に面板を有するサンドイッチ円筒の固有振動数 f について、有限要素法に基づく数値解析を用いて求めた。特に、サンドイッチ円筒を均一な連続体とみなし、その等価な物性を用いて連続体における固有振動数の理論解を用い、振動数 f の予測を試みた。その結果、円筒の全長 L と直径 D の比で適用可能な解を分類できることが分かった。具体的には、円筒が十分短い場合（ $L/D < 1.0$ ）であれば円筒のせん断剛性を考慮した解、円筒がある程度長い梁（ $3 < L/D < 8$ ）であれば、円筒の曲げ剛性とせん断剛性や回転慣性を考慮した解、円筒が十分長い梁（ $8 < L/D$ ）であれば、円筒の曲げ剛性のみを考慮した解を用い、固有振動数を高精度に予測可能である。

文 献

- Allen, H.G., Analysis and Design of Structural Sandwich Panels, Pergamon Press (1969).
 Deshpande, V.S. and Fleck, N.A., Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending, International Journal of Solids and Structures, Vol.38, No.36-37 (2001), pp.6275–6305.
 Donnell, L.H., Stability of thin-walled tubes under torsion, NACA Technical Report, TR-479 (1933).
 Flüge, W., Stress in Shells, Springer-Verlag, Berlin, 1st ed. (1962).
 Gibson, L.J. and Ashby, M.F., Cellular Solids: Structure and Properties, Cambridge University Press (1997).
 Kaw, A.K., Mechanics of Composite Materials, CRC Press (1997).

Fig. 13 Variation of the natural frequency f with the length-to-diameter ratio of the sandwich tube L/D (beam-type mode). Equations (12), (20) and (21) can be applied for estimating the natural frequency for a lattice sandwich tube with a good accuracy. Equation (12) is suitable for sufficiently longer tube ($L/D > 8$), and Eq.(21) is suitable for shorter tube ($L/D < 1$). Also, Eq.(20) is suitable for relatively intermediate length of circular tube ($3 < L/D < 8$).

Koga, T., Effect of boundary conditions on the free vibrations of circular cylindrical shells, AIAA Journal, Vol.26, No.11 (1988), pp.1387–1394.

小松敬治, 戸田勲, 円筒シェルの梁状曲げ振動について, 航空宇宙技術研究所報告, TR-502 (1977).

Lou, J., Ma, L. and Wu, L.Z., Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core, Materials Science and Engineering: B, Vol.177, No.19 (2012), pp.1712–1716.

Omachi, A., Ushijima, K., Cantwell, W.J. and Chen, D.H., Prediction of failure modes and peak loads in lattice sandwich panels under three-point loading, Journal of Sandwich Structures & Materials (2018), DOI:10.1177/1099636218789605.

Omachi, A., Ushijima, K., Nagakura Y. and Cantwell, W.J., The effect of micro-architecture on the failure response of multi-layered lattice sandwich panels under three-point loading, Journal of Sandwich Structures & Materials (2019), DOI:10.1177/1099636219842163.

Rayleigh, L., The theory of sound, Cambridge University Press (2011).

Rahme, O., Cellular Design for Laser Freeform Fabrication (2010), p.3, Cuvillier Verlag.

戸部俊美, 回転慣性およびせん断力の影響を考慮せる均一断面はりの横振動について, 日本機械学会論文集, Vol.17, No.57 (1951), pp.14–19.

牛島邦晴, Cantwell, W.J., 陳 玳コウ, 圧縮荷重を受ける軽量 Lattice 構造の機械特性の評価: 第 1 報, 圧縮初期の剛性と塑性崩壊応力に対する理論的評価, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.75, No.753 (2009), pp.572–579.

Ushijima, K., Cantwell, W.J. and Chen, D.H., Prediction of the mechanical properties of micro-lattice structures subjected to multi-axial loading, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.68 (2013), pp. 47–55.

牛島邦晴, 秋吉宗, Chen D.H., 中原健志, Cantwell, W.J., 3 次元マイクロラティスで構成された梁の曲げ特性評価 (第 1 報 数値解析に基づく検討), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.79, No.801 (2013), pp.620–632.

Wadley, H.N.G., Fleck, N.A. and Evans, A.G., Fabrication and structural performance of periodic cellular metal sandwich structures, Composites Science and Technology, Vol.63, No.16 (2003), pp.2331–2343.

Weaver Jr., W., Timoshenko S.P. and Young, D.H., Vibration problems in engineering, Wiley-Interscience 5th edition

(1990).

Xiong, J., Mines, R., Ghosh, R., Vaziri, A., Ma, L., Ohrndorf, A., Christ, H.G., Wu, L., Advanced micro-lattice materials, *Advanced Engineering Materials* (2015), DOI:10.1002/adem.201400471.

References

- Allen, H.G., *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Pergamon Press (1969).
- Deshpande, V.S. and Fleck, N.A., Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.38, No.36-37 (2001), pp.6275–6305.
- Donnell, L.H., *Stability of thin-walled tubes under torsion*, NACA Technical Report, TR-479 (1933).
- Flüge, W., *Stress in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1st ed. (1962).
- Gibson, L.J. and Ashby, M.F., *Cellular Solids: Structure and Properties*, Cambridge University Press (1997).
- Kaw, A.K., *Mechanics of Composite Materials*, CRC Press (1997).
- Koga, T., Effect of boundary conditions on the free vibrations of circular cylindrical shells, *AIAA Journal*, Vol.26, No.11 (1988), pp.1387–1394.
- Komatsu, K. and Toda, S., Beam-type vibrations of short thin cylindrical shells, Technical report of national aerospace laboratory, TR-502 (1977)(in Japanese).
- Lou, J., Ma, L. and Wu, L.Z., Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core, *Materials Science and Engineering: B*, Vol.177, No.19 (2012), pp.1712–1716.
- Omachi, A., Ushijima, K., Cantwell, W.J. and Chen, D.H., Prediction of failure modes and peak loads in lattice sandwich panels under three-point loading, *Journal of Sandwich Structures & Materials* (2018), DOI:10.1177/1099636218789605.
- Omachi, A., Ushijima, K., Nagakura Y. and Cantwell, W.J., The effect of micro-architecture on the failure response of multi-layered lattice sandwich panels under three-point loading, *Journal of Sandwich Structures & Materials* (2019), DOI:10.1177/1099636219842163.
- Rayleigh, L., *The theory of sound*, Cambridge University Press(2011).
- Rahme, O., *Cellular Design for Laser Freeform Fabrication*(2010), p.3, Cuvillier Verlag.
- Tobe, T., Kaiten kansei oyobi sendanryoku no eikyo wo kohryo seru kin-itu danmen hari no yoko shindoh ni tuite, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.17, No.57(1951), pp.14–19(in Japanese).
- Ushijima, K., Cantwell, W.J. and Chen, D.H., Evaluation of the mechanical properties of lightweight lattice structures subjected to compressive loading (1st report, analytical approach for the initial stiffness and plastic collapse strength) , *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.75, No.753(2009), pp.572–579(in Japanese).
- Ushijima, K., Cantwell, W.J. and Chen, D.H., Prediction of the mechanical properties of micro-lattice structures subjected to multi-axial loading, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.68(2013), pp. 47–55.
- Ushijima, K., Akiyoshi, T., Chen, D.H., Nakahara, T. and Cantwell, W.J., Estimation of bending behaviour for beams composed of three-dimensional micro-lattice cells (Part 1 based on numerical analysis) , *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.79, No.801(2013), pp.620–632(in Japanese).
- Wadley, H.N.G., Fleck, N.A. and Evans, A.G., Fabrication and structural performance of periodic cellular metal sandwich structures, *Composites Science and Technology*, Vol.63, No.16(2003), pp.2331–2343.
- Weaver Jr., W., Timoshenko S.P. and Young, D.H., *Vibration problems in engineering*, Wiley-Interscience 5th edition (1990).
- Xiong, J., Mines, R., Ghosh, R., Vaziri, A., Ma, L., Ohrndorf, A., Christ, H.G. and Wu, L., Advanced micro-lattice materials, *Advanced Engineering Materials* (2015), DOI:10.1002/adem.201400471.